УДК 512.643

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ С ЭРМИТОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

А. И. Барсуков[1], А. А. Домнич[2]

[1] — *Воронежский государственный архитектурно-строительный университет,*
[2] — *Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 20.12.2015 г.

Аннотация. Известно, что любой квадратичный матричный пучок с эрмитовыми коэффициентами можно представить в виде произведения линейных множителей: $L(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$. Нами рассмотрена задача о построении таких пучков по заданному множителю $\lambda I - A$. Другими словами, по заданной матрице A требуется найти все матрицы X, такие что коэффициенты пучка $L(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$ являются эрмитовыми матрицами, то есть, выполнены равенства $A + X = (A + X)^*$ и $AX = (AX)^*$. В работе конструктивно строится общее решение сформулированной задачи и приводится критерий единственности ее решения в терминах спектра заданной матрицы A. Показано, каким образом общий вид искомых матриц X зависит от спектра заданной матрицы A. Заметим, что аналогично можно восстановить пучок с эрмитовыми коэффициентами по заданному правому множителю в факторизации пучка.

Рассмотрено приложение полученных результатов к пространствам с индефинитной метрикой. А именно, описано множество всех эрмитовых матриц W, для которых заданный оператор оператор A является W-самосопряженным.

Ключевые слова: эрмитов квадратичный матричный пучок, обратная задача, индефинитное скалярное произведение.

ON THE INVERSE PROBLEM FOR MATRIX PENSILS WITH HERMITIAN COEFFICIENTS

A. I. Barsukov, A. A. Domnich

Abstract. It is known, that each quadratic pencil with Hermitian coefficients can be represented as a multiplication of linear factors: $L(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$. The problem of the construction of such pencils by given factor $\lambda I - A$ is considered. In another words, by the given matrix A it is required to find all matrices X such that the coefficients of the pencils $L(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$ are Hermitian matrices, that is, the equalities $A + X = (A + X)^*$ и $AX = (AX)^*$ are fulfill. The general solution of the formulated problem are constructed and the criterion for the uniqueness of this solution is given in the terms of the spectrum of the given matrix A. It is shown how the general form of required matrices X depends on the spectrum of the given matrix X. Note, that it is analogous possible to reconstruct the pencil with Hermitian coefficients by the given right factor in the factorization of the pencil.

The application of obtained results to the spaces with an indefinite inner product is considered. Namely, the set of all Hermitian matrices W, for which the given operator A is W-selfadjoint, are described.

Keywords: Hermitian quadratic matrix pencil, inverse problem, indefinite scalar product.

* Работа поддержана грантом РФФИ № 15–01–05315–а

ВВЕДЕНИЕ

Под обратными задачами для матричных пучков понимаются задачи по восстановлению коэффициентов пучка $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda D + K$ по заданным начальным условиям (спектр пучка, его собственные и присоединенные векторы и тому подобное). Большое количество таких задач и их приложения представлены в обзоре M.T. Chu [1]. Задачу, рассмотренную в нашей работе, впервые, по-видимому, сформулировали P. Lancaster и F. Tisseur в [2].

По теореме 11.2 в [3] любой квадратичный пучок

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda D + K,\ \lambda \in \mathbb{C},$$

где D и K — эрмитовы матрицы размера $n \times n$, может быть представлен в виде произведения линейных множителей:

$$L(\lambda) = (\lambda I - S)(\lambda I - A),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

где A и S — некоторые матрицы размера $n \times n$.

В [2] была рассмотрена обратная задача вида: по заданной матрице A размера $n \times n$ найти все матрицы S размера $n \times n$, для которых коэффициенты $S + A$ и SA пучка

$$L(\lambda) = (\lambda I - S)(\lambda I - A),\ \lambda \in \mathbb{C} \tag{1}$$

являются эрмитовыми матрицами.

Авторами работы [2] найден вид искомых матриц, а так же, конструктивно описаны эти матрицы в случае, если все собственные значения матрицы A различные и простые (то есть, все собственные векторы матрицы A не имеют присоединенных). Предложенный в [2] метод без каких-либо изменений переносится на случай, если по заданной матрице S в разложении (1) требуется описать все матрицы A, для которых матрицы $S + A$ и SA являются эрмитовыми.

Нами предложен метод, отличный от изложенного в [2], который позволил конструктивно построить все решения рассмотренной задачи в случае произвольной матрицы A. Так же, как и в [2], наш метод одинаково применим как в случае заданного левого множителя в разложения (1), так и в случае заданного правого множителя. Мы будем рассматривать задачу в случае, если задан левый множитель в разложении квадратичного пучка на линейные множители.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для заданной матрицы A размера $n \times n$ найти матрицу X размера $n \times n$ такую, что коэффициенты AX и $A + X$ пучка $L(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$ являются эрмитовыми:

$$AX = X^* A^*,\ A + X = A^* + X^*. \tag{2}$$

Во-первых, заметим, что, не ограничивая общности, можно считать, что матрица A является обратимой. Действительно, предположим, что задача решена для любой обратимой матрицы A и обозначим через X ее произвольное решение. Очевидно, что множество решений X не пусто, так как оно содержит, по-крайней мере, одну матрицу, а именно, $X = A^*$.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу для необратимой матрицы A. В этом случае найдется $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $A + \lambda_0 I$ является обратимой. Обозначим через X_0 произвольную матрицу, для которой выполнены равенства

$$A + \lambda_0 I + X_0 = (A + \lambda_0 I)^* + X_0^*, (A + \lambda_0 I)X_0 = X_0^*(A + \lambda_0 I)^*. \tag{3}$$

Согласно сделанному выше замечанию, по-крайней мере, одна такая матрица X_0 существует.

Рассмотрим соответствующий матрицам $A+\lambda_0 I$ и X_0 пучок:

$$L(\lambda) = (\lambda I - (\lambda_0 I + A))(\lambda I - X_0) = ((\lambda-\lambda_0)I - A)((\lambda-\lambda_0)I - (X_0-\lambda_0 I)) =$$

$$= (\lambda-\lambda_0)^2 I - (\lambda-\lambda_0)(A + X_0 - \lambda_0 I) + A(X_0 - \lambda_0 I).$$

Сделав замену $\mu = \lambda - \lambda_0$, получим пучок

$$M(\mu) = \mu^2 I - \mu(A + X_0 - \lambda_0 I) + A(X_0 - \lambda_0 I),\ \mu \in \mathbb{C}.$$

Покажем, что коэффициенты пучка $M(\mu)$ являются эрмитовыми матрицами. Для этого мы воспользуемся равенствами (3) и условием $\lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$A + X_0 - \lambda_0 I = A + \lambda_0 I + X_0 - 2\lambda_0 I = (A+\lambda_0 I + X_0)^* - 2\lambda_0 I = (A + X_0 - \lambda_0 I)^*,$$

$$A(X-\lambda_0 I) = (A+\lambda_0 I - \lambda_0 I)(X_0 - \lambda_0 I) = (A+\lambda_0 I)X_0 - \lambda_0(A+\lambda_0 I + X_0) + \lambda_0^2 I =$$

$$= X_0^*(A+\lambda_0 I)^* - \lambda_0(A+\lambda_0 I + X)^* + \lambda_0^2 I = (X_0-\lambda_0 I)^* A^* = (A(X_0-\lambda_0 I))^*.$$

Таким образом, любое решение, построенное по заданной необратимой матрице A, имеет вид $X = X_0 - \lambda_0 I$, где X_0 – некоторое решение, построенное по матрице $A + \lambda_0 I$. Здесь λ_0 – произвольное вещественное число, для которого матрица $A+\lambda_0 I$ обратима.

Теперь всюду далее мы считаем, что матрица A является обратимой. Обозначим J_A – жорданову форму матрицы A. Тогда для некоторой обратимой матрицы U выполняется равенство $A = UJ_AU^{-1}$ и первое из равенств (2) можно переписать в виде

$$J_A U^{-1} X U^{*-1} = U^{-1} X^* U^{*-1} J_A^*.$$

Обозначив $X_0 = U^{-1}XU^{*-1}$, получим уравнение

$$J_A X_0 = X_0^* J_A^*. \tag{4}$$

относительно матрицы X_0. Таким образом, любое решение уравнения $AX = X^*A^*$ имеет вид $X = UX_0U^*$, где X_0 – некоторое решение уравнения (4).

Запишем матрицу J_A в блочно-диагональном виде

$$J_A = \operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \ldots, J_{n_m}(\lambda_m)\}, \tag{5}$$

где $J_{n_i}(\lambda_i)$ – жорданов блок размера $n_i \times n_i$, соответствующий собственному значению λ_i, $i = 1,2,\ldots,m$ и $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ – все собственные значения матрицы A, причем среди чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ могут быть одинаковые.

Построим матрицу

$$S = \operatorname{diag}\{S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_k}\},$$

$$S_{n_i} = J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I_{n_i},\ I_{n_i} - \text{ единичная матрица размера } n_i \times n_i, i = 1,2,\ldots,m.$$

Рассмотрим уравнение

$$(J_A - S)Y_0 = Y_0^*(J_A - S)^*. \tag{6}$$

Так как матрица J_A обратима, то мы можем уравнение (6) переписать в эквивалентном виде

$$J_A(I - J_A^{-1}S)Y_0 = ((I - J_A^{-1}S)Y_0)^* J_A^*. \tag{7}$$

С помощью равенства (7) не сложно установить связь между решениями уравнений (4) и (6).

Лемма 1. 1) *Если матрица* Y_0 *является решением уравнения* (6)*, то матрица* $X_0 = (I - J_A^{-1}S)Y_0$ *является решением уравнения* (4)*.*

2) *Если матрица* X_0 *является решением уравнения* (4)*, то матрица* $Y_0 = (I - J_A^{-1}S)^{-1}X_0$ *является решением уравнения* (6)*.*

Доказательство. 1) Пусть Y_0 – произвольное решение уравнения (6). Тогда для матрицы Y_0 справедливо равенство (7). Отсюда следует, что матрица $X_0 = (I - J_A^{-1}S)Y_0$ является решением уравнения (4).

2) Заметим предварительно, что из равенства $J_A(I - J_A^{-1}S) = J_A - S$ и обратимости матриц J_A и $J_A - S$, следует обратимость матрицы $I - J_A^{-1}S$ и равенство $(I - J_A^{-1}S)^{-1} = (J_A - S)^{-1}J_A$. Возьмем теперь произвольное решение X_0 уравнения (4). Тогда матрица $Y_0 = (I - J_A^{-1}S)^{-1}X_0$ является решением уравнения (7), а значит, и решением уравнения (6). □

Теорема 2. *Пусть дана произвольная обратимая матрица* $A = UJ_AU^{-1}$*, имеющая жорданову форму* J_A *вида* (5)*. Тогда каждое решение* X *уравнения* $AX = X^*A^*$ *имеет вид:*

$$X = UX_0U^*,$$

$$X_0 = \mathrm{diag}\{\lambda_1 J_{n_1}^{-1}(\lambda_1),...,\lambda_m J_{n_m}^{-1}(\lambda_m)\} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & ... & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & ... & Y_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ Y_{m1} & Y_{m2} & ... & Y_{mm} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Блоки Y_{kl} *имеют размер* $n_k \times n_l$ *для всех* $k = 1,2,...,m$*,* $l = 1,2,...,m$*. Блоки* $Y_{kk} = (y_{ij}(k))$*,* $i,j = 1,2,...,n_k$*, определяются соотношениями:*

$y_{ij}(k)$ *– произвольные комплексные числа для* $i < j$*,*

$y_{ii}(k) = \alpha_i(k)\,\overline{\lambda_k}$ *для некоторого* $\alpha_i(k) \in \mathbb{R}$*,*

$y_{ij}(k) = \dfrac{\overline{\lambda_k}}{\lambda_k}\,\overline{y_{ij}(k)}$ *для* $i > j$*; блоки* Y_{kl} *для* $k < l$ *определяются произвольным образом; блоки* Y_{kl} *для* $k > l$ *определяются равенством* $Y_{kl} = \dfrac{\overline{\lambda_l}}{\lambda_k}\,Y_{lk}^*$*.*

Доказательство. Пусть матрица Y_0 является решением уравнения (6). Запишем матрицу Y_0 в блочном виде, соответствующем разложению (5):

$$Y_0 = (Y_{kl}),\ Y_{kl} - \text{ блок размера } n_k \times n_l,\ k = 1,2,...,m, l = 1,2,...,m.$$

Тогда матрица Y_0^* может быть представлена в виде:

$$Y_0^* = (\mathcal{Y}_{kl}),\ \mathcal{Y}_{kl} = Y_{lk}^* - \text{ блок размера } n_l \times n_k,\ k = 1,2,...,m, l = 1,2,...,m.$$

Обозначим $V := (J_A - S)Y_0 = Y_0^*(J_A - S)^*$ и запишем матрицу V в блочном виде (V_{kl}), $k = 1,2,...,m$, $l = 1,2,...,m$. В матрицах $J_A - S$ и $(J_A - S)^*$ все внедиагональные блоки являются нулевыми. Поэтому в соответствии с блочными представлениями матриц Y_0 и Y_0^* и правилом умножения блочных матриц блоки V_{kl} определяются равенствами:

$$V_{kl} = (J_{n_k}(\lambda_k) - S_{n_k})Y_{kl} = \mathcal{Y}_{kl}(J_{n_l}(\lambda_l) - S_{n_l})^*, k = 1,2,...,m, l = 1,2,...,m.$$

Используя связь между выбранными блочными представлениями матриц Y_0 и Y_0^* и равенства $J_{n_i}(\lambda_i) - S_{n_i} = \lambda_i I_{n_i}$ $(i = 1,2,...,m)$, получаем:

$$\lambda_k Y_{kl} = \overline{\lambda_l}\, Y_{lk}^*, k = 1,2,...,m, l = 1,2,...,m. \tag{9}$$

Это равенство показывает, что блоки Y_{kl} в случае $k \neq l$ имеют указанный в теореме вид.

Определим диагональные блоки Y_{kk}, $k = 1,2,...,m$.
Для каждого $k = 1,2,...,m$ запишем

$$Y_{kk} = (y_{ij}(k)), i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k.$$

Тогда из равенств (9) при $k = l$ следует, что

$$\lambda_k\, y_{ij}(k) = \overline{\lambda_k}\,\overline{y_{ji}(k)}, i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k. \tag{10}$$

В частности, для $i = j$ из (10) получаем равенства

$$\lambda_k\, y_{ii}(k) = \overline{\lambda_k}\,\overline{y_{ii}(k)}, i = 1,2,...,n_k.$$

Значит, $\lambda_k\, y_{ii}(k) \in \mathbb{R}$. Следовательно, для каждого $i = 1,2,...,n_k$ найдется $\alpha_i(k) \in \mathbb{R}$ такое, что $y_{ii}(k) = \alpha_i(k)\overline{\lambda_k}$.

Таким образом, для каждого $k = 1,2,...,m$ блок $Y_{kk} = (y_{ij}(k))$ имеет указанный в теореме вид.

Определив все блоки матрицы Y_0, мы можем, используя лемму 1, выписать произвольное решение X_0 уравнения $J_A X_0 = X_0^* J_A^*$:

$$X_0 = (I - J_A^{-1} S) Y_0, \tag{11}$$

где Y_0 – произвольное решение уравнения $(J_A - S)Y_0 = Y_0^*(J_A - S)^*$.

Получим теперь представление матрицы X_0 в блочно-диагональном виде. Для этого сначала перепишем равенство $J_A(I - J_A^{-1}S) = J_A - S$ в виде

$$\mathrm{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1),...,J_{n_m}(\lambda_m)\} \cdot \mathrm{diag}\{I_{n_1} - J_{n_1}^{-1}(\lambda_1)S_{n_1},..., I_{n_m} - J_{n_m}^{-1}(\lambda_m)S_{n_m}\} =$$

$$= \mathrm{diag}\{\lambda_1 I_{n_1},...,\lambda_m I_{n_m}\}.$$

Отсюда следует, что

$$I - J_A^{-1} S = \mathrm{diag}\{\lambda_1 J_{n_1}^{-1}(\lambda_1),\lambda_2 J_{n_2}^{-1}(\lambda_2),...,\lambda_m J_{n_m}^{-1}(\lambda_m)\}. \tag{12}$$

Поэтому

$$X_0 = \mathrm{diag}\{\lambda_1 J_{n_1}^{-1}(\lambda_1),\lambda_2 J_{n_2}^{-1}(\lambda_2),...,\lambda_m J_{n_m}^{-1}(\lambda_m)\}Y_0,$$

то есть, X_0 имеет указанный в условии теоремы вид.

Наконец, из равенства $X_0 = U^{-1} X U^{*-1}$ находим, что любое решение X уравнения $AX = X^* A^*$ имеет вид

$$X = U X_0 U^*,$$

где матрица X_0 определена равенством (8). □

Перейдем к решению системы (2). Основной результат работы содержится в следующей теореме 5.

При определении общего вида решения системы (2) важную роль будут играть ганкелевы и теплицевы матрицы, определение которых мы здесь приведем.

Определение 3. Матрица (a_{ij}), $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,n$ называется ганкелевой, если равенства $a_{ij} = a_{i-1,j+1}$ выполнены для всех $i = 2,3,...,n$, $j = 1,2,...,n-1$.

Определение 4. Матрица (a_{ij}), $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,n$ называется теплицевой, если равенства $a_{ij} = a_{i-1,j-1}$ выполнены для всех $i = 2,3,...,n$, $j = 2,3,...,n$.

Теорема 5. *Пусть дана произвольная обратимая матрица $A = UJ_AU^{-1}$, имеющая жорданову форму J_A вида* (5).

Тогда каждое решение X системы уравнений

$$AX = X^*A^*,\ A + X = A^* + X^*$$

имеет вид:

$$X = A^* + UWU^*,$$

$$W = (W_{kl}), k = 1,2,...,m, l = 1,2,...,m.$$

Блоки W_{kl} имеют размеры $n_k \times n_l$ для всех $k = 1,2,...,m$, $l = 1,2,...,m$.

Если $\lambda_k \notin \mathbb{R}$, то $W_{kk} = 0$.

Если $\lambda_k \in \mathbb{R}$, то блок W_{kk} является произвольной вещественной верхней треугольной ганкелевой матрицей.

Если $\lambda_k \neq \overline{\lambda}_l$ и $k \neq l$, то $W_{lk} = W_{kl} = 0$.

Если $\lambda_k = \overline{\lambda}_l$ и $k < l$, то блок W_{kl} является произвольной верхней треугольной ганкелевой матрицей с первым столбцом вида

$$(a_1\ a_2\ \ldots\ a_s\ 0\ \ldots\ 0)^T,\ a_0,a_1,a_2,...,a_s \in \mathbb{C}, s = \min\{n_k,n_l\};$$

блок W_{lk} определяется равенством $W_{lk} = W^*_{kl}$.

Доказательство. Пусть X – произвольное решение системы (2). Тогда по теореме 2 найдется матрица X_0, для которой $X = UX_0U^*$. Согласно лемме 1 это равенство принимает вид $X = U(I - J_A^{-1}S)Y_0U^*$, где Y_0 – некоторое решение уравнения (6). Обозначив $S_0 = (I - J_A^{-1}S)$, получим равенство $X = US_0Y_0U^*$. Теперь равенство $A + X = A^* + X^*$ можем записать в виде

$$U(S_0Y_0 - Y_0^*S_0^*)U^* = A^* - A,$$

$$Y_0S_0^{*-1} - S_0^{-1}Y_0^* = S_0^{-1}U^{-1}(A^* - A)U^{*-1}S_0^{*-1}. \tag{13}$$

Отметим, что система (2) имеет, по-крайней мере, одно решение $X = A^*$. Значит, матрица A^* представима в виде $A^* = US_0\widetilde{Y}_0U^*$, где $\widetilde{Y}_0$ – некоторое решение уравнения (6). Следовательно, равенство (13) остается в силе, если в нем заменить Y_0 на $\widetilde{Y}_0$. Таким образом, получаем равенство

$$Y_0S_0^{*-1} - S_0^{-1}Y_0^* = \widetilde{Y}_0S_0^{*-1} - S_0^{-1}\widetilde{Y}_0^*,$$

которое можно переписать в эквивалентном виде

$$(Y_0 - \widetilde{Y}_0)S_0^{*-1} = S_0^{-1}(Y_0 - \widetilde{Y}_0)^*. \tag{14}$$

Матрицы Y_0 и $\widetilde{Y}_0$ являются решениями уравнения (6) и, значит, имеют одинаковую блочную структуру, описанную в теореме 2. Обозначим $Z = Y_0 - \widetilde{Y}_0$. С учетом равенства (12) уравнение (14) можно записать в виде

$$Z \cdot \operatorname{diag}^*\{\lambda_1^{-1}J_{n_1}(\lambda_1),\lambda_2^{-1}J_{n_2}(\lambda_2),...,\lambda_m^{-1}J_{n_m}(\lambda_m)\} = \\ = \operatorname{diag}\{\lambda_1^{-1}J_{n_1}(\lambda_1),\lambda_2^{-1}J_{n_2}(\lambda_2),...,\lambda_m^{-1}J_{n_m}(\lambda_m)\} \cdot Z^*. \tag{15}$$

Запишем Z в блочном виде $Z = (Z_{kl})$, $k = 1,2,...,m$, $l = 1,2,...,m$, соответствующем блочным видам матриц Y_0 и $\widetilde{Y}_0$. Тогда

$$Z^* = (\mathcal{Z}_{kl}), \mathcal{Z}_{kl} = Z^*_{lk}, k = 1,2,...,m, l = 1,2,...,m. \tag{16}$$

Теперь равенство (15) распадается на m^2 равенств:

$$\frac{1}{\overline{\lambda}_l} Z_{kl} J^*_{n_l}(\lambda_l) = \frac{1}{\lambda_k} J_{n_k}(\lambda_k)\mathcal{Z}_{kl},\ k = 1,2,...,m, l = 1,2,...,m.$$

Учитывая (16), получаем уравнения для нахождения блоков Z_{kl}:

$$\frac{1}{\overline{\lambda}_l} Z_{kl} J^*_{n_l}(\lambda_l) = \frac{1}{\lambda_k} J_{n_k}(\lambda_k) Z^*_{lk},\ k = 1,2,...,m, l = 1,2,...,m. \tag{17}$$

1) Определим диагональные блоки Z_{kk}, $k = 1,2,...,m$. Для начала обозначим

$$Z_{kk} = (z_{ij}(k)), i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k;$$

$$Z^*_{kk} = (w_{ij}(k)),\ \text{где}\ w_{ij}(k) = \overline{z_{ji}(k)}, i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k. \tag{18}$$

Ниже для сокращения записи мы опускаем индекс k у неизвестных z_{ij} и w_{ij}.

Приравняв элементы, стоящие в i-той строке и j-том столбце в произведениях равенства (17) в случае $k = l$, получим систему уравнений:

$$\frac{1}{\overline{\lambda}_k}(\overline{\lambda}_k z_{ij} + z_{i,j+1}) = \frac{1}{\lambda_k}(\lambda_k w_{ij} + w_{i+1,j}),$$

$$z_{i,n_k+1} = w_{n_k+1,j} = 0, i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k.$$

Отсюда и из (18), получаем уравнения

$$\begin{gathered}\frac{1}{\overline{\lambda}_k}(\overline{\lambda}_k z_{ij} + z_{i,j+1}) = \frac{1}{\lambda_k}(\lambda_k \overline{z}_{ji} + \overline{z}_{j,i+1}),\\ z_{i,n_k+1} = 0, i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k.\end{gathered} \tag{19}$$

Так как матрица Z является решением уравнения (6), то элементы ее блока Z_{kk} удовлетворяют условиям (10). Поэтому систему уравнений (19) можно записать в виде:

$$z_{ij} + \frac{1}{\overline{\lambda}_k} z_{i,j+1} = \frac{\lambda_k}{\overline{\lambda}_k} z_{ij} + \frac{1}{\overline{\lambda}_k} z_{i+1,j},$$

$$z_{i,n_k+1} = z_{n_k+1,j} = 0, i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k.$$

Окончательно получаем

$$\begin{gathered}\Big(1 - \frac{\lambda_k}{\overline{\lambda}_k}\Big) z_{ij} + \frac{1}{\overline{\lambda}_k} z_{i,j+1} - \frac{1}{\overline{\lambda}_k} z_{i+1,j} = 0,\\ z_{i,n_k+1} = z_{n_k+1,j} = 0, i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k.\end{gathered} \tag{20}$$

При записи уравнений (20) в систему будем придерживаться следующего правила:

а) уравнения выписываются в порядке возрастания индекса i, если два уравнения соответствуют одному индексу i, то первым выписывается уравнение с меньшим индексом j;

б) в каждом уравнении неизвестные выписываются в порядке возрастания индекса i, если два неизвестных имеют одинаковый индекс i, то первым выписывается неизвестное с меньшим индексом j.

В этом случае матрица системы уравнений (20) имеет верхний треугольный вид и на ее главной диагонали стоят числа $1 - \dfrac{\lambda_k}{\overline{\lambda}_k}$.

Это означает, что в случае $\lambda_k \neq \overline{\lambda}_k$ система уравнений (20) имеет единственное решение $z_{ij} = 0$ для всех $i,j = 1,2,...,n_k$.

Если $\lambda_k = \overline{\lambda}_k$, то уравнения (20) принимают вид:

$$z_{i,j+1} - z_{i+1,j} = 0,$$
$$z_{i,n_k+1} = z_{n_k+1,j} = 0, i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k.$$

Полученные равенства означают, что матрица Z_{kk} является ганкелевой и все элементы под ее побочной диагональю равны нулю. Как было отмечено выше, элементы матрицы Z_{kk} удовлетворяют условиям (10). Следовательно, блок Z_{kk} в случае $\lambda_k = \overline{\lambda}_k$ является вещественной верхней треугольной ганкелевой матрицей.

2) Определим блоки Z_{kl}, $k,l = 1,2,...,m$ в случае $k \neq l$. Обозначим

$$Z_{kl} = (z_{ij}(k,l)), i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_l;$$

$$Z^*_{kl} = (w_{ij}(k,l)), \text{ где } w_{ij}(k,l) = \overline{z_{ji}(k,l)}, i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_l.$$

Ниже для сокращения записи мы опускаем индексы k и l у неизвестных z_{ij} и w_{ij}.

Приравняв элементы, стоящие в i-той строке и j-том столбце в произведениях равенства (17) в случае $k \neq l$, получим систему уравнений:

$$\frac{1}{\overline{\lambda}_l}(\overline{\lambda}_l z_{ij} + z_{i,j+1}) = \frac{1}{\lambda_k}(\lambda_k w_{ij} + w_{i+1,j}), i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_l;$$

$$z_{i,n_l+1} = w_{n_k+1,j} = 0.$$

Рассуждая далее так же как и в пункте 1), записанные выше уравнения приведем к виду:

$$\begin{gathered}\Big(1 - \frac{\lambda_k}{\overline{\lambda}_l}\Big) z_{ij} + \frac{1}{\overline{\lambda}_l} z_{i,j+1} - \frac{1}{\overline{\lambda}_l} z_{i+1,j} = 0,\\ z_{i,n_l+1} = z_{n_k+1,j} = 0, i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k.\end{gathered} \tag{21}$$

В случае $\lambda_k \neq \overline{\lambda}_l$ система уравнений (21) имеет единственное решение: $z_{ij} = 0$ для всех $i = 1,2,...,n_k$, $j = 1,2,...,n_l$.

Если $\lambda_k = \overline{\lambda}_l$, то уравнения (21) принимают вид:

$$\begin{gathered}z_{i,j+1} - z_{i+1,j} = 0,\\ z_{i,n_l+1} = z_{n_k+1,j} = 0, i = 1,2,...,n_k, j = 1,2,...,n_k.\end{gathered} \tag{22}$$

Равенства (22) означают, что матрица Z_{kl} в случае $k \neq l$ описывается следующим образом:

- главный минор Z'_{kl} размера $\min\{n_k, n_l\} \times \min\{n_k, n_l\}$ является ганкелевой матрицей у которой все элементы, стоящие под побочной диагональю равны нулю;

- все элементы матрицы Z_{kl} вне минора Z'_{kl} равны нулю.

Далее из теоремы 2 вытекает, что если блоки Z_{kl} определены указанным выше способом для всех $k < l$, то блоки Z_{kl} для $k > l$ определяются равенствами $Z_{kl} = \dfrac{\overline{\lambda}_l}{\lambda_k} Z^*_{lk}$.

Используя равенства $X = U(I - J_A^{-1}S)Y_0U^*$, $A^* = U(I - J_A^{-1}S)\widetilde{Y}_0U^*$, $Z = Y_0 - \widetilde{Y}_0$ и равенство (12), получаем вид произвольного решения X системы (2):

$$X = U(I - J_A^{-1}S)Y_0U^* = U(I - J_A^{-1}S)(\widetilde{Y}_0 + Z)U^* = \tag{23}$$

$$= A^* + U(I - J_A^{-1}S)ZU^* = A^* + U\mathrm{diag}\{\lambda_1 J_{n_1}^{-1}(\lambda_1),...,\lambda_m J_{n_m}^{-1}(\lambda_m)\}ZU^* =$$

$$= A^* + U \begin{pmatrix} \lambda_1 J_{n_1}^{-1}(\lambda_1) Z_{11} & \lambda_1 J_{n_1}^{-1}(\lambda_1) Z_{12} & \ldots & \lambda_1 J_{n_1}^{-1}(\lambda_1) Z_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_m J_{n_m}^{-1}(\lambda_m) Z_{m1} & \lambda_m J_{n_m}^{-1}(\lambda_m) Z_{m2} & \ldots & \lambda_m J_{n_m}^{-1}(\lambda_m) Z_{mm} \end{pmatrix} U^*.$$

Теперь остается описать блоки $W_{kl} = \lambda_k J_{n_k}^{-1}(\lambda_k) Z_{kl}$ в зависимости от соответствующих собственных значений λ_k и λ_l, $k = 1,2,...,m$, $l = 1,2,...,m$.

Во-первых отметим, что $\lambda_k J_{n_k}^{-1}$ является верхней треугольной теплицевой матрицей, первая строка которой имеет вид

$$1 \quad -\lambda_k^{-1} \;\; \lambda_k^{-2} \;\; \ldots \;\; (-1)^{n_k-1} \lambda_k^{-(n_k-1)}.$$

Если $\lambda_k \notin \mathbb{R}$, то по теореме 2 матрица Z_{kk} является нулевой. Поэтому $W_{kk} = \lambda_k J_{n_k}^{-1}(\lambda_k) Z_{kk}$ – нулевая матрица, если $\lambda_k \notin \mathbb{R}$.

Если $\lambda_k \in \mathbb{R}$, то матрица Z_{kk} является вещественной ганкелевой и все элементы под ее побочной диагональю равны нулю. Значит, первый столбец матрицы Z_{kk} имеет вид

$$(a_0 \;\; a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_{n_k-1})^T,\ a_0,a_1,a_2,...,a_{n_k-1} \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, блок $W_{kk} = \lambda_k J_{n_k}^{-1}(\lambda_k) Z_{kk}$ является вещественной верхней треугольной ганкелевой матрицей с первым столбцом вида

$$\Big(\sum_{i=0}^{n_k-1} (-\lambda_k)^{-i} a_i \;\; \sum_{i=0}^{n_k-2} (-\lambda_k)^{-(i+1)} a_i \;\; \sum_{i=0}^{n_k-3} (-\lambda_k)^{-(i+2)} a_i \;\; \ldots \;\; (-\lambda_k)^{-(n_k-1)} a_0 \Big)^T.$$

Так как a_0, $a_1,...,a_{n_k-1}$ – произвольные вещественные параметры, то блок $W_{kk} = \lambda_k J_{n_k}^{-1}(\lambda_k) Z_{kk}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ оказывается произвольной вещественной верхней треугольной ганкелевой матрицей. В частности, это означает, что матрица $W_{kk} = \lambda_k J_{n_k}^{-1}(\lambda_k) Z_{kk}$ является эрмитовой.

Определим внедиагональные блоки $W_{kl} = \lambda_k J_{n_k}^{-1}(\lambda_k) Z_{kl}$, $k \neq l$.

Если $\lambda_k \neq \overline{\lambda_l}$, то блоки Z_{kl} и Z_{lk}, $k \neq l$ являются нулевыми матрицами. Значит, блоки W_{kl} и W_{lk} так же являются нулевыми, если $\lambda_k \neq \overline{\lambda_l}$.

Пусть $\lambda_k = \overline{\lambda_l}$. Положим для определенности, что $k < l$. Блок Z_{kl} является ганкелевой матрицей с первым столбцом размера n_k и вида

$$(a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_s \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0)^T,\ a_1,a_2,...,a_s \in \mathbb{C},\ s = \min\{n_k,n_l\}. \tag{24}$$

Так же как и в случае диагональных блоков Z_{kk} доказывается, что блок $W_{kl} = \lambda_k J_{n_k}^{-1}(\lambda_k) Z_{kl}$ является верхней треугольной ганкелевой матрицей размера $n_k \times n_l$ и ее первый столбец имеет вид (24).

Так как матрица Z является решением уравнения (6), то по лемме 1 матрица $(I - J_A^{-1} S)Z$ вляется решением уравнения (4). Поэтому по теореме 2 блок $W_{lk} = \lambda_l J_{n_l}^{-1}(\lambda_l) Z_{lk}$, симметричный блоку $W_{kl} = \lambda_k J_{n_k}^{-1}(\lambda_k) Z_{kl}$ относительно главной диагонали, определяется равенством

$$W_{lk} = \lambda_l J_{n_l}^{-1}(\lambda_l) Z_{lk} = \frac{\overline{\lambda}_k}{\lambda_l} (\lambda_k J_{n_k}^{-1}(\lambda_k) Z_{kl})^* = (\lambda_k J_{n_k}^{-1}(\lambda_k) Z_{kl})^* = W_{kl}^*.$$

Таким образом, теорема доказана. □

Следствие 6. *Пусть A – произвольная невырожденная матрица. Тогда система уравнений*

$$AX = X^* A^*,\ A + X = A^* + X^*$$

имеет единственное решение $X = A^*$ в том и только в том случае, если спектры матриц A и A^* не пересекаются.

Доказательство. Очевидно, что существование единственного решения X задачи (2) равносильно тому, что параметры матрицы W в равенстве $X = A^* + UWU^*$ теоремы 5 определяются единственным образом по заданной матрице A. По теореме 5 это равносильно тому, что спектр матрицы A лежит в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и не содержит ни одной пары собственных значений λ_k и λ_l, для которых $\lambda_k = \overline{\lambda_l}$, $k = 1,2,...,m$, $l = 1,2,...,m$, $k \neq l$. Последнее в свою очередь равносильно условию, приведенному в формулировке следствия. В этом случае из равенства $X = A^* + UWU^*$ следует, что единственным решением является $X = A^*$. □

ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРОСТРАНСТВАМ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Пусть W является обратимой эрмитовой матрицей размера $n \times n$. Тогда на пространстве $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ мы можем задать индефинитное скалярное произведение $[\cdot,\cdot] = (W\cdot,\cdot)$. Например, в [4] было дано описание всех матриц A, которые являются самосопряженными относительно произведения $[\cdot,\cdot]$. Здесь мы рассмотрим в некотором смысле обратную задачу. А именно, по заданной матрице A размера $n \times n$ найдем все обратимые эрмитовы матрицы W такого же размера, для которых A является самосопряженной относительно $[\cdot,\cdot] = (W\cdot,\cdot)$. Очевидно, эта задача эквивалентна нахождению всех решений A уравнения $WA = A^*W$.

Теорема 7. *Пусть A является произвольной матрицей размера $n \times n$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *A является самосопряженной относительно скалярного произведения $[\cdot,\cdot] = (W_0\cdot,\cdot)$, где $W_0 = W_0^*$;*

2) *выполнено равенство $W_0 = X - A$, где X является решением системы*

$$A^*X = X^*A,\ A^* + X = A + X^* \tag{25}$$

Доказательство. Пусть X является решением системы (25). Тогда по теореме 5 получаем равенства $X = A + W_0$ и $W_0 = W_0^*$. Теперь из первого равенства из (25) следует, что $W_0A = A^*W_0$.

Если выполнено равенство $W_0A = A^*W_0$, то непосредственная подстановка показывает, что $X = A + W_0$ является решением системы (25). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chu, M. T. Inverse eigenvalue problems / M. T. Chu // SIAM Rev. — 1998. — V. 40. — P. 1–39.

2. Lancaster, P. Hermitian Quadratic Matrix Polynomials: Solvents and Inverse Problem / P. Lancaster, F. Tisseur // MIMS EPrint. — 2010. — № 10. — P. 1–10.

3. Gohberg, I. Matrix polinomials / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. — Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. — 592 p.

4. Gohberg, I. Matrices and indefinite scalar product / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. — Basel–Boston–Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1983. — 374 p.

REFERENCES

1. Chu M.T. Inverse eigenvalue problems. SIAM Rev., 1998, vol. 40, pp. 1–39.

2. Lancaster P., Tisseur F. Hermitian Quadratic Matrix Polynomials: Solvents and Inverse Problem. MIMS EPrint, 2010, no. 10, pp. 1–10.

3. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrix polinomials. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009, 592 p.

4. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrices and indefinite scalar product. Basel–Boston–Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1983, 374 p.

Барсуков Андрей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: a.barsoukov@mail.ru
Тел.: +7(473)271–53–62

Barsukov Andrei Ivanovich, candidate of physico-mathematical sciences, docent, chair of higher mathematics of Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh, Russian Federtion
E-mail: a.barsoukov@mail.ru
Tel.: +7(473)271–53–62

Домнич Анастасия Александровна, аспирант кафедры теории функций и геометрии Воронежсского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: andomnich@inbox.ru
Тел.: +7(473)220–86-65

Domnich Anastasiya Aleksandrovna, PhD student, chair of the theory of functions and geometry of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federtion
E-mail: andomnich@inbox.ru
Tel.: +7(473)220–86-65