УДК 539.2

ОСОБЕННОСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ВБЛИЗИ ДЕФЕКТА С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

С. Е. Савотченко

Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова

Поступила в редакцию 30.09.2016 г.

Аннотация. В работе рассмотрена проблема решения нелинейного уравнения Шредингера с модифицированным дельта-функционным потенциалом. Такой потенциал используется для моделирования взаимодействия возбуждения с точечным дефектом в нелинейной среде при учете дальнодействующих сил межатомного взаимодействия. Показано, что задача сводится к решению нелинейного уравнения Шредингера граничными условиями нового вида. Изучены локализованные состояния в нелинейной среде вблизи дефекта, обладающего внутренней структурой. Показано, что возможно существование нелинейных локализованных возбуждений нескольких типов. Структура и форма локализованных состояний определяется знаком ангармонизма взаимодействия в среде и интенсивностью взаимодействия возбуждений с дефектом. Проанализированы низкоэнергетические нелинейные локализованные возбуждения и определены условия их существования.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, точечный дефект, солитон, локализованные возбуждения.

PECULIARITIES OF LOCALIZATION OF NONLINEAR EXCITATIONS NEAR THE DEFECT WITH AN INTERNAL STRUCTURE

S. E. Savotchenko

Abstract. The problem of the solving of the nonlinear Schrödinger equation with a modified delta-function potential is considered. This potential is used to simulate the interaction of excitation with a point defect in a nonlinear medium with taking into account the long-range forces of interatomic interaction. It is shown that the problem reduces to the solution of the nonlinear Schrödinger equation boundary conditions of a new kind. The localized states in a nonlinear medium near the defect, which has an internal structure are studied. It has been shown that it is possible the existence of nonlinear localized excitations of several types. The structure and form of localized states is determined by the sign of the anharmonicity of the interaction in the environment and the intensity of the interaction of excitations defective. The non-linear low-energy excitations of localized and identified conditions of existence are analyzed.

Keywords: Nonlinear Schrödinger equation, point defect, soliton, localized excitations.

Изучение локализации возбуждений вблизи границ раздела нелинейных сред началось достаточно давно, причем не только теоретически, но и экспериментально. В частности, явления локализации электромагнитных волн вблизи границ раздела нелинейных сред рассматривались в [1, 2]. Было показано, что возможно существование нелинейных локализованных возбуждений с несимметричным профилем, отличающихся от свободно распространяющихся солитонов, и называемых нелинейными поверхностными волнами. Характер взаимодействия таких волн с границей раздела сред можно назвать пассивным, поскольку в предложенных в данных работах моделях не вводился параметр, характеризующий интенсивность взаимодействия волны с границей, а граничные условия сводились к требованиям непрерывности искомого решения и его производной на границе.

Во многих ситуациях возникает необходимость изучения как раз именно тех особенностей локализации возбуждений, причем как линейных, так и нелинейных, которые обусловлены характером взаимодействия этих возбуждений с дефектами. Как правило, для теоретического описания таких явлений привлекались модели, в которых дефект описывался короткодействующим потенциалом [3,4]. Например, в [5] предлагалось называть интерфейсом границу раздела сред, которая существенным образом взаимодействует с волной и обладает характеризующим такое взаимодействие параметром, а возникающие локализованные возбуждения предлагалось называть интерфейсными волнами. Было показано, что учет активного взаимодействия волны с границей раздела сред приводит к возможности существования нелинейных интерфейсных волн в более широком диапазоне значений параметров среды, чем при пассивном взаимодействии. Также были описаны новые типы нелинейных интерфейсных волн, локализованных вблизи границы раздела сред, обладающих дисперсией и учитывающей взаимодействия возбуждений с границей раздела сред, и сформулированы условия их существования.

Часто при изучении взаимодействия волн с дефектами в одномерных моделях используется короткодействующий потенциал

$$U(x) = 2U_0\delta(x), \tag{1}$$

где δ-функция Дирака, U_0 – интенсивность взаимодействия дефекта с возбуждением, такая, что при $U_0 > 0$ возбуждение отталкивается от дефекта, а при $U_0 < 0$ — притягивается.

Изучалось резонансное рассеяние частиц, имеющих параболический закон дисперсии, на двугорбом потенциале, который можно рассматривать как потенциальный кратер, обладающий квазистационарным уровнем энергии. В одномерном предельном случае при бесконечном увеличении глубины кратер может быть описан выражением, содержащим вторую производную дельта-функции Дирака. Подобная модель может описывать взаимодействие волны с точечным дефектом в среде с пространственной дисперсией при учете дальнодействующих сил межатомного взаимодействия, на основелинейного уравненияШредингера с модифицированным потенциалом:

$$U(x) = 2U_0\delta(x) + V_0\delta''(x), \tag{2}$$

где V_0 — второй параметр дефекта, характеризующий интенсивность взаимодействия возбуждения с дефектом за счет его внутренней структуры.

В [6] была предложена такая модель точечного дефекта, обладающего внутренней структурой, где указано, что потенциал (2) учитывает влияние дефекта посредством не только ближайших соседей в решетке, но и вторых соседей в коротковолновом приближении, то есть при переходе от дискретной модели среды к континуальному описанию. Были рассчитаны коэффициенты прохождения и отражения линейных волн в рамках такой модели, получен спектр квазилокальных состояний и соответствующая добавка к плотности состояний. Показано, что внутренняя структура дефекта приводит к возможности полного прохождения частицы. Установлено, что существуют два уровня энергии, отвечающие локализованным близи дефекта состояниям.

В [7] для линейного уравнения Шредингера с пространственной дисперсией модифицированным потенциалом (2) была получена новая система граничных условий. Показан корректный предельный переход к случаю среды без дисперсии и короткодействующим потенциалом. Установлено, что при наличии точечного дефекта в среде с дисперсией при учете дальнодействующих сил межатомного взаимодействия возможно существование локализованных состояний двух видов симметрии с двумя типами затухания (монотонного – обычные и осциллирующие – обобщенные), а также квазилокальных состояний двух видов симметрии.

Нелинейное уравнение Шредингера широко применятся для построения математических моделей сред с дефектами. В работе [8] приведены несколько примеров подробного получения нелинейного уравнения Шредингера с дельта-функционным потенциалом, применяемых для описания динамики возбуждений различной физической природы. В частности, были рассмотрены три модели, приводящие к нелинейному уравнению Шредингера.

Первая модель описывает динамику вектора намагниченности $\mathbf{M}$ в легкоосном ферромагнетике, состоящем из параллельных слоев, различающихся величиной константы анизотропии, подчиняющегося уравнением Ландау-Лифшица

$$i\frac{\hbar}{2\mu_0}\psi_t' - \alpha M_z\Delta\psi + \alpha\psi\Delta M_z + \beta(z)\psi M_z = 0,$$

где $\psi = M_x + iM_z$, μ_0 – магнетон Бора, α – постоянная обменного взаимодействия, β – константа одноионной анизотропии, считается, что “легкая ось” ферромагнетика лежит на оси z, а чередующиеся магнитные слои расположены ей перпендикулярно. Для описания спиновых волн малой амплитуды в длинноволновом приближении данное уравнение упрощается, и для медленно меняющейся огибающей $u(z,t)$, связанной с ψ соотношением $\psi = 2M_0u(z,t)\exp(-i(kx-\omega t))$, где ω — частота спиновой волны в однородном магнетике с анизотропией $\beta = \beta_0$, M_0 — номинальная намагниченность элементарной ячейки, принимает стандартизованный вид [8]: $iu_t' - u_{zz}'' - 2\left|u\right|^2 u = U(z)u$, где потенциал границ раздела слоев ферромагнетика: $U(z) = -U_0\Sigma\delta(z-2an)$, $U_0 = h\beta_1/\beta_0$, β_1 — анизотропия узкого слоя толщины h, чередующегося с широкими слоями ферромагнетика толщиной $2a-h$ с анизотропией β_0.

В качестве второго примера использования нелинейного уравнения Шредингера можно привести модель динамики сдвиговых волн в кубическом кристалле, разделённом на слои плоскими дефектами, которые распространяются вдоль слоев (вдоль оси Ox), однородных в направлении оси Oy, где смещение в резонансном приближении представимо в виде: $u = A(z,t)\cos(kx\text{-}\omega t) + B(z,t)\sin(kx\text{-}\omega t)$, где k – волновое число, ω — частота линейных волн, $A(z,t)$ и $B(z,t)$ — медленно меняющиеся амплитуды огибающей. Подстановка такого смещения в уравнение теории упругости в данной модели и геометрии (см. [8]) приводит к нелинейному уравнению Шредингера для комплексной амплитуды $U = A+iB$, которое, в свою очередь, приводится к стандартизованному виду заменой $w = \sqrt{3/2}kU/2$ и единиц времени и координат [8]: $iw_t' + w_{zz}'' + 2\sigma\left|w\right|^2 w = U(z)w$, где $U(z) = -U_0\Sigma\delta(z-2an)$, $U_0 = [(M/m)-1)]h$, M — масса атома в дефектном слое толщины h, m — масса атома в матрице кристалла, $2a$ — расстояние между плоскими дефектами, σ — параметр, характеризующий нелинейность, который в “фокусирующей” среде равен $+1$, в “дефокусирующей” среде равен -1.

В качестве третьего, широко распространенного в солитонной динамике, примера использования нелинейного уравнения Шредингера можно привести модель нелинейной оптической среды с эффектом Керра, содержащей дефектные слои, характеризующиеся показателем преломления, сильно отличающимся от показателя преломления оптической среды других слоев между ними [8,9]. Если считать, что слои перпендикулярны оси Oz, то вектор электрического поля $\mathbf{E}$, направленный вдоль оси Oy, подчиняется уравнению Максвелла: $n^2(z,\mathbf{E})\mathbf{E}''_{tt} = c^2\Delta\mathbf{E}$, где $n(z,\ \mathbf{E})$ – показатель преломления, представимый для среды, для которой характерен эффект Керра, в виде [8]: $n(z,\ \mathbf{E}){=}n_0 + n_1 + \sigma\alpha|E|^2$, n_0 и n_1 — значения показателей преломления широком слое и узком слое световода, σ — параметр, который в “фокусирующей” среде равен $+1$, в “дефокусирующей” среде равен - 1, α — коэффициент нелинейности среды, для которой характерен эффект Керра, введена комплексная функция

$E = E_1 + iE_2$, связанная с напряженностью электрического поля через медленно меняющиеся функции E_1 и E_2 выражением $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y\{E_1(z,t)\cos(kx-\omega t)+E_2(z,t)\sin(kx-\omega t)\}$, описывающим монохроматическую волну с волновым вектором $\mathbf{k}=\mathbf{e}_x k$ и частотой $\omega=ck/n_0$. После замены единиц времени и координаты, для функции $E = E_1 + iE_2$ получается стандартизованное нелинейное уравнение Шредингера: $iE'_t + E''_{zz} + 2\sigma\left|E\right|^2 E = U(z)E$, где $U(z) = -U_0\Sigma\delta(z-2an)$, $U_0=2hn_1/n_0$, h — ширина световода, $2a$ — расстояние между ними.

Таким образом, как было показано в [8], нелинейное уравнение Шредингера может описывать состояния полей различной физической природы: упругого, электрического и магнитного. Поэтому для описания новых эффектов, связанных с локализацией возбуждений рассмотренной физической природы вблизи дефектов, имеет смысл далее рассматривать математическую модель, использующую нелинейное уравнение Шредингера, которому подчиняется функция $\psi(x,\, t)$, выступающая в роли огибающей u комплексного поля компонент вектора намагниченности в легкоосном ферромагнетике, либо комплексной амплитуды w огибающей упругого поля смещения сдвиговой волны в кубическом кристалле с плоским дефектом, либо комплексной функции E из амплитуд огибающей компоненты электрического поля в оптической нелинейной среде. Тогда параметры в уравнении будут иметь соответствующий физических смысл в рамках одной из трех указанных моделей.

Рассмотрим теперь взаимодействие нелинейных возбуждений, локализующихся вблизи дефектом с внутренней структурой на основе нелинейного уравнения Шредингера:

$$i\psi'_t = -\frac{\alpha}{2}\psi''_{xx} - \gamma(x)\left|\psi\right|^2\psi + U(x)\psi, \tag{3}$$

где потенциал описывается выражением (2) и параметры нелинейности по разные стороны от дефекта:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1,\, x < 0; \\ \gamma_2,\, x < 0. \end{cases}$$

В линейной среде без дефекта распространяются свободные волны с квадратичным законом дисперсии $E = \alpha k^2/2$, k — волновое число, $\alpha = 2/m$, m — эффективная масса возбуждения.

В отсутствие дефекта в нелинейной среде (когда ангармонизм везде одинаковый и положительный $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma > 0$) распространяется так называемый свободный солитон:

$$\psi(x,t) = k\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\frac{e^{i\alpha k^2 t/2}}{\mathrm{ch}k(x-x_0)}, \tag{4}$$

локализованный перпендикулярно направлению своего движения с максимумом на линии $x = x_0$, причем волновое число k является свободным параметром.

В нелинейной среде с дефектом, моделируемым потенциалом (1), в [10] были получены локализованные состояния двух видов для разных знаков параметра нелинейности среды γ, и проанализированы условия их существования и устойчивости в зависимости от знаков параметров дефекта и нелинейности.

Ориентируясь на вид свободного солитона (4), решение уравнения (3) можно представить в виде: $\psi(x,t) = \psi(x)e^{i\alpha k^2 t/2}$.

Тогда из (3) с учетом этого и (2) получается система граничных условий вида:

$$\begin{cases} \psi(+0) = \psi(-0) = \psi(0); \\ \alpha\{\psi'(+0) - \psi'(-0)\} = 4U_0\psi(0) + V_0\{\psi''(+0) + \psi''(-0)\}. \end{cases} \tag{5}$$

В рассматриваемом случае решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям (5), можно искать в виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{A_1}{\mathrm{ch}k(x-x_1)},\, x < 0 \\ \frac{A_2}{\mathrm{ch}k(x-x_2)},\, x > 0 \end{cases} \tag{6}$$

где $A_{1,2}^2 = \alpha k^2/\gamma_{1,2}$, параметры x_i $(i = 1, 2)$ определяют положения максимумов возбуждений по разные стороны от дефекта.

Подстановка (6) в (5) приводит к соотношениям, связывающим параметры среды, дефекта и возбуждения:

$$\sqrt{\gamma_1}\mathrm{ch}kx_1 = \sqrt{\gamma_2}\mathrm{ch}kx_2, \tag{7}$$

$$4U_0 = k[\alpha(\mathrm{th}kx_2 - \mathrm{th}kx_1) + 2V_0k(1 - \mathrm{th}^2kx_1 - \mathrm{th}^2kx_2)]. \tag{8}$$

В случае малых энергий локализации возбуждений, когда kx_0« 1,из (7) и (8)вытекает связь между положениями максимумов несимметрично расположенных от дефекта возбуждений:

$$2U_0 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 x_2^2 - \gamma_2 x_1^2}[\alpha(x_2 - x_1)/2 + V_0], \tag{9}$$

а также энергия локализации возбуждений:

$$E = \frac{\alpha}{2}\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 x_2^2 - \gamma_2 x_1^2} = \frac{2\alpha U_0}{\alpha(x_2 - x_1) + 2V_0}. \tag{10}$$

Видно, что локализованное состояние с несимметрично расположенными от дефекта положениями максимумов возможно только, когда нелинейности сред по разные стороны от дефекта отличаются.

Рассмотрим сначала такие локализованные состояния, для которых $x_1 = x_2 = x_0$. Такая ситуация реализуется в среде, в которой везде одинаковый положительный ангармонизм: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma > 0$. В этом случае соотношение (7) выполняется автоматически, а из (8) следует:

$$2U_0 = V_0k^2(1 - 2\mathrm{th}^2kx_0). \tag{11}$$

При малой энергий локализации возбуждений, когда $kx_i << 1$, из (11) получается значение волнового числа $k^2 = 2U_0/V_0$, которому соответствует энергия локализации возбуждения $E = \alpha U_0/V_0$.

Если рассматривать только локализованные состояния, когда положения максимумов возбуждений расположены симметрично относительно дефекта, то есть когда $x_2 = -x_1 = x_0$, и одинаковый положительный ангармонизм по обе стороны от дефекта, то соотношение (7) также выполняется автоматически, а из (8) получится выражение:

$$2U_0 = k[\alpha\mathrm{th}kx_0 + V_0k(1 - 2\mathrm{th}^2kx_0)]. \tag{12}$$

В случае малой энергий локализации возбуждений, когда $kx_0 << 1$, из (12) следует волновое число:

$$k^2 = \frac{2U_0}{\alpha x_0 + V_0}, \tag{13}$$

которое соответствует энергии локализованного возбуждения

$$E = \frac{\alpha U_0}{\alpha x_0 + V_0}, \tag{14}$$

с амплитудой

$$A = \left(\frac{2\alpha U_0}{\gamma(\alpha x_0 + V_0)}\right)^{1/2}. \tag{15}$$

Для существования такого состояние должно выполняться одни из двух требований: 1) $U_0 > 0$ и $V_0 > -\alpha x_0$ или 2) $U_0 < 0$ и $V_0 < -\alpha x_0$.

Низкоэнергетические локализованные состояния такого типа возможны при достаточно малых значениях параметра дефекта, характеризующего его внутреннюю структуру. Также видно, что наличие внутренней структуры дефекта приводит к уменьшению энергии локализации и амплитуды низкоэнергетических возбуждений дефекта.

Из (12) при $V_0 = 0$ для простого дефекта, не обладающего своими степенями свободы, следует выражение $2U_0 = \alpha k \mathrm{th} k x_0$, совпадающее с точностью до обозначений с соотношением между параметрами, полученным в [10]. Следовательно, учет внутренней структуры дефекта приводит к видоизменению области существования нелинейных локализованных возбуждений.

Рассмотрим теперь случай отрицательных значений параметров нелинейности сред $\gamma_1 = \gamma_2 < 0$. В такой среде возможно существование солитона с отрицательной энергией $E = -\alpha k^2/2$: $\psi(x,t) = \psi(x) e^{-i\alpha k^2 t/2}$, где:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{A_1}{\mathrm{sh} k(x-x_1)}, \, x < 0 \\ \frac{A_2}{\mathrm{sh} k(x-x_2)}, \, x > 0 \end{cases} \tag{16}$$

амплитуды: $A_{1,2}^2 = \alpha k^2 / |\gamma_{1,2}|$.

Подстановка (16) в (5) приводит к соотношениям, связывающим параметры среды, дефекта и возбуждения:

$$A_2 \mathrm{sh} k x_1 = A_1 \mathrm{sh} k x_2, \tag{17}$$

$$4U_0 = k[\alpha(\mathrm{cth} k x_1 - \mathrm{cth} k x_2) + 2V_0 k(\mathrm{cth}^2 k x_1 + \mathrm{cth}^2 k x_2 - 1)]. \tag{18}$$

В случае малых энергий локализации возбуждений, когда $kx_i << 1$, из (17) и (18) получается волновое число:

$$k^2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} - \frac{2U_0}{V_0} + \frac{\alpha}{2V_0}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right), \tag{19}$$

и связь между положениями максимумов несимметрично расположенных от дефекта возбуждений:

$$\gamma_1 x_1^2 = \gamma_2 x_2^2, \tag{20}$$

а также энергия локализации возбуждений:

$$E = -\frac{\alpha}{2}\left\{\frac{1}{x_1^2}\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \frac{2U_0}{V_0} + \frac{\alpha}{2V_0 x_2}\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}\right)\right\}. \tag{21}$$

Следует отметить, что при малых энергиях амплитуда состояний (16) вблизи дефекта должна быть большой для выполнения требования конечности решения в начале координат. Поэтому состояния (16) стабильно реализуются при больших энергиях, когда $kx_i \gg 1$. В том случае из (18) для несимметрично расположенных положений максимумов следует $k^2 = 2U_0/V_0$ и энергия локализации $E = -\alpha U_0/V_0$.

В случае, когда $x_1 = x_2 = x_0$ и в среде везде одинаковый отрицательный ангармонизм ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma < 0$), соотношение (17) выполняется автоматически (причем $A_1 = A_2$), а из (18) следует:

$$2U_0 = V_0 k^2 (2\mathrm{cth}^2 k x_0 - 1). \tag{22}$$

Из (22) при $V_0 = 0$ для простого дефекта, не обладающего своими степенями свободы, следует выражение $2U_0 = -\alpha k \mathrm{cth} k x_0$, совпадающее с точностью до обозначений с соотношением между параметрами, полученным в [10].

При малых энергиях локализации возбуждений, когда $kx_0 \ll 1$, из (22) следует волновое число:

$$k^2 = 2\left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{U_0}{V_0}\right), \tag{23}$$

которое соответствует энергии локализованного возбуждения:

$$E = -\alpha \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{U_0}{V_0} \right), \tag{24}$$

Для существования такого состояние должно выполняться неравенство $U_0 < V_0/x_0^2$, то есть второй параметр, характеризующий внутреннюю структуру дефекта должен быть существенным.

Если рассматривать только локализованные состояния, когда положения максимумов возбуждений расположены симметрично относительно дефекта, то есть когда $x_2 = -x_1 = x_0$, и одинаковый отрицательный ангармонизм по обе стороны от дефекта, тоиз (17) следует, что $A_1 = -A_2$, а из (18) получится выражение:

$$2U_0 = k[V_0 k(2\text{th}^2 kx_0 - 1) - \alpha \text{cth} kx_0]. \tag{25}$$

В случае малой энергий локализации возбуждений, когда kx_0 « 1, из (25) следует волновое число:

$$k^2 = 2\left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{U_0}{V_0} \right) - \frac{\alpha}{x_0 V_0}, \tag{26}$$

которое соответствует энергии локализованного возбуждения

$$E = -\alpha \left\{ \frac{1}{x_0^2} - \frac{U_0}{V_0} - \frac{\alpha}{2x_0 V_0} \right\}. \tag{27}$$

Для существования такого состояние должно выполняться неравенство $U_0 < (V_0/x_0 - \alpha/2)/x_0$.

Видно, что локализованные возбуждения с максимумами, симметрично расположенными относительно дефекта ($x_2 = -x_1$), находятся в энергетическом спектре ниже чем, локализованные возбуждения, для которых $x_1 = x_2$.

Таким образом, в рамках рассматриваемой модели можно утверждать, что возможно существование нелинейных локализованных состояний нескольких типов, а также учет внутренней структуры дефекта приводит к видоизменению области существования нелинейных локализованных возбуждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахмедиев, Н. Н. Возбуждение нелинейных поверхностных волн гауссовыми световыми пучками / Н. Н. Ахмедиев, В. И. Корнеев, Ю. В. Кузьменко // ЖЭТФ. — 1985. — Т. 88, № 1. — С. 107–115.

2. Горшков, К. А. Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц / К. А. Горшков, Л. А. Островский, В. В. Папко // ЖЭТФ. — 1976. — Т. 71, № 2(8). — С. 585–593.

3. Кившарь, Ю. С. Рассеяние на точечном дефекте связанных квазичастиц как солитонная проблема (одномерный случай) / Ю. С. Кившарь, А. М. Косевич, О. А. Чубыкало // ЖЭТФ. — 1987. — Т. 93, № 3(9). — С. 968–977.

4. Kivshar, Yu. S. Radiative effects in the theory of beam propagation at nonlinear interfaces / Yu. S. Kivshar, A. M. Kosevich, O. A. Chubykalo // Phys. Rev. A. — 1990. — T. 41, № 3. — P. 1677–1688.

5. Савотченко, С. Е. Локализация волн вблизи интерфейса нелинейных сред с пространственной дисперсией / С. Е. Савотченко // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2004. — Т. 47, № 5. — С. 79–84.

6. Красильников, В. В. Особенности рассеяния частиц точечным дефектом с внутренней структурой / В. В. Красильников, С. Е. Савотченко // Известия тульского государственного университета. Естественные науки. — 2015. — № 4. — С. 178–183.

7. Савотченко, С. Е. Особенности взаимодействия волны с точечным дефектом в среде с пространственной дисперсией / С. Е. Савотченко // Известия Воронежского государственного педагогического университета. — 2016. — № 1(270). — С. 196–199.

8. Герасимчук, И. В. Динамика и устойчивость локализованных мод в нелинейных средах с точечными дефектами / И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев // ФНТ. — 2000. — Т. 26, № 8. — С. 799–809.

9. Abdullaev, F. Kh. Resonance phenomena in interaction of a spatial soliton with the modulated interface of two nonlinear media / F. Kh. Abdullaev, B. B. Baizakov, B. A. Umarov // Optics Communications. — 1998. — V. 156. — P. 341–346.

10. Богдан, М. М. Динамика и устойчивость локализованных мод в нелинейных средах с точечными дефектами / М. М. Богдан, И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев // ФНТ. — 1997. — Т. 23, № 2. — С. 197–207.

REFERENCES

1. Ahmediev N.N., Korneev V.I., Kuzmenko U.V. Excitation of nonlinear surface waves Gaussian light beams. [Ahmediev N.N., Korneev V.I., Kuz'menko Ju.V. Vozbuzhdenie nelinejnyh poverhnostnyh voln gaussovymi svetovymi puchkami]. *ZhE'TF — JETF*, 1985, vol. 88, no. 1, pp. 107–115.

2. Gorshkov K.A., Ostrovskij L.A., Papko V.V. Interactions and bound states of solitons as classical particles. [Gorshkov K.A., Ostrovskij L.A., Papko V.V. Vzaimodejstvija i svjazannye sostojanija solitonov kak klassicheskih chastic]. *ZhE'TF — JETF*, 1976, vol. 71, no. 2(8), pp. 585–593.

3. Kivshar U.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. The scattering on an isolate defect involving the soliton as a quasi-particle problem (one-dimensional case). [Kivshar' Ju.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. Rassejanie na tochechnom defekte svjazannyh kvazichastic kak solitonnaja problema (odnomernyj sluchaj)]. *ZhE'TF — JETF*, 1987, vol. 93, no. 3(9), pp. 968–977.

4. Kivshar U.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. Radiative effects in the theory of beam propagation at nonlinear interfaces. Phys. Rev. A, 1990, vol. 41, no. 3. pp. 1677–1688.

5. Savotchenko S.E. Localization waves near the interface with spatial dispersion of nonlinear media. [Savotchenko S.E. Lokalizacija voln vblizi interfejsa nelinejnyh sred s prostranstvennoj dispersiej]. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika — Russian Physics Journal*, 2004, vol. 47, no. 5, pp. 79–84.

6. Krasilnikov V.V. Savotchenko S.E. Features of the particle scattering point defect with an internal structure. [Krasil'nikov V.V., Savotchenko S.E. Osobennosti rassejanija chastic tochechnym defektom s vnutrennej strukturoj]. *Izvestija tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki — Proceedings of the Tula State University. Natural Sciences*, 2015, no. 4, pp. 178–183.

7. Savotchenko S.E. Features wave interaction with a point defect in a medium with spatial dispersion. [Savotchenko S.E. Osobennosti vzaimodejstvija volny s tochechnym defektom v srede s prostranstvennoj dispersiej]. *Izvestija Voronezhskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta — Proceedings of Voronezh State Pedagogical University*, 2016, no. 1(270), pp. 196–199.

8. Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. Localization of nonlinear waves in layered media. [Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. Dinamika i ustojchivost' lokalizovannyh mod v nelinejnyh sredah s tochechnymi defektami]. *FNT — Low temp Phys*, 2000, vol. 26, no. 8, pp. 799–809.

9. Abdullaev F.Kh., Baizakov B.B., Umarov B.A. Resonance phenomena in interaction of a

spatia soliton with the modulated interface of two nonlinear media Optics Communications, 1998, vol. 156, pp. . 341–346.

10. Bogdan M.M., Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. Dynamics and stability of localized modes in nonlinear media with point defects. [Bogdan M.M., Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. Dinamika i ustojchivost' lokalizovannyh mod v nelinejnyh sredah s tochechnymi defektami]. *FNT — Low temp Phys*, 1997, vol. 23, no. 2, pp. 197–207.

Савотченко Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, доцент, Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова, кафедра высшей математики, профессор, г. Белгород, Российская Федерация
E-mail: savotchenko@bsu.edu.ru
Тел.: 8–920–561–04–46

Savotchenko Sergey Evgenyevich, Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Professor of High Mathematics Department, Belgorod, Russian Federation
E-mail: savotchenko@bsu.edu.ru
Tel.: 8–920–561–04–46