УДК 621.37: 519.27

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА РЕГУЛЯРНОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С РЕЛЕЕВСКОЙ И ГАУССОВСКОЙ КОМПОНЕНТАМИ

А. В. Захаров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.09.2016 г.

Аннотация. Методом локально-аддитивной аппроксимации получены асимптотически точные выражения для функции распределения и вероятности превышения порога величиной абсолютного максимума суммы статистически независимых стационарных гауссовского и релеевского случайных процессов. Рассмотрен случай регулярных случайных процессов, корреляционные функции которых непрерывно дифференцируемы при нулевом значении аргумента. Проведено сравнение с аналогичными выражениями, полученными на основе формулы для среднего числа выбросов эквивалентного случайного поля за высокий уровень. Границы применимости полученных выражений установлены с помощью статистического моделирования случайных процессов на ЭВМ.

Ключевые слова: релеевский случайный процесс, гауссовский случайный процесс, величина абсолютного максимума, функция распределения, вероятность превышения порога, локально-аддитивная аппроксимация, среднее число выбросов, статистическое моделирование.

THE DISTRIBUTION OF AN ABSOLUTE MAXIMUM OF SMOOTHED GOMOGENEOUS STOCHASTIC PROCESS WITH RAYLEIGH AND GAUSSIAN COMPONENTS

A. V. Zakharov

Abstract. Asymptotically exact expressions for level-crossing probability and distribution function of an absolute maximum of the sum of statistically independent homogeneous Gaussian and Rayleigh stochastic processes are found by a method of local – additive approximation. The case of the smoothed stochastic processes with continuously differentiated covariation function is considered. Comparison with the corresponding expressions, which are received on the basis of an average number of high level-crossing of equivalent random field, is carried out. The borders of applicability of the received expressions are established by means of statistical modelling of stochastic processes on the computer.

Keywords: Rayleigh stochastic process, Gaussian stochastic process, absolute maximum, distribution function, level-crossing probability, local-additive approximation, average number of level-crossing, statistical modeling.

ВВЕДЕНИЕ

При анализе помехоустойчивости радиофизических систем приема и обработки информации часто необходимо исследовать статистические распределения абсолютных максимумов случайных процессов, обусловленных шумами или помехами различной природы, действующими в различных точках системы [1, 2 и др.]. Такая задача возникает при изучении воздействия шума на пороговые устройства и следящие измерители, при анализе эффективности устройств обработки радиофизических сигналов на фоне помех, при исследовании распространения радиоволн в турбулентных физических средах и т. п.

Широкое применение в статистической радиофизике и радиотехнике находят гауссовские случайные процессы [1–6]. Такие процессы достаточно точно описывают многие физические явления, имеющие стохастическую природу, в том числе шумы радиоприемных устройств, а также отличаются простотой математической модели. Адекватность гауссовской модели случайного процесса реальным явлениям во многих случаях объясняется действием центральной предельной теоремы [5, 6]. Теория экстремальных значений гауссовских случайных процессов получила в настоящее время наибольшее развитие [1–4 и др.].

Во многих задачах статистической радиофизики и радиотехники встречаются негауссовские случайные процессы, являющиеся результатом различных преобразований гауссовских случайных процессов [1, 2, 5–7]. Одним таких процессов является *релеевский* случайный процесс, который описывает огибающую узкополосного гауссовского случайного процесса [5, 6], Релеевский процесс наблюдается, например, на выходе детектора огибающей радиоприемника при наличии гауссовского шума на входе детектора [6]. Распределения абсолютных максимумов релеевских случайных процессов исследовались в ряде работ [1, 2, 7 и др.].

На практике релеевский случайный процесс может наблюдаться совместно с гауссовским случайным процессом, образуя двухкомпонентный случайный процесс [8]. При этом гауссовская компонента такого процесса часто обусловлена наличием внутренних шумов в различных узлах радиоэлектронных устройств. Однако теория экстремальных значений случайных процессов, представляющих собой сумму процессов с различными распределениями вероятностей, в настоящее время *развита недостаточно*.

В [8] получены аналитические выражения для функции распределения абсолютного максимума суммы *разрывных* гауссовского и релеевского стационарных случайных процессов. При этом термин “разрывный” (или “нерегулярный”) в [8] означает, что корреляционные функции (КФ) рассматриваемых процессов *недифференцируемы* при нулевом значении аргумента, так что производные КФ в нуле имеют *разрывы первого рода*. Примером таких КФ является треугольная корреляционная функция. Однако при этом сами случайные процессы являются *непрерывными*, хотя и *недифференцируемыми*, в среднеквадратическом [5, 6]. Такая терминология встречается в [9–11 и др.].

На практике часто используют модели случайных процессов, КФ которых *непрерывно дифференцируемы* при любом (в том числе и при нулевом) значении аргумента. Такие процессы непрерывны и дифференцируемы в среднеквадратическом [5, 6] и называются *регулярными* [9–11]. Далее методы работы [8] применены для нахождения и анализа распределения абсолютных максимумов суммы *регулярных* гауссовского и релеевского стационарных случайных процессов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель случайного процесса. Рассмотрим двухкомпонентный процесс

$$L(l) = L_0(l) + L_1(l), \quad l \in [\Lambda_1;\, \Lambda_2], \tag{1}$$

представляющий сумму статистически независимых стационарных гауссовского и релеевского процессов $L_0(l)$ и $L_1(l)$ на интервале определения $[\Lambda_1;\ \Lambda_2]$.

Пусть *гауссовский* случайный процесс $L_0(l)$ имеет математическое ожидание (МО) $M_0 = < L_0(l) >$, дисперсию $\sigma_0^2 = < [L_0(l) - M_0]^2 >$ и нормированную корреляционную функцию (КФ) $R_0(l_2 - l_1) = < [L_0(l_1) - M_0]\ [L_0(l_2) - M_0]\ > /\sigma_0^2$. Здесь $<>$ означает усреднение по реализациям случайного процесса. Тогда гауссовский процесс $L_0(l)$ удобно представить в виде

$$L_0(l) = M_0 + \sigma_0\, \xi_0(l), \tag{2}$$

где $\xi_0(l) = [L_0(l) - M_0]/\sigma_0$ — стационарный центрированный гауссовский случайный процесс с единичной дисперсией и с КФ $< \xi_0(l_1)\ \xi_0(l_2) > = R_0(l_2 - l_1)$.

Релеевский случайный процесс $L_1(l)$ представим как $L_1(l) = \sqrt{L_{11}^2(l) + L_{12}^2(l)}$ [1, 6, 7], где $L_{1k}(l)$, $k = 1{,}2$ — статистически независимые центрированные стационарные гауссовские случайные процессы с одинаковыми дисперсиями $\sigma_1^2 = < L_{1k}^2(l) >$ и нормированными КФ $R_1(l_2 - l_1) = < L_{1k}(l_1)\, L_{1k}(l_2) > /\sigma_1^2$. Тогда релеевский случайный процесс $L_1(l)$ удобно представить в виде

$$L_1(l) = \sigma_1 \sqrt{\xi_{11}^2(l) + \xi_{12}^2(l)}, \tag{3}$$

где $\xi_{11}(l) = L_{11}(l)/\sigma_1$ и $\xi_{12}(l) = L_{12}(l)/\sigma_1$ — статистически независимые центрированные стационарные гауссовские случайные процессы с единичной дисперсией и с одинаковыми КФ $< \xi_{1k}(l_1)\ \xi_{1k}(l_2) > = R_1(l_2 - l_1)$, $k = 1, 2$. При этом случайные процессы $\xi_0(l)$ и $\xi_{11}(l)$, $\xi_{12}(l)$ статистически независимы.

Таким образом, исследуемый случайный процесс (1) можно представить как

$$L(l) = M_0 + \sigma_0 \xi_0(l) + \sigma_1 \sqrt{\xi_{11}^2(l) + \xi_{12}^2(l)}, \quad l \in [\Lambda_1;\ \Lambda_2]. \tag{4}$$

Здесь параметры σ_0 и σ_1 характеризуют соответственно вклад гауссовской $L_0(l)$ и релеевской $L_1(l)$ компонент в результирующий случайный процесс $L(l)$ (1).

Считаем, что нормированные КФ $R_0(\Delta l)$, $R_1(\Delta l)$ случайных процессов $L_0(l)$, $L_1(l)$ *непрерывно дифференцируемы* хотя бы дважды и в малой окрестности точки максимума $\Delta l = 0$ допускают “параболические” аппроксимации

$$R_0(\Delta l) = 1 - a_0\, \Delta l^2 + o(\Delta l^2), \quad R_1(\Delta l) = 1 - a_1\, \Delta l^2 + o(\Delta l^2) \text{ при } |\Delta l| \ \to 0, \tag{5}$$

где $a_1 > 0$, $a_0 > 0$, а $o(x)$ — величина большего порядка малости, чем x. Тогда процессы $L_0(l)$, $L_1(l)$ и, следовательно, случайный процесс $L(l)$ (1), дифференцируемы в среднеквадратическом, т. е. являются регулярными [9–11].

Аналогично [8] считаем, что $R_0(\Delta l) < 1$, $R_1(\Delta l) < 1$ при всех значениях $|\Delta l| > 0$, т.е. в точке $\Delta l = 0$ имеется глобальный максимум КФ. Кроме того, также считаем, что $R_0(\Delta l) \to 0$ и $R_1(\Delta l) \to 0$ при $|\Delta l| \to \infty$ [8].

Цель работы. Рассмотрим величину L_m абсолютного (наибольшего) максимума случайного процесса $L(l)$ (1) на интервале определения $l \in [\Lambda_1;\ \Lambda_2]$,

$$L_m = \sup_{l\, \in\, [\Lambda_1;\ \Lambda_2]} L(l) \ = \sup_{l\, \in\, [\Lambda_1;\ \Lambda_2]} [L_0(l) + L_1(l)]. \tag{6}$$

Получим выражения для функции распределения $F_m(h) = \mathrm{P}[L_m < h]$ величины L_m (6), а также для вероятности $\alpha(h) = \mathrm{P}[L_m > h] = 1 - F_m(h)$ превышения заданного уровня h величиной L_m. Здесь обозначено P[A] — вероятность события A. Исследуем также точность полученных выражений при различных значениях уровня h и ширины $\lambda_l = \Lambda_2 - \Lambda_1$ интервала определения $[\Lambda_1;\ \Lambda_2]$ процесса (1).

2. РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ВЫБРОСОВ ЭКВИВАЛЕНТНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Представление величины абсолютного максимума. Следуя [8], релеевский случайный процесс (3) представим в виде

$$L_1(l) = \sup_{\varphi \in [-\pi;\pi]} L_{1Э}(l,\varphi)\,, \tag{7}$$

как результат максимизации случайного поля

$$L_{1Э}(l,\varphi) = \sigma_1\ [\xi_{11}(l)\ \cos(\varphi) + \xi_{12}(l)\ \sin(\varphi)]\,. \tag{8}$$

по переменной φ на интервале $\varphi \in [-\pi;\pi]$. Случайное поле (8) является однородным центрированным гауссовским случайным полем с дисперсией σ_1^2. Тогда с учетом (7), (8) величину L_m (6) можно представить в виде

$$L_m = \sup_{l,\,\varphi\,\in\Theta} L_Э(l,\varphi), \tag{9}$$

как величину абсолютного максимума эквивалентного случайного поля

$$L_Э(l,\varphi) = M_0 + \ \sigma_0\xi_0(l) + \sigma_1[\xi_{11}(l)\ \cos(\varphi) + \xi_{12}(l)\ \sin(\varphi)] \tag{10}$$

в пределах области Θ значений l, φ, задаваемой условиями $l \in [\Lambda_1;\Lambda_2]$, $\varphi \in [-\pi;\pi]$. При этом размеры области Θ по переменным l и φ соответственно равны

$$\lambda_l = \Lambda_2 - \Lambda_1, \quad \lambda_\varphi = 2\pi. \tag{11}$$

Поле (10) является *однородным гауссовским случайным полем* с математическим ожиданием M_0, дисперсией $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2$ и с корреляционной функцией

$$K(\Delta l,\,\Delta\varphi) =\ \sigma_0^2\,R_0(\Delta l) + \sigma_1^2 R_1(\Delta l)\ \cos(\Delta\varphi). \tag{12}$$

При этом, согласно (5), при $\Delta l \to 0$, $\Delta\varphi \to 0$ корреляционная функция (12) случайного поля (10) допускает асимптотическое представление

$$K(\Delta l,\,\Delta\varphi) = \sigma^2 \left\{ 1 - \eta\ \Delta l^2\ - \frac{\vartheta}{2}\,\Delta\varphi^2\ + o(\Delta l^2) + o\,(\Delta\varphi^2) \right\}, \tag{13}$$

причем $K(\Delta l,\,\Delta\varphi)/\sigma^2 < 1$ при всех значениях $|\Delta l| > 0$, а при $\Delta l \to \infty$ получаем $K(\Delta l,\,\Delta\varphi) \to 0$. Здесь обозначено

$$\eta = \frac{a_0\sigma_0^2 + a_1\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} = \frac{a_0\sigma_0^2 + a_1\sigma_1^2}{\sigma^2}, \quad \vartheta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}. \tag{14}$$

Отметим, что величина ϑ (14) характеризует относительный вклад релеевской компоненты (3) в случайный процесс (1) и принимает значения $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$. Если релеевская компонента (3) отсутствует (т.е. $\sigma_1 = 0$), а имеется только гауссовская компонента (2), то $\vartheta = 0$, $\eta = a_0$. Если же отсутствует гауссовская компонента (т. е. $\sigma_0 = 0$), а имеется только релеевская компонента, то $\vartheta = 1$, $\eta = a_1$.

Отметим также, что параметры

$$\delta_l = 1\Bigg/\sqrt{-\frac{1}{K(0{,}0)}\frac{\partial^2 K(l{,}0)}{\partial l^2}\Bigg|_{l=0}} = \frac{1}{\sqrt{2\eta}},$$
$$\delta_\varphi = 1\Bigg/\sqrt{-\frac{1}{K(0{,}0)}\frac{\partial^2 K(0{,}\varphi)}{\partial \varphi^2}\Bigg|_{\varphi=0}} = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \qquad (15)$$

определяют ширину интервалов корреляции случайного поля (10) по переменным l и φ соответственно, причем при $a_1 = a_2 = 1$ имеем $\eta = 1$. Тогда приведенные (относительные) длины m_l и m_φ [10, 11] области определения Θ по переменным l и φ соответственно равны

$$m_l = \lambda_l/\delta_l = (\Lambda_2 - \Lambda_1)\sqrt{2\eta}, \quad m_\varphi = \lambda_\varphi/\delta_\varphi = 2\pi\sqrt{\vartheta}, \qquad (16)$$

где λ_l и λ_φ — абсолютные размеры (11) области Θ по переменным l и φ соответственно. При этом параметр m_l (16) имеет смысл приведенной длины интервала определения $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ случайного процесса $L(l)$ (1), на котором вычисляется его абсолютный максимум L_m.

Таким образом, величину L_m (6) абсолютного максимума случайного процесса $L(l)$ (1) на интервале $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ можно представить как величину (9) *абсолютного максимума эквивалентного однородного гауссовского случайного поля* $L_Э(l,\ \varphi)$ (10) в пределах области Θ, заданной условиями $l \in [\Lambda_1;\ \Lambda_2]$, $\varphi \in [-\pi;\ \pi]$.

Распределение абсолютного максимума. Точное выражение для функции распределения $F_m(h) = \mathrm{P}[L_m < h]$ величины абсолютного максимума L_m однородного гауссовского случайного поля *при произвольных* уровне h и области определения Θ *неизвестно.* Следуя [1–4, 7, 8, 10–14 и др.], ограничимся вычислением асимптотически точных (с ростом h) аппроксимаций функции $F_m(h)$.

Учтем, что распределение числа выбросов однородного гауссовского случайного поля сходится к закону Пуассона с увеличением уровня h [3, 12]. Тогда функцию распределения $F_m(h)$ величины L_m абсолютного максимума случайного поля $L_Э(l,\varphi)$ (10) при $h \to \infty$, аналогично гл. 1 из [10], можно представить как

$$F_m(h) = \exp[-\Pi(h)], \qquad (17)$$

где $\Pi(h)$ — среднее число выбросов поля за уровень h в пределах области Θ.

Воспользовавшись результатами [3, 12] получаем асимптотически точное (с ростом h) выражение для среднего числа выбросов $\Pi(h)$ случайного поля $L_Э(l{,}\varphi)$ (10) с КФ (13) на области определения Θ, задаваемой как $l \in [\Lambda_1;\ \Lambda_2]$, $\varphi \in [-\pi;\ \pi]$:

$$\Pi(h) = \frac{m_l\, m_\varphi\, u}{(2\pi)^{3/2}}\ \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) = \frac{m_l\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{2\pi}}u\ \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \qquad (18)$$

где приведенные размеры m_l и m_φ области Θ определяются из (16), величина ϑ — из (14), а $u = (h - M_0)/\sigma$ — нормированный уровень (порог).

Обсуждение. Отметим, что метод [3, 12] вычисления среднего числа выбросов (18) предполагает, что приведенный объем $\Omega = m_l\, m_\varphi$ области определения Θ *не слишком мал* [3, 10]. В противном случае формула (18) *имеет низкую точность* при небольших значениях нормированного порога u. Чем больше величины m_l и m_φ (16), тем точнее аппроксимация (18) при конечных значениях уровня u [10]. Как следствие этого, формула (18) *неприменима* при $\Omega = 0$, когда случайное поле вырождается в случайный процесс или в случайную величину.

Поэтому формула (18) неприменима при $\vartheta = 0$, когда релеевская компонента $L_1(l)$ отсутствует, так как в этом случае получаем $m_\varphi = 0$ и $\Omega = 0$. Кроме того, при малых значениях ϑ

« 1, когда величины m_φ и Ω малы, формула (18) имеет низкую точность при небольших значениях u. Поэтому для обеспечения удовлетворительной точности выражения (18) следует полагать

$$m_l = (\Lambda_2 - \Lambda_1)\sqrt{2\eta} >> 1, \quad m_\varphi = 2\pi\sqrt{\vartheta} \geqslant \mathrm{O}(1), \tag{19}$$

где O(1) означает величину порядка 1. Условие $m_l >> 1$ означает, что ширина λ_l (11) интервала определения $[\Lambda_1;\, \Lambda_2]$ случайного процесса $L(l)$ (1) много больше времени корреляции этого процесса. При этом условие $m_\varphi \geqslant \mathrm{O}(1)$ исключает из рассмотрения значения $\vartheta << 1$, когда мал вклад релеевской компоненты (3) в результирующий случайный процесс $L(l)$ (1).

Отметим также, что зависимость $\Pi(h)$ (18) является асимптотически точной с ростом нормированного порога $u = (h - M_0)/\sigma$. При этом возрастание функции $\Pi(h)$ (18) с уменьшением порога $h(u)$ сменяется её убыванием при малых $u < 1$. Это противоречит смыслу среднего числа выбросов $\Pi(h)$, которое не может убывать с уменьшением $h(u)$. Поэтому формулу (18) можно применять только при $u \geqslant 1$. При $u < 1$, следуя [8, 10, 11], будем полагать $F_m(h) = 0$, что достигается в пределе при уменьшении $h(u)$. Тогда из (17) с учетом (18) получаем

$$F_m(h) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{m_l\, u}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\vartheta}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] & \text{при } u \geqslant 1\,; \\ 0 & \text{при } u < 1\,; \end{cases} \tag{20}$$

где m_l определяется из (16), а ϑ — из (14). Точность выражения (20) возрастает с увеличением нормированного порога $u = (h - M_0)/\sigma$, а также приведенных размеров m_l и m_φ (16), что эквивалентно увеличению $\lambda_l = \Lambda_2 - \Lambda_1$ (11) и ϑ (14).

Предельные случаи. 1. ***Чисто гауссовский или релеевский процесс.***

Пусть имеется *только релеевская компонента* (3), а гауссовская компонента (2) случайного процесса (1) отсутствует, т. е. $\sigma_0 = 0$. Тогда в (20) следует положить $\vartheta = 1$ и выражение (20) переходит в известное асимптотически точное (с ростом u) выражение для функции распределения абсолютного максимума регулярного релеевского стационарного случайного процесса [1, 7 и др.]:

$$F_m(h) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{m_l\, u}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] & \text{при } u \geqslant 1\,; \\ 0 & \text{при } u < 1\,. \end{cases} \tag{21}$$

Пусть имеется *только гауссовская компонента* (2), а релеевская компонента (3) процесса (1) отсутствует, т.е. $\sigma_1 = 0$. Тогда в (20) следует положить $\vartheta = 0$. Однако, как отмечалось выше, формула (20) *не применима* при $\vartheta = 0$. Поэтому вместо (20) при условии $\vartheta = 0$ следует использовать *известное* асимптотически точное (с ростом u) выражение для функции распределения абсолютного максимума регулярного гауссовского стационарного случайного процесса [3, 10, 11 и др.]

$$F_m(h) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{m_l}{2\pi}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] & \text{при } u \geqslant 0\,; \\ 0 & \text{при } u < 0\,. \end{cases} \tag{22}$$

Отметим, что функция распределения $F_m(h)$ (20) как функция порога *u возрастает* с уменьшением ϑ, т.е. с уменьшением вклада релеевской компоненты в процесс (1). Поэтому выражение (22) можно интерпретировать как *верхнюю границу*, а выражение (21) – как *нижнюю границу* для функции распределения $F_m(h)$ при больших значениях u и при всех возможных значениях $\vartheta \in [0; 1]$.

Сравнение общей формулы (20) с предельными выражениями (21), (22) показывает, что при малых значениях $\vartheta << 1$, когда мал вклад релеевской компоненты (3) в случайный процесс (1), выражение (20) дает существенно завышенные значения для функции распределения $F_m(h)$ и (соответственно) заниженные значения для вероятности $\alpha(h) = 1 - F_m(h)$.

В предельном случае $\vartheta = 0$, когда релеевская компонента отсутствует, формула (20) вообще неприменима и дает значения $F_m(h) = 1$ и $\alpha(h) = 0$ при любых конечных уровнях h.

Это иллюстрирует рис. 1, где штриховыми линиями показаны зависимости вероятности α от нормированного порога $u = (h - M_0)/\sigma$, рассчитанные по формуле (20) при $m_l = 10$ и различных значениях $\vartheta = 0.6$ (кривая 1), $\vartheta = 0.1$ (кривая 2) и $\vartheta = 0.002$ (кривая 3). Пунктирной линией R на рис. 1 показана зависимость $\alpha(u)$ для случая $\vartheta = 1$ релеевского процесса, рассчитанная по формуле (21) и являющаяся верхней границей для вероятности α. Там же пунктирной линией G показана зависимость $\alpha(u)$ для случая $\vartheta = 0$ гауссовского процесса, рассчитанная по формуле (22) и являющаяся нижней границей для вероятности α. Значения α для всех возможных ϑ должны укладываться между граничными кривыми R и G при не слишком малых u. Однако на рис.1 штриховая линия 3, соответствующая $\vartheta = 0.002$, идет существенно ниже, чем допустимая нижняя граница G.

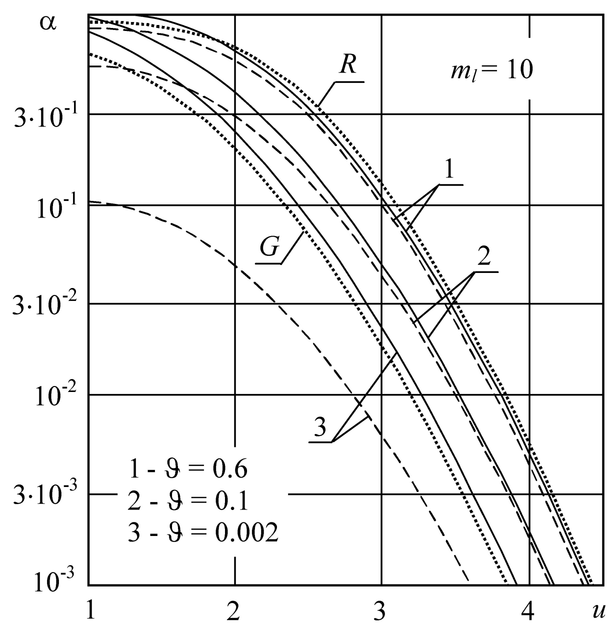

Рис. 1. *Сравнение аппроксимаций для вероятности превышения порога при различном вкладе релеевского процесса*

2. *Нулевая ширина интервала определения.* Формула (20) неприменима при малых значениях приведенной ширины интервала определения $m_l < 1$, в том числе при $m_l = 0$. Однако в предельном случае $m_l = 0$, когда случайный процесс (1) вырождается в сумму статистически независимых гауссовской и релеевской случайных величин, можно использовать известное *точное* выражение [8]:

$$F_m(h) = \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{1-\vartheta}}\right) - \sqrt{\vartheta}\, \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\, \Phi\left(\frac{u\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{1-\vartheta}}\right). \tag{23}$$

Отметим, что функция распределения $F_m(h)$ должна уменьшаться с увеличением величины m_l, т.е. с увеличением ширины интервала определения $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ случайного процесса. Поэтому выражение (23) можно интерпретировать как *верхнюю границу* функции распределения $F_m(h)$ при всех возможных значениях $m_l \geqslant 0$.

Сравнение формулы (20) с предельным выражением (23) показывает, что при малых значениях $m_l < 1$, когда ширина интервала определения $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ случайного процесса (1) не превышает времени его корреляции, выражение (20) дает существенно завышенные значения для функции $F_m(h)$ и (соответственно) заниженные значения для вероятности $\alpha(h) = 1 - F_m(h)$. При этом в предельном случае $m_l = 0$, когда интервал определения $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ стягивается в точку, формула (20) неприменима и дает значения $F_m(h) = 1$ и $\alpha(h) = 0$ при любых конечных h.

Это иллюстрирует рис. 2, где штриховыми линиями показаны зависимости вероятности α от нормированного порога u, рассчитанные по формуле (20) при $\vartheta = 0.5$ и различных значениях $m_l = 2.5$ (кривая 1), $m_l = 1$ (кривая 2), $m_l = 0.5$ (кривая 3) и $m_l = 0.2$ (кривая 4). Там же пунктирной линией P показана предельная зависимость $\alpha(u)$ для случая $m_l = 0$, рассчитанная по формуле (23) и являющаяся нижней границей для вероятности α. Кривые зависимостей $\alpha(u)$ при всех возможных значениях $m_l > 0$ должны идти выше предельной кривой P. Однако штриховые линии 3, 4 на рис. 2, соответствующие случаю $m_l < 1$, идут существенно ниже, чем допустимая нижняя граница P.

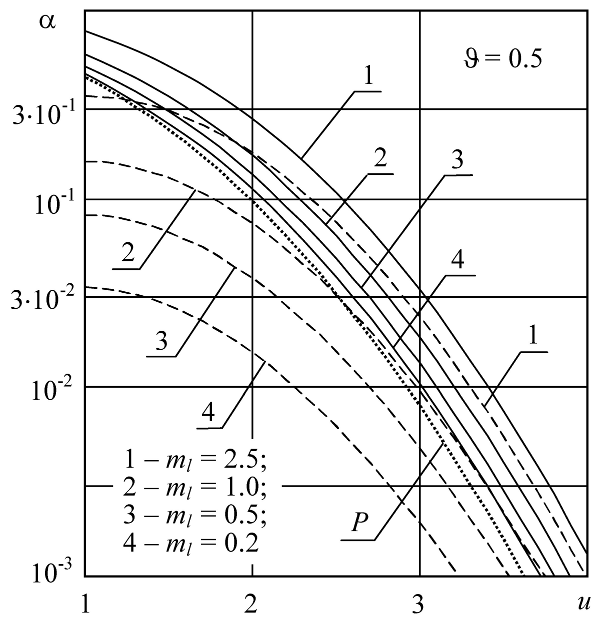

Рис. 2. *Сравнение аппроксимаций для вероятности превышения порога при различной ширине интервала определения случайного процесса*

Указанные недостатки формулы (20) можно устранить, если использовать *метод локально-аддитивной аппроксимации* (ЛАА). В [15–18] рассмотрено применение метода ЛАА для вычисления характеристик совместных оценок максимального правдоподобия [9, 11] параметров радиофизических сигналов, наблюдаемых на фоне помех. Расчет этих характеристик предполагает исследование распределений величины и положения абсолютных максимумов решающей статистики, представляющей собой гауссовское случайное поле. В [13] рассмотрено применение метода ЛАА для вычисления функции распределения величины абсолютного максимума нерегулярного однородного гауссовского случайного поля, а в [19] – обобщенного винеровского случайного поля, которое относится к классу неоднородных гауссовских случайных полей. Наконец, в [8] методом ЛАА получены выражения для функции распределения величины абсолютного максимума суммы статистически независимых нерегулярных гауссовского и релеевского стационарных случайных процессов. Применим теперь метод ЛАА для вычисления функции распределения величины абсолютного максимума суммы (1) *регулярных* гауссовского и релеевского случайных процессов (2) и (3).

3. РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНО-АДДИТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Представление величины абсолютного максимума. Найдем асимптотически точное (с ростом h) выражение для функции распределения $F_m(h)$ величины L_m (6) абсолютного максимума случайного процесса $L(l)$ (1). Для этого воспользуемся представлением (9) случайной величины L_m как величины абсолютного максимума гауссовского однородного случайного поля $L_Э(l,\,\varphi)$ (10).

Как известно [3, 8, 10, 12, 13 и др.], вероятность превышения (или не превышения) высокого уровня h реализацией однородного случайного поля определяется *локальным представлением* статистических характеристик этого поля *в малой окрестности* произвольной точки из области определения Θ. С другой стороны, для полного статистического описания гауссовского случайного поля достаточно рассматривать его *математическое ожидание* (МО) и *корреляционную функцию* (КФ) [5, 6]. Поэтому функция распределения $F_m(h) = \mathrm{P}[L_m < h]$ величины абсолютного максимума L_m однородного гауссовского поля $L_Э(l,\,\varphi)$ (10) при больших значениях h определяется только МО этого поля M_0 и поведением КФ $K(\Delta l,\,\Delta\varphi)$ этого поля в малой окрестности значений $\Delta l = 0$, $\Delta\varphi = 0$.

Согласно методу ЛАА [8, 13], представим КФ $K(\Delta l,\,\Delta\varphi)$ (12) случайного поля (10) при $|\Delta| \to 0$, $|\Delta\varphi| \to 0$ в виде суммы

$$K(\Delta l,\,\Delta\varphi) = K_0(\Delta l) + K_1(\Delta\varphi\,) + o(\Delta l^2) + o(\Delta\varphi^2), \tag{24}$$

где функции $K_0(\Delta l)$ и $K_1(\Delta\varphi)$ допускают асимптотические представления

$$K_0(\Delta l) = \sigma^2 \frac{2-\vartheta}{2}\,\left[1 - \frac{2\eta}{2-\vartheta}\,\Delta l^2 + o(\Delta l^2)\right] \text{ при } |\Delta l| \to 0,$$

$$K_1(\Delta\varphi) = \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\,\left[\,1 - \Delta\varphi^2 + o(\Delta\varphi^2)\right] \text{ при } |\Delta\varphi| \to 0, \tag{25}$$

а параметры η и ϑ определяются из (14). Функции $K_0(\Delta l)$, $K_1(\Delta\varphi)$ (25), входящие в (24), можно рассматривать как КФ стационарных случайных процессов.

Введем совместно гауссовские статистически независимые стационарные центрированные случайные процессы $L_{Э0}(l)$ и $L_{Э1}(\varphi)$ с КФ $K_0(\Delta l)$ и $K_1(\Delta\varphi)$ соответственно, которые допускают асимптотические представления

$$\begin{aligned} K_0(\Delta l) &= \sigma^2_{Э0}\left[1 - \eta_0\,\Delta l^2 + o(\Delta l^2)\right] \text{ при } |\Delta l| \to 0,\\ K_1(\Delta\varphi) &= \sigma^2_{Э1}\left[\,1 - \Delta\varphi^2 + o(\Delta\varphi^2)\right] \text{ при } |\Delta\varphi| \to 0, \end{aligned} \tag{26}$$

причем $K_0(\Delta l)/\sigma^2_{Э0} < 1$ при всех $|\Delta l| > 0$, $K_1(\Delta\varphi)/\sigma^2_{Э1} < 1$ при всех $|\Delta\varphi| > 0$, а также $K_0(\Delta l) \to 0$ при $|\Delta l| \to \infty$, $K_1(\Delta\varphi) \to 0$ при $|\Delta\varphi| \to \infty$. Здесь обозначено

$$\sigma^2_{Э0} = \sigma^2(2-\vartheta)/2, \quad \sigma^2_{Э1} = \sigma^2\vartheta/2 \tag{27}$$

— дисперсии случайных процессов $L_{Э0}(l)$ и $L_{Э1}(\varphi)$, причем $\sigma^2_{Э0} + \sigma^2_{Э1} = \sigma^2$, а

$$\eta_0 = 2\eta/(2-\vartheta). \tag{28}$$

Согласно (24), корреляционные функции гауссовского случайного поля $L_Э(l,\varphi)$ и суммы случайных процессов $L_{Э0}(l)$ и $L_{Э1}(\varphi)$ асимптотически совпадают при $|\Delta l| \to 0$, $|\Delta\varphi| \to 0$. Тогда функция распределения $F_m(h)$ абсолютного максимума L_m случайного поля $L_Э(l,\varphi)$

асимптотически (с ростом h) совпадает с функцией распределения эквивалентной случайной величины

$$L_{Эm} = M_0 + L_{m0} + L_{m1}, \tag{29}$$

где M_0 — математическое ожидание гауссовской компоненты (2) случайного процесса (1), а L_{m0} и L_{m1} — статистически независимые случайные величины

$$L_{m0} = \sup_{l\,\in[\Lambda_1;\,\Lambda_2]} L_{Э0}(l), \quad L_{m1} = \sup_{\varphi\,\in[-\pi;\,\pi]} L_{Э1}(\varphi), \tag{30}$$

представляющие собой величины абсолютных максимумов случайных процессов $L_{Э0}(l)$ и $L_{Э1}(\varphi)$ на интервалах $l \in [\Lambda_1;\, \Lambda_2]$ и $\varphi \in [-\pi;\, \pi]$ соответственно. Иными словами, величина абсолютного максимума L_m случайного поля $L_Э(l,\varphi)$ (10) сходится по распределению к случайной величине $L_{Эm}$ (29) при $h \to \infty$

Таким образом, согласно методу ЛАА [8, 13], для вычислении асимптотически точного (с ростом h) выражения функции распределения $F_m(h)$ можно случайное поле $L_Э(l,\varphi)$ (10) заменить на сумму $M_0 + L_{Э0}(l) + L_{Э1}(\varphi)$ случайных процессов $L_{Э0}(l)$, $L_{Э1}(\varphi)$ и постоянной M_0. При этом величину L_m абсолютного максимума случайного поля $L_Э(l,\varphi)$ можно заменить эквивалентной случайной величиной $L_{Эm}$ (29), представляющей собой сумму случайных величин L_{m0}, L_{m1} (30) и постоянной M_0.

Распределение абсолютного максимума. Обозначим $F_0(x) = \mathrm{P}[L_{m0} < x]$ и $F_1(x) = \mathrm{P}[L_{m1} < x]$ – функции распределения величин L_{m0} и L_{m1} абсолютных максимумов случайных процессов $L_{Э0}(l)$ и $L_{Э1}(\varphi)$ на интервалах $l \in[\Lambda_1;\, \Lambda_2]$ и $\varphi \in [-\pi;\, \pi]$ соответственно, а $W_1(x) = dF_1(x)/dx$ — плотность вероятности величины L_{m1}. Тогда, с учетом статистической независимости случайных величин L_{m0} и L_{m1}, функцию распределения $F_m(h)$ суммы (29) можно представить в виде свертки [5, 6]

$$F_m(h) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_0(h - x - M_0)\, W_1(x)\, dx \tag{31}$$

функции распределения $F_0(x)$ и плотности вероятности $W_1(x)$ абсолютных максимумов гауссовских случайных процессов $L_{Э0}(l)$ и $L_{Э1}(\varphi)$.

Точные выражения для функции распределения $F(x)$ и плотности вероятности $W(x)$ абсолютного максимума стационарного гауссовского случайного процесса *при произвольных* интервалах определения и уровнях x *неизвестны.* Однако при нахождении асимптотически точного (с ростом h) выражения для функции распределения $F_m(h)$ (31) можно ограничиться [8, 11, 13] использованием асимптотически точных (с ростом x) аппроксимаций для функций $F_0(x)$ и $W_1(x)$. Такие выражения можно записать на основе [1, 3, 4, 7, 10–12, 14 и др.].

Аппроксимации для функции распределения абсолютного максимума гауссовского процесса. Пусть имеется стационарный центрированный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с единичной дисперсией и с корреляционной функцией $R(\tau)$, допускающей асимптотическое представление $R(\tau) = 1 - a\,\tau^2 + o(\tau^2)$ при $|\tau| \to 0$. Пусть задан интервал $t \in [T_1;\, T_2]$ определения случайного процесса $\xi(t)$, на котором вычисляется величина его абсолютного максимума $L = \sup \xi(t)$. При этом приведенная ширина m интервала определения $[T_1;T_2]$ случайного процесса $\xi(t)$ будет равна [10, 11]

$$m = \frac{T_2 - T_1}{\delta} = \sqrt{2a}\,(T_2 - T_1), \quad \delta = 1 \Bigg/ \sqrt{-\frac{\partial^2 R(\tau)}{\partial \tau^2}\quad\Bigg|_{\tau=0}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}. \tag{32}$$

Используя [1, 3, 4, 7, 10–12, 14 и др.], запишем несколько *асимптотически точных (с ростом x)* аппроксимаций для функции распределения $F(x,m) = P[L < x]$ абсолютного максимума L случайного процесса $\xi(t)$ на интервале $[T_1;T_2]$.

Формула А. Используя [3, 12], для функции $F(x,m)$ получаем аппроксимацию

$$F_{\mathrm{A}}(x,m) = 1 - \frac{m}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ при } x \geqslant 0. \tag{33}$$

Отметим, что метод [3] получения выражения (33) предполагает, что приведенная ширина m (32) интервала определения $[T_1;T_2]$ не слишком велика [10, 11]. Поэтому с ростом приведенной ширины m точность выражения (33) уменьшается при малых и умеренных значениях x. Для обеспечения удовлетворительной точности формулы (33) с ростом m требуются всё большие значения уровня x.

Отметим также, что при $m > 2\pi\exp(x^2/2)$ из (33) получаем $F_{\mathrm{A}}(x,m) < 0$, что противоречит смыслу функции распределения. Поэтому аппроксимацию (33) следует ограничивать снизу величиной $F_{\mathrm{A}}(x,m) = 0$, что необходимо сделать при $x < x_{\mathrm{A}}$, где x_{A} является решением уравнения $F_{\mathrm{A}}(x,m) = 0$ по переменной x при $x > 0$.

Формула В. Для повышения точности выражения (33) при больших значениях m и малых значениях x можно использовать метод [10, 11]. В частности величину $\Pi(x,m) = (m/2\pi)\exp(-x^2/2)$ можно интерпретировать как среднее число выбросов случайного процесса $\xi(t)$ за уровень x на интервале $[T_1;\, T_2]$. При этом распределение числа выбросов процесса $\xi(t)$ за уровень x сходится к закону Пуассона с увеличением x [3]. Тогда, аналогично (17), для функции $F(x,m)$ можно записать

$$F_{\mathrm{B}}(x,m) = \exp[-\Pi(x,m)] = \exp\left[-\frac{m}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \text{ при } x \geqslant 0. \tag{34}$$

Сравнение выражений (33) и (34) показывает, что формула (34) обладает более высокой точностью при больших значениях m и при небольших значениях x. При этом функция $F_B(x,m)$ неотрицательна при всех возможных значениях x и m, что соответствует свойствам функции распределения. При больших уровнях x результаты расчетов по формулам (33) и (34) практически совпадают.

Замечание. Общим недостатком формул (33), (34) является *пренебрежение* “*краевыми эффектами*”, т.е. вероятностью P_K нахождения абсолютного максимума случайного процесса $\xi(t)$ на границах $t = T_1$ или $t = T_2$ интервала определения $[T_1;T_2]$. Если приведенная ширина m интервала определения $[T_1;T_2]$ достаточно велика (т. е. $m >> 1$), то вероятность P_K пренебрежимо мала. Однако с уменьшением ширины интервала $[T_1;\, T_2]$ вероятность P_K возрастает и при малых значениях m этой вероятностью пренебречь уже нельзя. Поэтому формулы (33), (34), как и формула (20), обладают низкой точностью при малых значениях m. При m =0, когда интервал $[T_1;\, T_2]$ стягивается в точку, а случайный процесс $\xi(t)$ вырождается в случайную величину, формулы (33), (34) неприменимы.

Формула С. Для учета “краевых эффектов” можно воспользоваться результатами работ [4, 14 и др.]. В частности, из [4, 14] получаем уточненное (по сравнению с (33)) выражение для функции распределения

$$F_{\mathrm{C}}(x,\, m) = \Phi(x) - \frac{m}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt. \tag{35}$$

Здесь $\Phi(x)$ — интеграл вероятности, задающий функцию распределения центрированной гауссовской случайной величины с единичной дисперсией [5, 6]. В отличие от (33), формула (35) применима *при малом* и даже *нулевом* значении m. При $m = 0$, когда случайный процесс $\xi(t)$ вырождается в гауссовскую случайную величину, из (35) получаем правильный результат $F_{\mathrm{C}}(x,0) = \Phi(x)$.

Однако при малых и умеренных значениях x точность выражения (35), как и (33), уменьшается с ростом ширины m. Для обеспечения удовлетворительной точности формулы (35) с ростом m требуются всё большие значения x. Кроме того, при больших значениях $m > 2\pi\Phi(x)\exp(x^2/2)$ из (35) получаем $F_{\mathrm{C}}(x,m) < 0$, что противоречит смыслу функции распределения. Поэтому аппроксимацию (35) следует ограничить снизу величиной $F_{\mathrm{C}}(x,m) = 0$, что необходимо сделать при $x < x_{\mathrm{C}}$, где x_{C} — наибольший корень уравнения $F_{\mathrm{C}}(x,m) = 0$ по переменной x.

Формула D. Для повышения точности формулы (35) при больших значениях m можно использовать методику [10, 11], как это сделано в (34). Тогда, аналогично (34), для функции $F(x,m)$ получаем аппроксимацию

$$F_{\mathrm{D}}(x,m) = \Phi(x) - 1 + \exp\left[-\frac{m}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]. \tag{36}$$

Формула (36) имеет бо́льшую точность, чем формула (35), при больших значениях m и при малых (и умеренных) значениях x. При больших значениях x результаты расчетов по формулам (35) и (36) практически совпадают.

Формулу (36), как и (35), следует ограничивать снизу величиной $F_D(x,m) = 0$, чтобы исключить отрицательные значения функции $F_D(x,m)$ при малых x. Действительно, при $m > 2\pi\ln[1-\Phi(x)]\exp(x^2/2)$ из (36) получаем $F_D(x,m) < 0$. Ограничение следует вводить при $x < x_D$, где x_D — наибольший корень уравнения $F_D(x,m) = 0$ по переменной x.

Отметим, что формула (36) несколько отличается от предложенной в [10, 11]. Хотя формула [10, 11] и не требует ограничения снизу, как формула (36), но она обладает меньшей точностью при малых и умеренных значениях x.

Применение аппроксимаций. Используем далее выражения (35), (36), которые применимы при любых (в т.ч. при малых и нулевых) значениях приведенной ширины m интервала определения случайного процесса.

При получении выражения для функции распределения $F_0(x)$ абсолютного максимума L_{m0} случайного процесса $L_{Э0}(l)$ на интервале $l \in [\Lambda_1;\Lambda_2]$ воспользуемся формулой (36). Введем приведенную ширину $m_{Эl}$ интервала определения $[\Lambda_1;\Lambda_2]$ случайного процесса $L_{Э0}(l)$, которая определяется как [8, 10, 11]

$$m_{Эl} = \frac{\lambda_l}{\delta_{Эl}} = (\Lambda_2 - \Lambda_1)\sqrt{2\eta_0}, \quad \delta_{Эl} = 1 \Bigg/ \sqrt{-\frac{1}{K_0(0)}\frac{\partial^2 K_0(l)}{\partial l^2}\quad\Bigg|_{l=0}} = \frac{1}{\sqrt{2\eta_0}}. \tag{37}$$

Здесь величина $\delta_{Эl}$ характеризует ширину интервала корреляции случайного процесса $L_{Э0}(l)$. При этом, согласно (19), (28) получаем $m_{Эl} = m_l\sqrt{2/(2-\vartheta)}$. Тогда из формулы (36) (с учетом ее ограничения снизу) получаем

$$F_0(x) = \max\left\{0;\ F_{\mathrm{D}}\left(\frac{x}{\sigma_{Э0}}, m_{Эl}\right)\right\} = \begin{cases} F_{\mathrm{D}}\left(\frac{x}{\sigma_{Э0}}, m_{Эl}\right) & \text{при } \frac{x}{\sigma_{Э0}} \geqslant u_0; \\ 0 \quad \text{при } x/\sigma_{Э0} < u_0; \end{cases} \tag{38}$$

где $F_D(x,m)$ определяется из (36), а $u = u_0$ — наибольший корень уравнения

$$\Phi(u) - 1 + \exp\left[-\frac{m}{2\pi}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] = 0 \text{ при } m = m_l\sqrt{\frac{2}{2-\vartheta}}. \tag{39}$$

Запишем теперь выражение для функции распределения $F_1(x)$ абсолютного максимума L_{m1} случайного процесса $L_{Э1}(\varphi)$ на интервале $\varphi \in [-\pi;\pi]$. Введем в рассмотрение приведенную ширину $m_{Э\varphi}$ интервала определения $[-\pi;\pi]$ случайного процесса $L_{Э1}(\varphi)$, которая, аналогично (37), определяется как [8, 10, 11]

$$m_{Э\varphi} = \frac{\lambda_\varphi}{\delta_{Э\varphi}} = 2\pi\sqrt{2}, \quad \delta_{Э\varphi} = 1 \bigg/ \sqrt{-\frac{1}{K_1(0)}\frac{\partial^2 K_1(\varphi)}{\partial\varphi^2}\bigg|_{\varphi=0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{40}$$

Здесь величина $\delta_{Э\varphi}$ определяет ширину интервала корреляции случайного процесса $L_{Э1}(\varphi)$. Из (40) следует, что приведенная ширина $m_{Э\varphi}$ не слишком велика. Поэтому для нахождения функции распределения $F_1(x)$ можно использовать более простую формулу (35), обладающую хорошей точностью при умеренных значениях m. Тогда из формулы (35) (с учетом ее ограничения снизу) получаем

$$F_1(x) = \max\left\{0;\ F_C\left(\frac{x}{\sigma_{Э1}}, m_{Э\varphi}\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c} F_C\left(\frac{x}{\sigma_{Э1}}, m_{Э\varphi}\right) \quad \text{при } \frac{x}{\sigma_{Э1}} \geqslant u_1; \\ 0 \quad \text{при } x/\sigma_{Э1} < u_1; \end{array}\right. \tag{41}$$

где $F_C(x,m)$ определяется из (35), а $u = u_1$ — наибольший корень уравнения

$$\Phi(u) - \sqrt{2}\exp(-u^2/2) = 0, \tag{42}$$

с точностью до четвертого знака равный $u_1 \approx 1.015$.

Дифференцируя выражение (41) по переменной x, находим аппроксимацию плотности вероятности $W_1(x) = dF_1(x)/dx$ абсолютного максимума L_{m1} случайного процесса $L_{Э1}(\varphi)$ на интервале $\varphi \in [-\pi;\pi]$:

$$W_1(x) == \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{\sigma_{Э1}} W_C\left(\frac{x}{\sigma_{Э1}}, m_{Э\varphi}\right) \quad \text{при } \frac{x}{\sigma_{Э1}} \geqslant u_1; \\ 0 \quad \text{при } x/\sigma_{Э1} < u_1; \end{array}\right. \tag{43}$$

$$W_C(x,m) = \frac{d}{dx}F_C(x,m) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{mx}{2\pi}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Подставляя выражения (38), (43) в (31), окончательно получаем

$$F_m(h) = \int\limits_{u_1}^{\infty} \max\left[0;\ F_R(u,y)\right]\ W_R(y)\,dy = \int\limits_{u_1}^{u\sqrt{\frac{2}{\vartheta}} - u_0\sqrt{\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}} F_R(u,y)\ W_R(y)\,dy \text{ при } u \geqslant u_m,$$

$$F_m(h) = 0 \text{ при } u < u_m, \tag{44}$$

где $u_m = u_1\sqrt{\frac{\vartheta}{2}} + u_0\sqrt{\frac{2-\vartheta}{2}}$, $W_R(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{2}y\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$,

$$F_R(u,y) = \exp\left[-\frac{m_l}{\pi\sqrt{2(2-\vartheta)}}\exp\left(-\frac{(u\sqrt{2} - y\sqrt{\vartheta})^2}{2(2-\vartheta)}\right)\right] + \Phi\left(\frac{u\sqrt{2} - y\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{2-\vartheta}}\right) - 1.$$

Здесь $u = (h - M_0)/\sigma$ — нормированный порог, $u = u_0$ — наибольший корень уравнения (39), а $u_1 \approx 1.015$ — наибольший корень уравнения (42).

Выражение (44) является асимптотически точным с увеличением нормированного порога u. При этом формула (44), в отличие от формулы (20), применима при всех возможных значениях $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, характеризующих вклад релеевской компоненты (3) в случайный процесс (1), а также при всех возможных значениях $m_l \geqslant 0$ приведенной ширины интервала определения случайного процесса (1).

Предельные случаи. **1.** Пусть имеется *только гауссовская компонента*, а релеевская компонента отсутствует, т.е. $\sigma_1 = 0$. В этом случае в выражении (44) следует положить $\vartheta = 0$. Тогда формула (44) переходит в известную формулу

$$F_m(h) = \max[0;\ F_{\mathrm{D}}(u,m_l)] = \begin{cases} \Phi(u) - 1 + \exp\left[-\frac{m_l}{2\pi}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] & \text{при } u \geqslant u_0\,; \\ 0 \quad \text{при } u < u_0\,; \end{cases} \tag{45}$$

которая является уточнением (с учетом “краевых” эффектов) формулы (22) для функции распределения абсолютного максимума гауссовского стационарного случайного процесса. Это является достоинством формулы (44) по сравнению с формулой (20), которая неприменима в случае $\vartheta = 0$, а также имеет низкую точность при $\vartheta << 1$. Кроме того, формула (44), в отличие от формулы (20), применима при любом (в т.ч. при малом или нулевом) значении ширины m_l (16).

2. Пусть теперь имеется *только релеевская компонента*, а гауссовския компонента процесса (1) отсутствует, т. е. $\sigma_0 = 0$. Тогда в (44) нужно положить $\vartheta = 1$. Получаемая при этом формула асимптотически (с ростом u) совпадает с известной формулой (21) для функции распределения абсолютного максимума релеевского стационарного случайного процесса. Вместе с тем, формула (44), в отличие от формулы (21), учитывает “краевые” эффекты и применима при любом (в т. ч. при малом или нулевом) значении m_l (16).

3. Отметим, что при $m_l = 0$ можно также использовать точную формулу (23) для функции распределения $F_m(h)$, которая получена в [8].

4. СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сравнение полученных выражений. Сравним полученные выше выражения (20), (44) для функции распределения $F_m(h)$ при разных значениях ϑ (14) и m_l (16). Напомним, что более простая формула (20) получена на основе выражения для среднего числа выбросов гауссовского случайного поля, а более сложная формула (44) — методом локально-аддитивной аппроксимации (ЛАА).

На рис. 1, 2 сплошными линиями нанесены зависимости вероятности $\alpha(h) = 1 - F_m(h)$ от нормированного порога $u = (h - M_0)/\sigma$, рассчитанные по формуле (44), а штриховыми линиями – по формуле (20). Кривые на рис. 1 построены при $m_l = 10$ и различных значениях $\vartheta = 0.6$ (кривая 1), $\vartheta = 0.1$ (кривая 2) и $\vartheta = 0.002$ (кривая 3). Кривые на рис. 2 построены при $\vartheta = 0.5$ и различных значениях $m_l = 2.5$ (кривая 1), $m_l = 1$ (кривая 2), $m_l = 0.5$ (кривая 3) и $\vartheta = 0.2$ (кривая 4). Пунктирными линиями на рис. 1 показаны предельные зависимости $\alpha(h)$ при $\vartheta = 1$ (кривая R) и $\vartheta = 0$ (кривая G), рассчитанные по формулам (21), (22) соответственно, которые можно рассматривать как верхнюю и нижнюю границы вероятности $\alpha(h)$ для всех возможных значений ϑ. Пунктирной линией на рис.2 показана предельная зависимость $\alpha(h)$ для случая $m_l = 0$ (кривая P), рассчитанная по формуле (23), которая задает нижнюю границу вероятности $\alpha(h)$ для всех возможных m_l.

Из рис. 1 видно, что сплошные линии, рассчитанные по формуле (44), находятся между предельными кривыми R и G при всех значениях ϑ. Однако штриховая линия 3, рассчитанная по формуле (20) и соответствующая $\vartheta = 0.002$, выходит за нижнюю границу G. При этом формула (20) при малых $\vartheta < 0.01 - 0.02$ дает существенно заниженные значения α, которые при небольших уровнях u выходят за нижнюю границу G. Чем меньше отношение ϑ, тем большие значения уровня u требуются для обеспечения удовлетворительной точности формулы (20). При $\vartheta = 0$ формула (20) вообще неприменима и дает неверные результаты. Вместе с тем формула (44) справедлива при всех возможных значениях $\vartheta \in [0; 1]$.

Из рис. 2 видно, что сплошные линии, рассчитанные по формуле (44), проходят выше предельной кривой P при всех значениях m_l. Однако штриховые линии 2-4, рассчитанные по формуле (20) при $m_l \leqslant 1$, выходят за нижнюю границу P. При этом формула (20) при малых $m_l \leqslant 1$ дает существенно заниженные значения α, которые при небольших уровнях u выходят за нижнюю границу P. Чем меньше величина m_l, тем большие значения уровня u требуются для обеспечения удовлетворительной точности формулы (20). При $m_l = 0$ формула (20) вообще неприменима и дает неправильные результаты. С другой стороны, формула (44) справедлива при всех возможных значениях $m_l \geqslant 0$.

Поэтому формула (44), полученная методом ЛАА, является более предпочтительной, особенно при малых и умеренных значениях u, ϑ (14) и m_l (16).

Результаты статистического моделирования. С целью проверки точности полученных выше формул (20), (44), а также для установления границ применимости этих формул при разных значениях u, ϑ и m_l, выполнялось статистическое моделирование на ЭВМ величины L_m абсолютного максимума случайного процесса $L(l)$ (1) на интервалах определения различной длительности $\lambda_l = \Lambda_2 - \Lambda_1$.

В процессе моделирования формировались реализации гауссовской $L_0(l)$ (2) и релеевской $L_1(l)$ (3) компонент случайного процесса $L(l)$ при нулевом математическом ожидании $M_0 = 0$ и единичной дисперсии $\sigma^2 = 1$. Величина ϑ (14), характеризующая относительный вклад релеевской компоненты (3) в результирующий случайный процесс (1), выбиралась в пределах от 0 до 1. При этом КФ $R_0(l)$ и $R_1(l)$ гауссовской компоненты $L_0(l)$, а также квадратур $L_{11}(l)$, $L_{12}(l)$ релеевской компоненты $L_1(l)$, выбирались одинаковыми и равными $R(l) = \exp(-l^2)$. Такие КФ удовлетворяют (5) и соответствуют случаю $a_0 = a_1 = 1$, $\eta = 1$, $m_l = \lambda_l\sqrt{2}$.

В процессе моделирования с заданным шагом $\Delta l = 0.1$ формировались отсчеты $L_j = L(j\,\Delta l)$ реализаций случайного процесса $L(l)$ (1) на интервале $l \in [0; \lambda_l]$ заданной длительности $\lambda_l = m_l/\sqrt{2}$. Отсчеты формировались в дискретные моменты времени $l_j = j\,\Delta l$ для всех $j = 1, 2, .., \{\lambda_l/\Delta l\}$, где $\{\}$ означает целую часть числа. При этом, согласно (4), отсчеты L_j вычислялись по формуле

$$L_j = \sigma_0\,\xi_{0j} + \sigma_1\sqrt{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} = \sqrt{1-\vartheta}\,\xi_{0j} + \sqrt{\vartheta}\sqrt{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2}, \tag{46}$$

где $\xi_{0j} = \xi_0(j\,\Delta l)$, $\xi_{1j} = \xi_{11}(j\,\Delta l)$, $\xi_{2j} = \xi_{12}(j\,\Delta l)$ — отсчеты центрированных гауссовских стационарных случайных процессов $\xi_0(l)$, $\xi_{11}(l)$, $\xi_{12}(l)$ с корреляционными функциями $R(l)$. Шаг $\Delta l = 0.1$ обеспечил среднеквадратическую погрешность $\varepsilon = \sqrt{2\,[1 - R(\Delta l/2)]}$ ступенчатой аппроксимации случайных процессов с помощью их отсчетов не более, чем $\varepsilon = 0.07$ (т. е. 7 %).

Отсчеты ξ_{0j}, ξ_{1j}, ξ_{2j} вычислялись методом скользящего суммирования [20]

$$\xi_{nj} = \sum_{k=-p}^{p} C_k\, g_{n(j-k+p)}, \quad C_k = \sqrt{\frac{2\,\Delta l}{\sqrt{\pi}}}\exp(-2\Delta l^2 k^2), \quad n = 0, 1, 2. \tag{47}$$

Здесь g_{ni}, $i = 1, 2, \ldots, \{\lambda_l/\Delta l\} + 2p$ — последовательность статистически независимых гауссовских случайных чисел с нулевым МО и единичной дисперсией, формируемых согласно [8], а p определяет количество $2p + 1$ случайных чисел g_{ni} (и, соответственно, весовых коэффициентов C_k), с помощью которых формируется один отсчет ξ_{nj} (47). Величина p выбиралась из условия $|C_p/C_0| \leqslant \delta \approx 0.01$, что при $\Delta l = 0.1$ соответствует $p = 15$. Такое значение p ограничивает последовательность весовых коэффициентов C_k на уровне 0.01 от максимального. Это соответствует отбрасыванию "хвостов" корреляционной функции $R(l)$, не превышающих $\delta^2 \approx 10^{-4}$. При этом относительное отклонение дисперсии формируемых отсчетов ξ_{nj} от дисперсии моделируемых процессов не превышает $\varepsilon_0^2 \approx 10^{-5}$.

В процессе моделирования для каждой выбранной пары значений (m_l, ϑ) формировались не менее $N = 10^5$ независимых реализаций $L(l)$ в виде отсчетов L_j при $j = 1, 2, .., \{\lambda_l/\Delta l\}$.

При этом использовался метод зависимых испытаний [20], когда отсчеты L_j при разных значениях ϑ вычислялись по формуле (46) на основе одних и тех же реализаций отсчетов ξ_{nj}. Затем для каждой реализации $L(l)$ определялась величина абсолютного максимума L_m как величина наибольшего отсчета L_j для всех $j = 1, 2, .., \{\lambda_l/\Delta l\}$. На основе полученного массива из N значений L_m для каждой пары параметров (m_l, ϑ) вычислялась экспериментальная вероятность $\alpha(u) = 1 - F_m(u)$ для разных u как относительная частота превышения порога u величиной L_m. При этом с вероятностью $P_d = 0.9$ границы доверительных интервалов отклонялись от экспериментальных значений вероятности α не более, чем на $\delta = 0.016$ (1.6 %) при $\alpha > 0.1$, а также не более, чем на $\delta = 0.052$ (5.2 %), при $\alpha > 0.01$ и не более, чем на $\delta = 0.17$ (17 %), при $\alpha > 0.001$ [8].

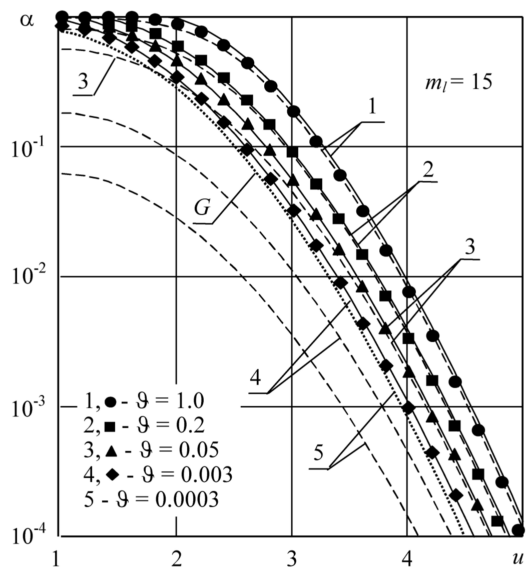

Рис. 3. *Вероятность превышения порога при различном вкладе релеевского процесса*

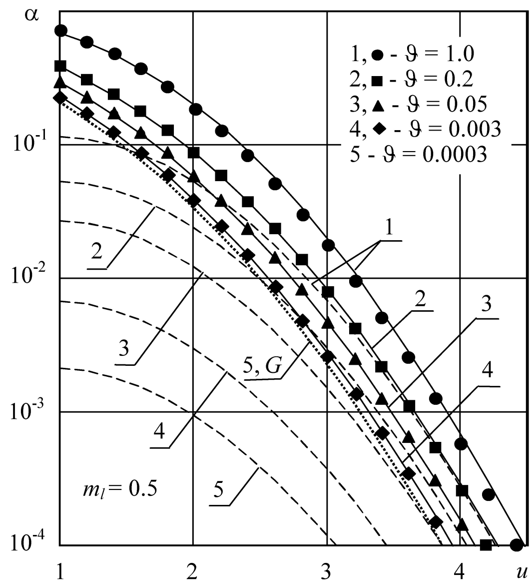

Рис. 4. *Вероятность превышения порога при различном вкладе релеевского процесса*

Некоторые экспериментальные значения α, полученные при моделировании, нанесены знаками на рис. 3–6. Там же сплошными линиями показаны соответствующие теоретические зависимости $\alpha(u)$ полученные с помощью формулы (44), штриховыми линиями – с помощью формулы (20).

Зависимости на рис. 3–4 получены при $m_l = 15$ (рис. 3), $m_l = 0.5$ (рис. 4) и при различных значениях $\vartheta = 1$ (кривые 1 и кружочки), $\vartheta = 0.2$ (кривые 2 и квадраты), $\vartheta = 0.05$ (кривые 3 и треугольники), $\vartheta = 0.003$ (кривые 4 и ромбы) и $\vartheta = 0.0003$ (кривые 5). При этом экспериментальные значения α при $\vartheta = 0.0003$ мало отличаются от случая $\vartheta = 0.003$ (ромбы) и на рис. не показаны. Сплошные кривые 5 здесь также не показаны, так как они практически совпадают с пунктирными линиями G, рассчитанными при $\vartheta = 0$ по формуле (22) и задающими нижнюю границу вероятности α. Зависимости на рис. 5–6 получены при $\vartheta = 0.2$ (рис. 5), $\vartheta = 0.7$ (рис. 6) и при различных значениях $m_l = 7$ (кривые 1 и звездочки), $m_l = 3$ (кривые 2 и кружочки), $m_l = 1.5$ (кривые 3 и квадраты), $m_l = 0.5$ (кривые 4 и треугольники) и $m_l = 0.025$ (кривые 5 и ромбы). Пунктирными линиями на рис. 5–6 показана предельная зависимость $\alpha(h)$ (кривая P), рассчитанная при $m_l = 0$ по формуле (23) и задающая нижнюю границу вероятности α.

Из рис. 3–4 видно, что формула (20) при малых значениях $\vartheta \leqslant 0.01$ параметра ϑ (14), характеризующего вклад релеевской компоненты в случайный процесс, дает существенно

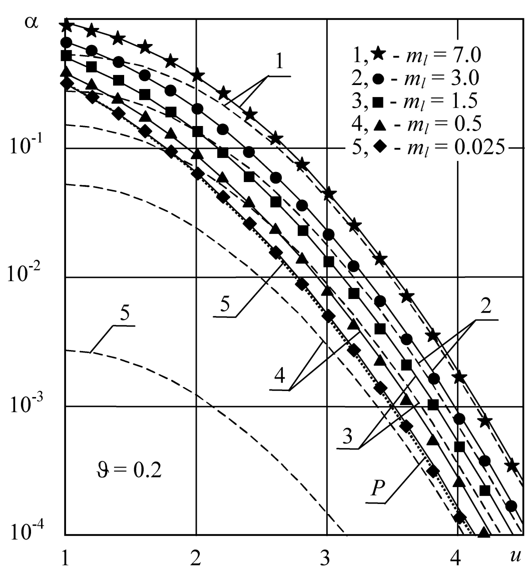

Рис. 5. *Вероятность превышения порога при различной ширине интервала определения случайного процесса*

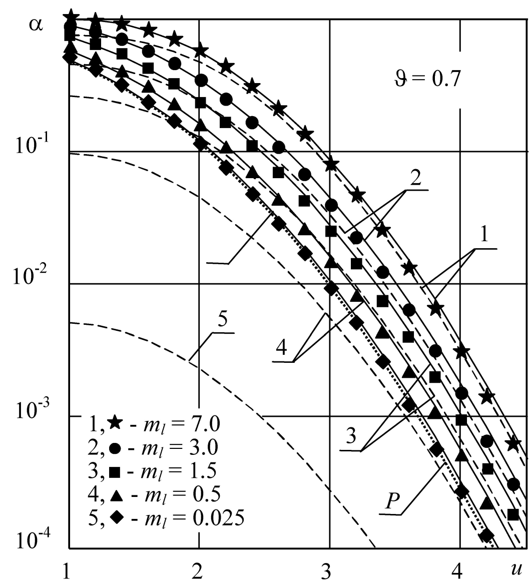

Рис. 6. *Вероятность превышения порога при различной ширине интервала определения случайного процесса*

заниженные значения вероятности α. Из рис. 5–6 также видно, что формула (20) при недостаточно больших значениях $m_l < 2-3$ приведенной ширины интервала определения m_l (16) дает существенно заниженные значения вероятности α. При этом погрешность формулы (20) тем больше, чем меньше значение нормированного уровня u. С другой стороны, формула (44) имеет высокую точность при всех возможных значениях m_l и ϑ.

ВЫВОДЫ. Таким образом, предпочтительной является формула (44), полученная методом локально-аддитивной аппроксимации и обладающая высоко точностью при всех возможных значениях параметров $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$ и $m_l \geqslant 0$. Более простая формула (20), полученная на основе выражения для среднего числа выбросов гауссовского поля, может быть использована только при $\vartheta \geqslant 0.05 - 0.1$ и $m_l > 2 - 3$, и обладает невысокой точностью при небольших значениях уровня $u < 2 - 3$.

Некоторые результаты и методы данной работы обсуждались на XXII Международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь” (RLNC-2016) [21]. Автор благодарит проф. Трифонова А. П. за конструктивные замечания и предложения по теме работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, В. И. Выбросы траекторий случайных процессов / В. И. Тихонов, В. И. Хименко. — М. : Наука, 1987. — 303 с.

2. Тихонов, В. И. Проблема пересечений уровней случайными процессами. Радиофизические приложения / В. И. Тихонов, В. И. Хименко // Радиотехника и электроника. — 1998. — Т. 43, № 5. — С. 501–523.

3. Питербарг, В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей / В. И. Питербарг. — М. : Изд–во МГУ, 1988. — 174 с.

4. Лидбеттер, М. Экстремумы случайных последовательностей и процессов / М. Лидбеттер, Г. Линдгрен, Х. Ротсен. — М. : Мир, 1989. — 392 с.

5. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. — М. : Радио и связь, 1982. — 624 с.

6. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. — М. : Радио и связь, 1989. — 656 с.

7. Тихонов, В. И. Выбросы случайных процессов / В. И. Тихонов. — М. : Наука, 1970. — 392 с.

8. Захаров, А. В. Распределение величины абсолютного максимума разрывного стационарного случайного процесса с релеевской и гауссовской компонентами / А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 34–48.

9. Ибрагимов, И. А. Асимптотическая теория оценивания / И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1979. — 528 с.

10. Теория обнаружения сигналов / П. С. Акимов, П. А. Бакут, В. А. Богданович [и др.]; под ред. П.А. Бакута. — М. : Радио и связь, 1984. — 440 с.

11. Трифонов, А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М. : Радио и связь, 1986. — 264 с.

12. Беляев, Ю. К. Распределение максимума случайного поля и его приложение к задачам надежности / Ю. К. Беляев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 77–84.

13. Трифонов, А. П. Распределение величины абсолютного максимума разрывного однородного случайного поля / А. П. Трифонов, А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2001. — № 1. — С. 51–58.

14. Питербарг, В. И. Сравнение функций распределения максимумов гауссовских процессов / В. И. Питербарг // Теория вероятностей и её применения. — 1981. — Т. 26, вып. 4. — С. 702–719.

15. Трифонов, А. П. Эффективность совместных оценок параметров сигналов при нарушении условий регулярности решающей статистики / А. П. Трифонов, А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2002. — № 1. — С. 59–68.

16. Захаров, А. В. Применение локально-аддитивной аппроксимации для анализа характеристик совместных оценок параметров сигналов при частичном нарушении условий регулярности решающей статистики / А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2004. — № 2. — С. 38–53.

17. Трифонов, А. П. Асимптотические характеристики совместных оценок параметров сигналов / А. П. Трифонов, А. В. Захаров, А. М. Воробьев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2003. — № 2. — С. 77–92.

18. Захаров, А. В. Оценка времени прихода флуктуирующего радиоимпульса с неизвестной интенсивностью / А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 25–40.

19. Трифонов, А. П. Асимптотические распределения абсолютного максимума обобщенного винеровского случайного поля / А. П. Трифонов, А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2001. — № 2. — С. 42–49.

20. Быков, В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В. В. Быков. — М. : Советское радио, 1971. — 328 с.

21. Захаров, А. В. Распределение величины абсолютного максимума суммы регулярных релеевского и гауссовского стационарных случайных процессов / А. В. Захаров // Радиолокация, навигация, связь. XXII Международная научно-техническая конференция 19–21 апреля 2016 г. Т. 1. — Воронеж, 2016. — С. 222–233.

REFERENCES

1. Tihonov V.I., Khimenko V.I. Level-crossing of trajectory of random processes. [Tixonov V.I., Ximenko V.I. Vybrosy traektorij slychainyx processov]. Moscow: Science, 1987, 303 p.

2. Tihonov V.I., Khimenko V.I. Level-crossing problems for stochastic processes in physics

and radio engineering: an overview. [Tixonov V.I., Ximenko V.I. Problema peresechenij urovnei sluchaynymi processami. Radiofizicheskie prilozheniya]. *Radiotexnika i elektronika — Journal of Communications Technology and Electronics*, 1998, vol. 43, no. 5, pp. 501–523.

3. Piterbarg V.I. Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields. [Piterbarg V.I. Asimptoticheskie metody v teorii gaussovskix processov i polei]. Moscow: Publishing house of Moscow State University, 1988, 174 p.

4. Leadbetter M.R., Lindgren G., Rotzen H. Extremes and related properties of random sequences and processes. [Lidbetter M.R., Lindgren G., Rotsen H. Ekstremumy sluchainyx posledovatel'nostei i processov]. Moscow: World, 1989, 392 p.

5. Tihonov V.I. Statistical radio engineering. [Tixonov V.I. Statisticheskaya radiotexnika]. Moscow: Radio and communications, 1982, 624 p.

6. Levin B.R. Theoretical basis of a statistical radio engineering. [Levin B.R. Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotexniki]. Moscow: Radio and communications, 1989, 656 p.

7. Tihonov V.I. Level-crossing of random processes. [Tixonov V.I. Vybrosy sluchainyx processov]. Moscow: Science, 1970, 392 p.

8. Zakharov A.V. Distribution of absolute maximum of unregular gomogeneous random process with Rayleigh and Gaussian components. [Zaxarov A.V. Raspredelenie velichiny absolyutnogo maksimuma razryvnogo stacionarnogo sluchainogo processa c releevskoi i gaussovskoi komponentami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 34–48.

9. Ibragimov I.A., Khasminskiy R.Z. Asymptotic theory of estimation. [Ibragimov I.A., Xas'minskij R.Z. Asimptoticheskaya teoriya ocenivaniya]. Moscow: Science, 1979, 528 p.

10. Akimov I.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. et. al. Theory of detection of signals. [Akimov I.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. i dr. Teoriya obnaruzheniya signalov]. Moscow: Radio and communications, 1984, 440 p.

11. Trifonov A. P., Shinakov Yu. S. Joint distinction of signals and an estimation of their parameters on a noise background. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ix parametrov na fone pomex]. Moscow: Radio and communications, 1986, 264 p.

12. Belyaev Yu.K. Distribution of a maximum of stochastic field and its application to a problems of reliability. [Belyaev Yu.K. Raspredelenie maksimuma sluchainogo polya i ego prilozhenie k zadacham nadezhnosti]. *Izvestiya AN SSSR. Texnicheskaya kibernetika — News of an academy of sciences of USSR. Technical cybernetics*, 1970, no. 2, pp. 77–84.

13. Trifonov A.P., Zakharov A.V. Distributions of absolute maximum of discontinuous homogeneous Gaussian random field. [Trifonov A.P., Zaxarov A.V. Raspredelenie velichiny absolyutnogo maksimuma razryvnogo odnorodnogo gaussovskogo sluchainogo polja]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2001, no. 1, pp. 51–58.

14. Piterbarg V.I. Comparison of distribution functions of maxima of Gaussian processes. [Piterbarg V.I. Sravnenie funkcij raspredeleniya maksimumov gaussovskix processov]. *Teoriya veroyatnostei i eyo primeneniya — Theory of probability and its applications*, 1981, vol. 26, iss. 4, pp. 702–719.

15. Trifonov A.P., Zakharov A.V. Efficiency of joint estimations of signal parameters with the violation of regularity conditions of a deciding statistics. [Trifonov A.P., Zaxarov A.V. Effektivnost' sovmestnyx ocenok parametrov signalov pri narushenii uslovij regulyarnosti reshayushei statistiki]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2002, no. 1, pp. 59–68.

16. Zakharov A.V. The application of local additive approximation for the analysis of joint estimation of signal parameters with partial violation of regularity conditions for deciding statistic. [Zaxarov A.V. Primenenie lokal'no-additivnoi approksimacii dlya analiza xarakteristik sovmestnyx

ocenok parametrov signalov pri chastichnom narushenii uslovij regulyarnosti reshayushei statistiki]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2004, no. 2, pp. 38–53.

17. Trifonov A.P., Zakharov A.V., Vorobjov A.M. Asymptotic characteristics of joint estimations of signal parameters. [Trifonov A.P., Zaxarov A.V., Vorob'yov A.M. Asimptoticheskie xarakteristiki sovmestnyx ocenok parametrov signalov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2003, no. 2, pp. 77–92.

18. Zakharov A.V. Estimation of time delay of fluctuated radiopulse with unknown intensity. [Zaxarov A.V. Ocenka vremeni prixoda fluktuiruyushhego radioimpul'sa s neizvestnoi intensivnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 25–40.

19. Trifonov A.P., Zakharov A.V. Asymptotic distributions of absolute maximum of generalized Wiener random field. [Trifonov A.P., Zaxarov A.V. Asimptoticheskie raspredeleniya absolyutnogo maksimuma obobshennogo vinerovskogo sluchainogo polya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2001, no. 2, pp. 42–49.

20. Bykov V.V. Digital modelling in a statistical radio engineering. [Bykov V.V. Cifrovoe modelirovanie v statisticheskoi radiotechnike]. Moscow: Soviet Radio, 1971, 328 p.

21. Zakharov A.V. Distribution of an absolute maximum of the sum of regular gomogeneous Rayleigh and Gaussian random processes. [Zaxarov A.V. Raspredelenie velichiny absolyutnogo maksimuma summy regulyarnyh releevskogo i gaussovskogo stacionarnyh sluchainyh processov]. *Radiolokaciya, navigaciya, svyaz'. XXII Mezhdunarodnaya nauchno-texnicheskaya konferenciya, Voronezh, 19-21 aprelya 2016 g. — Radiolocation, Navigation, Communication (RLNC-2016). Proceedings of XXII International scientific and technical conference, Voronezh*, 2016, vol. 1, pp. 222–233.

Захаров Александр Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: zakharov.vsu@mail.ru
Тел.: +7(473)220–89–16

Zakharov Alexander Victorovich, Candidate of physico-mathematical sciences, Associated Professor of the Department of Radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: zakharov.vsu@mail.ru
Tel.: +7(473)220–89–16