УДК 621.3.015.4

ПРОБЛЕМА СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАДИОЦЕПЕЙ

Н. Д. Бирюк[1], А. Ю. Кривцов[2]

[1] — *Воронежский государственный университет,*
[2] — *АО "Концерн "Созвездие"*

Поступила в редакцию 01.06.2016 г.

Аннотация. Анализ нелинейных и параметрических радиоцепей приводится либо к нелинейным, либо к линейным с переменными коэффициентами дифференциальным уравнениям. Их решения не выражаются в элементарных функциях, их приходится задавать в виде сумм бесконечных рядов. Затем делается выборка по составляющим и получается бесконечная система алгебраических уравнений. Естественный метод приближенного решения – метод редукции, однако, её можно применять только в том случае, если бесконечная система уравнений сходится. В известных нам публикациях по радиоэлектронике на эту тему сходимость постулируется, а не доказывается. В настоящей статье предлагается метод доказательства сходимости бесконечных систем уравнений, возникающих при анализе реальных радиотехнических объектов, с привлечением физических соображений.

Ключевые слова: нелинейные и параметрические радиоцепи, принцип линейного включения, бесконечные алгебраические системы уравнений, их сходимость, доказательство сходимости, решение бесконечных систем методом редукции.

PROBLEM OF INFINITE SYSTEMS OF ALGEBRAIC EQUATIONS CONVERGENCE, WHICH ARE ARISEN IN ANALYSIS NONLINEAR OR TIME VARYING RADIX CIRCUITS

N. D. Birjuk, A. Yu. Krivtsov

Abstract. Nonlinear and time varying radio circuits analysis is brought to either nonlinear or linear with varying coefficients differential equations. Their solutions are no expess on self to elementary functions but give in form of infinity series sums. Then is made selection of components in result is received infinite system of algebraic equations. Natural method of its solution is method of reduction but it can use only in that case if infinite system of equations converges. In well-known publications over radioelektronics about this themes the convergence is assumed but is not proved. In this article it is offered the method of demonstration of infinite systems equations convergence with drawing the physical consideration.

Keywords: nonlinear and time varying radio circuits, the principle of linear entry, infinite systems of algebraic equations, their convergence, a proof of convergence, infinite systems of algebraic equations solution with method of reduction.

Нелинейные и параметрические радиоцепи объединяет принцип линейного включения [1], с. 159, утверждающий, что любое решение нелинейной системы уравнений может быть в точности воспроизведено в специально подобранной линейной системе уравнений. Поставленную задачу целесообразно рассмотреть применительно к параметрическим цепям, поскольку они проще. Среди параметрических цепей желательно выбрать как можно более простую цепь, имеющую практическое значение, где интересующая нас проблема возникает. Поэтому выбираем для анализа последовательный контур с изменяющейся во времени индуктивностью, рассматриваемый в монографии [2], где, однако, проблема сходимости бесконечной системы уравнений не упоминается.

Схема контура представлена на рис. 1.

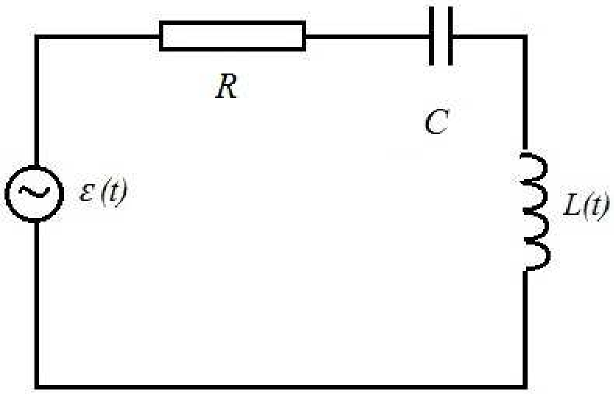

Рис. 1. *Схема последовательного параметрического контура с изменяющейся во времени индуктивностью.*

Э.д.с. предполагается гармонической —

$$\varepsilon(t) = E_m \cos\omega t.$$

Здесь начальная фаза считается равной нулю, при этом общность не уменьшается, поскольку для выполнения этого условия достаточно подходящим образом выбрать начало отсчета времени. Изменяющаяся во времени индуктивность, как и в [2], аппроксимируется формулой

$$L(t) = L_0\left[1 + m\cos(\Omega t + \varphi)\right].$$

Будем анализировать только вынужденные колебания, поэтому интересная и сложная задача об устойчивости контура по Ляпунову здесь не рассматривается. В качестве рабочего инструмента анализа выбираем весьма распространенный в радиоэлектронике метод комплексных амплитуд, в данном случае оказывается удобным вариант этого метода, описанный в учебнике [3]. В теории радиоцепей принято вводить в анализ напряжение индуктивности u_L вместо э.д.с. индукции ε_L, что предлагается во всех руководствах по физике, эти понятия связаны формулой

$$u_L = -\varepsilon_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = \dot{L}i + L\frac{di}{dt},$$

где Φ — потокосцепление индуктивности, i — ток индуктивности, точка сверху означает дифференцирование по времени. В нашем случае

$$\dot{L} = \frac{dL}{dt} = -m\Omega L_0 \sin(\Omega t + \varphi) = m\Omega L_0 \cos(\Omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

Согласно второму закону Кирхгофа уравнение контура имеет вид

$$L_0\left[1+m\cos(\Omega t+\varphi)\right]\frac{di}{dt}+\left[R+m\Omega L_0\cos(\Omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})\right]i+\frac{1}{c}\int idt=E_m\cos\omega t. \qquad (1)$$

Для удобства применения метода комплексных амплитуд это интегро-дифференциальное уравнение желательно представить в виде

$$\left(\frac{\overset{*}{m}}{2}L_0e^{-j\Omega t}+L_0+\frac{\dot{m}}{2}L_0e^{j\Omega t}\right)\frac{di}{dt}+\left(-j\frac{\overset{*}{m}}{2}\Omega L_0e^{-j\Omega t}+R+j\frac{\dot{m}}{2}\Omega L_0e^{j\Omega t}\right)i+\frac{1}{c}\int idt=E_m\cos\omega t,$$

где $\overset{*}{m}=me^{-j\varphi}$, $\dot{m}=me^{j\varphi}$.

Метод комплексных амплитуд представляет собой метод неэквивалентных преобразований, в котором от решения $i(t)$ переходят к его изображению $\widehat{i}$ и за счет этого упрощают промежуточные преобразования. Затем на конечном этапе делают обратный переход от изображения к решению (оригиналу) $i(t)=Re\widehat{i}$. Здесь часто используется вместо знака равенства $(=)$ знак соответствия $(\leftarrow)$. Для уточнения терминологии и обозначений метода комплексных амплитуд покажем его применение на примере абстрактной гармонической функции

$$a(t)=A\cos(\omega t+\varphi)\leftarrow\widehat{a}=Ae^{j(\omega t+\varphi)}=Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}=\dot{A}e^{j\omega t}.$$

Здесь $a(t)$ — оригинал, $\widehat{a}$ — изображение, стрелка $(\leftarrow)$ острием к оригиналу — соответствие. В методе комплексных амплитуд производные и интегралы оригиналов исчезают в изображениях —

$$\frac{da(t)}{dt}\leftarrow j\omega\widehat{a},\int a(t)dt\leftarrow\frac{\widehat{a}}{j\omega}.$$

Ключевым понятием метода комплексных амплитуд является комплексная амплитуда $\dot{A}=Ae^{j\varphi}$, где A — амплитуда оригинала, φ — начальная фаза оригинала.

Кроме изображения $\widehat{a}=\dot{A}e^{j\omega t}$ используется комплексно сопряженное изображение

$$\overset{\vee}{a}=Ae^{-j(\omega t+\varphi)}=Ae^{-j\varphi}e^{-j\omega t}=\overset{*}{A}e^{-j\omega t},$$

где $\overset{*}{A}$ — комплексно сопряженная амплитуда.

В методе комплексных амплитуд уравнение для оригинала (1) заменяется на соответствующее уравнение для изображения —

$$\left(\frac{\overset{*}{m}}{2}L_0e^{-j\Omega t}+L_0+\frac{\dot{m}}{2}L_0e^{j\Omega t}\right)\frac{d\widehat{i}}{dt}+\left(-j\frac{\overset{*}{m}}{2}\Omega L_0e^{-j\Omega t}+R+j\frac{\dot{m}}{2}\Omega L_0e^{j\Omega t}\right)\widehat{i}+$$
$$+\frac{1}{c}\int\widehat{i}dt=E_me^{j\omega t}. \qquad (2)$$

Здесь $\dot{E}_m=E_m$, т. е. комплексная амплитуда э.д.с. равна обычной амплитуде. Это следствие того, что начальная фаза э.д.с. равна нулю. Уравнение (2) можно развернуть, используя то обстоятельство, что вид решения $i(t)$ заранее известен. Его удобнее задать для изображения —

$$\widehat{i}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{I}_ke^{j(\omega+k\Omega)t}. \qquad (3)$$

Кроме того находим

$$\begin{aligned}\frac{d\widehat{i}}{dt}&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}j(\omega+k\Omega)\dot{I}_ke^{j(\omega+k\Omega)t},\\ \int\widehat{i}dt&=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{j}{\omega+k\Omega}\dot{I}_ke^{j(\omega+k\Omega)t}.\end{aligned} \qquad (4)$$

Если подставить (3) и (4) в (2), то после преобразований получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(j\frac{\dot m}{2}(\omega+k\Omega)L_0\dot I_{k-1}+\left\{R+j\left[(\omega+k\Omega)L_0-\frac{1}{(\omega+k\Omega)C}\right]\right\}\dot I_k+\right.$$
$$\left.+j\frac{\overset{*}{m}}{2}(\omega+k\Omega)L_0\dot I_{k+1}\right)e^{j(\omega+k\Omega)t}=E_m e^{j\omega t}. \quad (5)$$

Это – определяющее уравнение вынужденных колебаний анализируемого параметрического контура. Делаем выборку, т. е. для каждого k получаем отдельное уравнение. Тогда будем иметь бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$j\frac{\dot m}{2}\omega L_0\dot I_{-1}+\left[R+j\left(\omega L_0-\frac{1}{\omega c}\right)\right]\dot I_0+j\frac{\overset{*}{m}}{2}\omega L_0\dot I_1=E_m \quad (6)$$

$$j\frac{\dot m}{2}(\omega+k\Omega)L_0\dot I_{k-1}+\left\{R+j\left[(\omega+k\Omega)L_0-\frac{1}{(\omega+k\Omega)C}\right]\right\}\dot I_k+j\frac{\overset{*}{m}}{2}(\omega+k\Omega)L_0\dot I_{k+1}=0,$$

где $k=-\infty,...,-2,-1,1,2,...,\infty$.

Здесь неизвестные – $...,\dot I_{-k},...,\dot I_{-1},\dot I_0,\dot I_1,...,\dot I_k,...$, а коэффициенты при них имеют размерность сопротивления. Для уменьшения громоздкости записи введем обозначения

$$\begin{aligned} z_{k,k}&=R+j\left[(\omega+k\Omega)L_0-\tfrac{1}{(\omega+k\Omega)C}\right],\\ z_{k,k-1}&=j\tfrac{\dot m}{2}(\omega+k\Omega)L_0,\\ z_{k,k+1}&=j\tfrac{\overset{*}{m}}{2}(\omega+k\Omega)L_0.\end{aligned} \quad (7)$$

В новых обозначениях бесконечная система уравнений (6) примет вид

$$\begin{aligned} &z_{0-1}\dot I_{-1}+z_{00}\dot I_0+z_{01}\dot I_1=E_m,\\ &z_{kk-1}\dot I_{k-1}+z_{kk}\dot I_k+z_{kk+1}\dot I_k=0.\end{aligned} \quad (8)$$

Для уточнения структуры этой бесконечной системы уравнений целесообразно представить ее в векторном виде –

$$Zi=?, \quad (9)$$

где **Z** – бесконечная матрица; **i,?** – бесконечные вектор-столбцы.

Если систему уравнений (9) представить в клеточном виде

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline z_{-2-2} & z_{-2-1} & 0 & 0 & 0\\ \hline z_{-1-2} & z_{-1-1} & z_{-10} & 0 & 0\\ \hline 0 & z_{0-1} & \boxed{z_{00}} & z_{01} & 0\\ \hline 0 & 0 & z_{10} & z_{11} & z_{12}\\ \hline 0 & 0 & 0 & z_{21} & z_{22}\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline \dot I_{-2}\\ \hline \dot I_{-1}\\ \hline \boxed{\dot I_0}\\ \hline \dot I_1\\ \hline \dot I_2\\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 0\\ \hline 0\\ \hline \boxed{E_m}\\ \hline 0\\ \hline 0\\ \hline\end{array}, \quad (10)$$

то структура бесконечной системы станет наглядной.

Матрица **Z** оказалась весьма разреженной, она содержит только три ненулевые диагонали, главную и две примыкающие к ней. Свободный вектор содержит только один ненулевой элемент (с нулевым индексом). Поскольку матрица и векторы системы не содержат ни начала, ни конца, то индексы их элементов отсчитываются от "центрального" элемента с нулевыми индексами. Эти элементы находятся в выделенных клетках системы (10). Как показано в [4] решение такой бесконечной системы приводится к непрерывным дробям в случае, если она сходится.

Поиск подходящего для нашей задачи математического аппарата привел нас к убеждению, что бесконечным алгебраическим системам в математике не отведено должного места. Теория бесконечных систем занимает промежуточное положение между двумя математическими дисциплинами, "Алгеброй" и "Математическим анализом". По-видимому, из-за этой промежуточности она не включена ни в одну из этих дисциплин. Систематизированная теория бесконечных алгебраических систем содержится в монографии [6], причем, один из авторов, Л. В. Канторович, внес значительный вклад в развитие этой теории. Однако, по признанию самих же авторов, эта теория не охватывает всех бесконечных алгебраических систем. В монографии В. Ф. Кагана [7] доказательно рассмотрены основные свойства бесконечных алгебраических систем. Интересно отметить, что в этих монографиях рассмотрены не бесконечные системы уравнений, а по терминологии В. Ф. Кагана полубесконечные системы уравнений. Наша система уравнений (10) относиться к категории бесконечных систем, поскольку она простирается до бесконечности вверх, вниз, влево и вправо. Если бы она простиралась до бесконечности вниз и вправо, то она бы называлась полубесконечной алгебраической системой. Доказано, что любая бесконечная система может быть приведена к полубесконечной системе.

Классическую теорию бесконечных систем уравнений (6) применить к нашей системе (10) непросто. Её нельзя применить к этой системе, представленной в первоначальном виде (10), нужно нашу систему привести к требуемой форме, например, разделив левую и правую часть (если она есть) каждого уравнения на диагональный элемент. Именно, в нулевом уравнении нужно делить на z_{00}, в минус первом — на z_{-1-1}, в первом — на z_{11} и т. д. К такой приведенной системе можно применить классическую теорию бесконечных систем и в некоторых частных случаях доказать сходимость системы (10). Это — интересное направление исследования, но таким способом не удается решить проблему в целом. Попытаемся доказать сходимость бесконечной системы уравнений (10) другим способом, привлекая для этого физические соображения.

Обратим внимание, что в уравнении (1) все коэффициенты непрерывны. В действительности они не только непрерывны, но и абсолютно гладкие, т. е. непрерывны коэффициенты со всеми своими производными. Для доказательства сходимости нам достаточно считать их непрерывными. Из теории дифференциальных уравнений известно, что гладкость решения выше гладкости коэффициентов. Это означает, что если в (1) коэффициенты непрерывны, то функция $i(t)$ непрерывна вместе со своей производной (как минимум), очевидно, что и изображение этой функции $\widehat{i}$ имеет ту же степень гладкости.

Выражение (3) представляет собой разложение почти периодического выражения в ряд Фурье. Поделим левую и правую часть на абсолютно гладкую функцию $e^{j\omega t}$.

$$\frac{\widehat{i}}{e^{j\omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{I}_k e^{jk\Omega t}. \tag{11}$$

Правая часть представляет собой разложение периодической функции в ряд Фурье. Очевидно, что ее гладкость такая же, как и правой части выражения (3).

Из теории разложения периодической функции в ряд Фурье следует [7], что если функция непрерывна вместе со своей производной, то при больших k амплитуды гармонических функций разложения убывают не медленнее, чем $\frac{1}{k^2}$, а поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, то сходится и ряд (11), а вместе с ним и ряд (3). Это значит, что можно со сколь угодно большой точностью заменить бесконечный ряд (3) конечным рядом

$$\widehat{i} = \sum_{k=-N_1}^{N_2} \dot{I}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \tag{12}$$

а это равнозначно тому, что бесконечная система алгебраических уравнений (10) может быть заменена со сколь угодно большой точностью конечной системой, т. е. сходимость конечной системы (10) доказана.

Если сходимость доказана, то можно найти приближенное решение системы (10) методом редукции (усечения, окаймления).

Уравнение

$$z_{00}\dot{I}_0 = E_m,$$

будем считать системой (10) в нулевом приближении. При его решении можно найти весьма неточно комплексную амплитуду $\dot{I}_0$.

Система уравнений, полученная окаймлением предыдущего уравнения,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline z_{-1-1} & z_{-10} & 0 \\ \hline z_{0-1} & \boxed{z_{00}} & z_{01} \\ \hline 0 & z_{10} & z_{11} \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|} \hline \dot{I}_{-1} \\ \hline \boxed{\dot{I}_0} \\ \hline \dot{I}_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \boxed{E_m} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array},$$

является первым приближением системы (10). При его решении уточняется комплексная амплитуда $\dot{I}_0$ и весьма неточно находятся комплексные амплитуды $\dot{I}_{-1}$ и $\dot{I}_1$.

Вторым приближением системы (10) является система по виду совпадающая с табличным изображением (10), если пунктирные линии заменить сплошными. В результате ее решения второй раз уточняется комплексная амплитуда $\dot{I}_0$, первый раз – комплексные амплитуды $\dot{I}_{-1}$ и $\dot{I}_1$, и весьма неточно вычисляются две новые комплексные амплитуды $\dot{I}_{-2}$ и $\dot{I}_2$. Этот ряд вычислений можно продолжить.

В $k-1$-ом приближении имеем систему из $2(k-1)+1$ уравнений, в k-ом приближении – из $2k+1$ уравнений.

Возникает естественный вопрос, когда вычисления нужно прекращать. Очевидно, нужно сравнивать $k-1$-ое приближение с k-ым, различие должно быть малым. Например, за основу можно взять оригинал изображения (11) –

$$f(t) = Re\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{I}_k e^{jk\Omega t}.$$

Это — действительная периодическая функция времени с периодом $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. В $l-1$-ом и l-ом приближениях эти функции соответственно равны

$$f_{l-1}(t) = Re\sum_{k=-(l-1)}^{l-1} \dot{I}_k e^{jk\Omega t}, \qquad f_l(t) = Re\sum_{k=l}^{l} \dot{I}_k e^{jk\Omega t}.$$

Найдем среднеквадратичное значение последней функции

$$\bar{f}_l = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f_l^2(t)dt},$$

а также среднеквадратичное значение разности двух предыдущих функций

$$\Delta\bar{f}_l = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[f_l(t) - f_{l-1}(t)\right]^2 dt}.$$

Среднеквадратичные значения — положительные числа. В качестве погрешности вычислений (в процентах) можно взять число

$$\delta = \frac{\Delta \bar{f}_l}{\bar{f}_l} 100\%.$$

Требуемая погрешность задается заранее. Исходя из нее, выбирается нужное приближение решения бесконечной системы уравнений (10).

Описанный здесь подход естественно обобщается на параметрические цепи более общего вида. Анализ встречающегося на практике набора таких цепей содержится в монографии [8] без доказательства сходимости.

ВЫВОДЫ

Анализ нелинейных и параметрических радиоцепей часто приводится к бесконечным алгебраическим системам. Особое значение приобретает анализ более простых параметрических радиоцепей, которые через принцип линейного включения связаны с нелинейными цепями. Для приближенного решения бесконечных систем уравнений применяется удобный для практических задач метод редукции. Его можно применять только в том случае, когда бесконечная система уравнений сходится. В известных нам случаях сходимость системы постулируется, но не доказывается. Классическая теория бесконечных линейных систем алгебраических уравнений не может охватить всех возникающих на практике случаев. Выше для параметрического контура предложено доказательство сходимости соответствующей бесконечной системы с применением физических соображений. Этот подход естественно обобщается на более сложные параметрические цепи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. — М. : Наука, 1966. — 582 с.

2. Тафт, В. А. Электрические цепи с переменными параметрами / В. А. Тафт. — М. : Энергия, 1968. — 327 с.

3. Величко, Ю. Т. Теоретичні основи радіотехнічних мереж / Ю. Т. Величко. — Львів : Видавництво ЛДУ, 1966. — 340 с.

4. Белоглазов, В. В. Непрерывные дроби в анализе параметрических радиоцепей / В. В. Белоглазов, Н. Д. Бирюк, В. В. Юргелас // Радиоэлектроника. — 2010. — Т. 53, № 6. — С. 22–30.

5. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Кантарович, В. И. Крылов. — М.-Л. : Госфизматиздат, 1962. — 708 с.

6. Каган, В. Ф. Основание теории определителей / В. Ф. Каган. — Одесса : Гиз Украины, 1922. — 521 с.

7. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М. : Наука, 1964. — 608 с.

8. Бирюк, Н. Д. Основы теории параметрических радиоцепей / Н. Д. Бирюк, В. В. Юргелас. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — 345 с.

REFERENCES

1. Bilov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nyemitskiy V.V. A theory of Lyapunov's exponents and it application to problem of stability. [Bylov B.F., Vinograd R.E'., Grobman D.M., Nemyckij V.V. Teoriya pokazatelej Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustojchivosti]. Moscow: Nauka, 1966, 582 p.

2. Tuft V.A. Electrical circuits with time varying parameters. [Taft V.A. E'lektricheskie cepi s peremennymi parametrami]. Moscow: Energiya, 1968, 327 p.

3. Velichko Yu.T. Theoretical bases of radio engineering circuits. [Velichko, Yu. T. Teoretichni osnovi radiotexnichnix merezh]. Lviv: Publishing house of LSU, 1966, 340 p.

4. Byeloglazov V.V., Birjuk N.D., Yurgelas V.V. Continuous fractions in time varying circuit analysis. [Byeloglazov V.V., Birjuk N.D., Yurgelas V.V. Nepreryvnye drobi v analize parametricheskix radiocepej]. *Radioe'lektronika — Radioelectronic*, 2010, vol. 53, no. 6, pp. 22–30.

5. Kantorovich L.V., Krilov V.I. Approximate methods of higher analysis. [Kantorovich L.V., Krilov V.I. Priblizhennye metody vysshego analiza]. Moscow–Leningrad: Gosfizmatizdat, 1962, 708 p.

6. Kagan V.F. The basis of determinant theory. [Kagan V.F. Osnovanie teorii opredelitelej]. Odessa: Ukrainian publishing house, 1922, 521 p.

7. Bronshtein I.N., Semendyayev K.A. Mathematical reference book for engineers and students of HTEE. [Bronshtein I.N., Semendyayev K.A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashhixsya vtuzov]. Moscow: Nauka, 1964, 608 p.

8. Birjuk N.D., Yurgelas V.V. The basis of time varying radio circuit theory. [Birjuk N.D., Yurgelas V.V. Osnovy teorii parametricheskix radiocepej]. Voronezh: Publishing and polygraphic centre of VSU, 2012, 345 p.

Бирюк Николай Данилович, д.ф.-м.н., профессор кафедры экспериментальной физики ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: lidia@vmail.ru

Birjuk Nikolay Danilovich, VSU, chair of experimental physic, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Voronezh, Russia
E-mail: lidia@vmail.ru

Кривцов Алексей Юрьевич, старший инженер АО “Концерн “Созвездие”, Воронеж, Россия
E-mail: bobr5me@rambler.ru

Krivtsov Alexey Yurievich, engineer of SC “Concern “Sozvezdie”, Voronezh, Russia
E-mail: bobr5me@rambler.ru