

О КРИТИЧЕСКИХ ТОЧКАХ ФРЕДГОЛЬМОВА ФУНКЦИОНАЛА, БИФУРЦИРУЮЩИХ ИЗ УГЛОВОЙ ТОЧКИ МИНИМУМА

Н. С. Уварова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.08.2015 г.

Аннотация. В статье изложен подход к изучению бифуркаций решений нелинейных вариационных задач с полуограничениями на основе модифицированного метода Ляпунова-Шмидта (редукции к анализу ключевой функции на конечномерном пространстве ключевых переменных), с использованием вторичных редукций и некоторых теорем теории особенностей гладких функций. Рассмотрена задача конечномерного анализа о ветвлении в критических точках параметрического семейства многочленов от переменных ξ_1, ξ_2 в положительной четверти координатной плоскости. Предложен подход к классификации *bif*-раскладов в угловой точке минимума. Сформулированы правила допустимости расклада бифурцирующих экстремалей гладкого функционала в угловой точке минимума. Дан также краткий обзор результатов (в основном, автора статьи и его ближайших коллег) по изучению ветвления критических точек гладкого функционала в угловой точке минимума с омбилической особенностью. Приведены типовые фазовые портреты ключевой функции в случае омбилической особенности гиперболического типа, а также типовые расположения угла по отношению к линиям уровней ключевой функции.

Ключевые слова: гладкий функционал, бифурцирующая экстремаль, конечномерная редукция, угловая точка минимума, омбилическая особенность, максимальный расклад экстремалей, характеристический клеточный комплекс.

ABOUT CRITICAL POINTS OF FREDHOLM FUNCTIONAL, BIFURCATING FROM CORNER MINIMUM POINT

N. S. Uvarova

Abstract. The article describes an approach to analyze bifurcations of solutions of non-linear variational problems with semi limitations on the basis of modified method of Lyapunov-Shmidt with secondary reduction and some theorems of singularity theory. It deals with finite-dimensional problem of singularity in critical points of parameter polynominal family in positive quarter of the coordinate space. The approach is presented to classification of bif-spreading in corner minimum point. The principle of finding of allowed coding matrix bif-spreadings of smooth functional in corner minimum point is formulated. There is also the customary summary of analysis of smooth functional bifurcation in corner umbilical minimum point. Typical phase-portraits and typical positions of corner are presented in the context of umbilical hyperbolical singularity.

Keywords: smooth functional, bifurcating extremal, finite dimensional reduction, corner minimum point, umbilical singularity, the maximum spreadings of extremals, coding matrix bif-spreadings.

ВВЕДЕНИЕ

К изучению поведения гладких функционалов вблизи угловых особых точек края банахова многообразия приходится обращаться как в пределах «чистой» теории особенностей гладких функционалов, так и в рамках задач прикладной направленности — теории управления, теории фазовых переходов, теории бифуркаций периодических волн и т. д. [1]. В этих теориях естественным образом возникают нелинейные вариационные задачи с полуограничениями

$$V(x) \longrightarrow \inf, \quad g_k(x) \geq 0, \quad x \in M, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

в которых $V(x)$, $g_k(x)$ — гладкие функционалы на гладких банаховых многообразиях. Такие задачи приводят к вопросу о бифуркациях экстремалей из угловой точки края банахова многообразия.

Анализ краевых и угловых особенностей гладких функций на конечномерных многообразиях возник в работах В. И. Арнольда, С.Т.С. Уолла, Д. Сирсмы, Д. Пита, Т. Постона и др. [1], [2]. Д. Сирсма ввел и исследовал угловые особенности [3] как обобщение краевых особенностей. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах В. А. Васильева, А. А. Давыдова, В. И. Матова и др. [2].

Перенос теории угловых особенностей на класс фредгольмовых функционалов был осуществлен Ю. И. Сапроновым посредством применения модификаций вариационной версии метода Ляпунова–Шмидта [1]. Сравнительно недавно Ю. И. Сапроновым, А. В. Гнездиловым, О. Ю. Даниловой, О. В. Швыревой, М. А. Хуссаином, А. В. Белоглазовым и И. В. Колесниковой был проанализирован ряд важных угловых особенностей, связанных с приложениями к нелинейным задачам механики сплошных сред и математической физики [1], [4]–[6]. Выяснилось, что внешне различные нелинейные краевые задачи приводят в конечном итоге к одной и той же задаче конечномерного анализа — изучению ветвления критических точек параметрического семейства многочленов от переменных ξ_1, ξ_2 в положительной четверти координатной плоскости. Список исследованных примеров такого типа задач постоянно растет.

В частности, А. В. Белоглазовым был предложен подход к описанию всех допустимых *bif*-раскладов в угловой точке минимума с гиперболической особенностью омбилического типа [4]. К сожалению, подробное описание этого подхода с полными доказательствами так и не появилось. В данной статье предложен несколько другой подход к классификации *bif*-раскладов в угловой точке минимума, позволивший, в частности, подтвердить большинство раскладов А. В. Белоглазова и сделать некоторые уточнения.

Ниже предполагается, что невозмущенная ключевая функция имеет в нуле особенность типа гиперболической или эллиптической омбилики. Это означает, что в некоторой системе координат эта функция имеет вид $W_0(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1^3}{3} \pm \xi_1 \xi_2^2$ и для нее параметрическое семейство

$$W(\xi_1, \xi_2, \lambda) = \frac{\xi_1^3}{3} \pm \xi_1 \xi_2^2 + d(\xi_1^2 \mp \xi_2^2) + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \varepsilon \xi_1^2 \xi_2^2. \quad (1)$$

служит ограниченной миниверсальной разверткой. Здесь $\lambda = (d, \beta_1, \beta_2, \varepsilon)$.

1. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ В УГЛОВОМ СЕКТОРЕ

Пусть гладкое семейство гладких функционалов $V(x, \lambda)$ задано при ограничениях на x в виде пары неравенств, задающих неособо пересекающиеся гладкие поверхности и выделяющих 2–гранный угол: $\mathcal{C} = \{x \in E \mid g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2\}$ (случай ограничения в виде одного неравенства дает так называемую краевую особенность).

Точка $a \in \mathcal{C}$ называется условно критической для $V(x, \lambda)$, если $\text{grad}_H V(a, \lambda)$ ортогонален грани $\mathcal{C}$, содержащей a . Все критические точки a делятся на угловые ($g_1(a) = g_2(a) = 0$),

краевые ($g_1(a)g_2(a) = 0$, $|g_1(a)| + |g_2(a)| \neq 0$) и внутренние ($g_1(x)g_2(x) \neq 0$). Множество всех угловых точек называется вершинной гранью угла или, более кратко, вершиной угла.

В более общем случае анализ угловой особенности проводится через промежуточную редукцию в $\mathbb{R}^m$ — через анализ поведения функции $W(\xi) := \inf_{x:g(x)=\xi} V(x)$ — по какой-либо схеме конечномерной редукции [1]. Здесь $g(x) = (g_1, g_2, \dots, g_m)^\top$, $\{g_k\}$ — набор независимых гладких функционалов, включающий в себя пару ограничителей $\{g_1, g_2\}$, задающих угол.

Функционалы $g_i(x)$ подчинены, как правило, дополнительным «техническим» условиям: предполагается, что $\text{grad}_H g_i(x) \in F \quad \forall x \in E$, предполагается, в каждом слое $g^{-1}(\xi)$ существует (вблизи нуля) единственная (морсовская) экстремаль $x = \varphi(\xi)$ и т.д. Подмногообразие N в E , состоящее из точек $\varphi(\xi)$, называется редуцирующим. Ключевая функция $W(\xi)$ представляет собой сужение функционала V на редуцирующее подмногообразие.

Исследование V в угле $\mathcal{C}$ сводится к исследованию функции W в координатном угле $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$. Кратность $\hat{\mu}$ угловой критической точки $x_0 \in \mathcal{C}$ определяется как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\hat{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$, где α — образ a в пространстве ключевых переменных, $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$ — алгебра формальных степенных рядов от $\xi - \alpha$, а $\hat{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$ — угловой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный следующим набором функций (точнее, тейлоровскими разложениями этих функций): $\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \xi_2 \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \frac{\partial W}{\partial \xi_3}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \xi_m}$. Кратность $\bar{\mu}$ краевой критической точки a , принадлежащей краю $g_1(a) = 0$, определяется как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\bar{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$, где $\bar{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$ — краевой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный набором функций: $\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \xi_m}$. Аналогично определяется кратность особой точки на крае $g_2(a) = 0$. Кратность внутренней точки a определяется обычным образом [2], как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\mathfrak{A}(W, \alpha)$, где $\mathfrak{A}(W, \alpha)$ — якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный набором первых производных: $\frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \xi_m}$.

Пусть $\widehat{M} \in E \times \mathbb{R}^q$ — многообразие катастроф: $\widehat{M} = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, где M_k определяется соотношениями $f(x, \lambda) = 0$, $x \in \mathcal{C}_k$, $\dim \text{Ker} \frac{\partial [f]_k}{\partial x}(x, \lambda) > 0$. Здесь $\mathcal{C}_0$ — вершинная грань угла, $\mathcal{C}_1$ — край угла, $\mathcal{C}_2$ — внутренность угла, а $[f]_k = \text{grad}_H (V|_{\mathcal{C}_k})$.

Каустика Σ функционала в угловой особой точке определяется как образ многообразия катастроф относительно канонической проекции $\pi : E \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$: $\Sigma = \pi(\widehat{M})$.

Если заранее известна оценка сверху числом d значений индексов Морса всех бифурцирующих экстремалей, то каждый расклад бифурцирующих экстремалей (*bif*-расклад) описывается матрицей $L = (l_k^j)$, в которой элемент l_k^j совпадает с количеством критических точек индекса j на гранях размерности k .

В случае угловой особенности ее версальная развертка определяется как функция $W(x, \lambda)$, для которой совокупность ростков функций $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ (начальных скоростей деформации) дает систему линейных образующих в угловом кольце особенности $\hat{Q}_0(W)$. Если эта совокупность является базисом $\hat{Q}_0(W)$, то деформация называется миниверсальной. Если рассмотреть в кольце ростков гладких функций максимальный идеал и профакторизовать его по угловому якобиеву идеалу, то получим усеченное угловое локальное кольцо $\hat{Q}_0^*(W)$. Деформация $W(x, \lambda)$, для которой $W(x, 0) = 0$ и совокупность ростков функций $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ образует базис $\hat{Q}_0^*(W)$, называется ограниченной миниверсальной деформацией. Каустика ¹⁾ такой деформации называется главной и обозначается Σ (чаще всего каустикой особенности называют главную каустическую).

¹⁾ Каустикой семейства $W(x, \lambda)$ называется совокупность тех значений параметра λ (вблизи нуля), при которых $W(\cdot, \lambda)$ имеет вблизи нуля вырожденную критическую точку.

2. МАКСИМАЛЬНЫЕ РАСКЛАДЫ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ДЛЯ ОМБИЛИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Будем предполагать, что ключевая функция W в некоторой экстремальной задаче зависит от двух (ключевых) переменных, и в результате огрубления (отбрасывания мономов порядка > 6) принимает следующий вид:

$$x_1^6 + x_2^6 + a_1 x_1^4 x_2^2 + a_2 x_1^2 x_2^4 + \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4 + \varepsilon_3 x_1^2 x_2^2 + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2.$$

После замены $x_1^2 = y_1$, $x_2^2 = y_2$ получим развертку омбилической точки минимума в вершине угла $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$:

$$y_1^3 + y_2^3 + a_1 y_1^2 y_2 + a_2 y_1 y_2^2 + \varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + \varepsilon_3 y_1 y_2 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2. \quad (2)$$

Данное параметрическое семейство функций — эквивалентный вариант записи семейства (1). Для семейства (2) справедливы четыре правила для раскладов экстремалей, бифурцирующих из $\min$ -особенности в вершине углового сектора (см. [7]).

Правило 1.1. В случае максимального bif -расклада для омбилической $\min$ -особенности в вершине углового сектора расположена точка локально минимального значения.

Правило 1.2. В случае максимального bif -расклада для омбилической $\min$ -особенности в угловом секторе на каждой из полуосей координат имеется ровно две ненулевые критические точки. Причем, эти точки разнотипны: с различными значениями индекса Морса.

Правило 1.3. В случае максимального bif -расклада для омбилической $\min$ -особенности в угловом секторе внутри углового сектора находятся ровно четыре критические точки. В случае гиперболической омбилики — это две седловые точки, одна точка минимума и одна точка максимума. В случае эллиптической омбилики — три седловые точки и одна точка минимума или максимума.

Правило 1.4 (формула Эйлера). В случае максимального bif -расклада, описываемого матрицей $\mathcal{L} = (l_j^k)$, $j, k \in \{0, 1, 2\}$, для омбилической $\min$ -особенности в угловом секторе имеет место следующее ограничение (для элементов матрицы $\mathcal{L}$):

$$l_0^0 - l_1^0 + l_2^0 + 2(l_0^1 - l_1^1 + l_2^1) + 4(l_0^2 - l_1^2 + l_2^2) = 1.$$

Замечание 1. Соотношение для элементов кодирующей матрицы l_j^k (см. [1]) из четвертого правила допускает эквивалентную переформулировку в следующем виде:

$$l_0^1 - l_1^1 + l_2^1 = 2(l_1^2 - l_0^2 - l_2^2).$$

Перечисленные правила приводят к следующему утверждению (см. [7]).

Теорема 1. Максимальные расклады бифурцирующих экстремалей из угловой точки минимума с омбилической особенностью исчерпываются следующим списком кодирующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

В работах [4]–[6] были указаны отдельные части приведенного в теореме списка максимальных bif -раскладов. В этих работах учитывались дополнительные ограничения на деформации особенностей (в виде требования симметрии, условия гиперболичности омбилики и др.), приводившие к неполноте представленных списков. Впервые список раскладов, представленный в теореме 1, появился в [7].

Если попытаться упростить ключевую функцию с помощью нелинейной замены координат, то можно перейти к нормализованной форме омбилического полинома [2]: $W = x^3 \pm xy^2 + \delta_1x + \delta_2y + \delta_3x^2$. При этом неравенства, задающие угол, примут следующий вид: $\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 + \dots \geq 0$, $\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 + \dots \geq 0$ (в общем случае угловой сектор может быть криволинейным).

На рис. 1, 2 приведены графические изображения реализаций перечисленных выше максимальных раскладов в виде линий уровня редуцированной (по симметрии) и нормализованной ключевой функции (в прямолинейном угловом секторе).

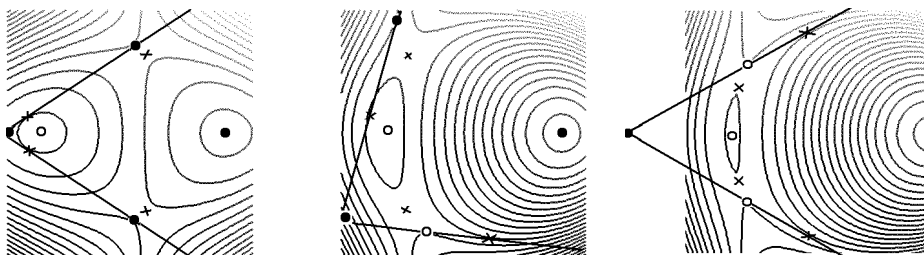


Рис. 1. Случай гиперболической особенности.

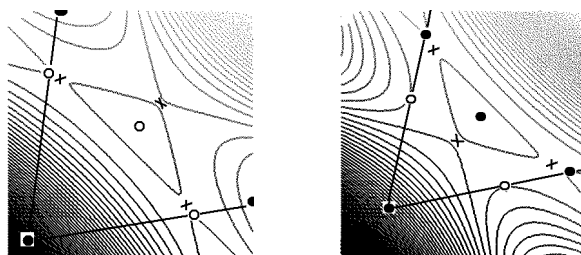


Рис. 2. Случай эллиптической особенности.

Замечание 2. Максимальные расклады представляют особую важность, так как на их основе несложно организовать, следуя правилам 1 – 4, описание всех прочих раскладов (включая диаграмму примыканий раскладов). Более полная информация о ветвлении экстремалей получается после выяснения геометрического строения каустики. Этим вопросам будет посвящена отдельная публикация.

3. ПРОЧИЕ РАСКЛАДЫ ЭКСТРЕМАЛЕЙ, БИФУРЦИРУЮЩИХ ИЗ ОМБИЛИЧЕСКОЙ ТОЧКИ МИНИМУМА

Если упростить ключевую функцию (заменой координат) и перейти к нормализованной форме (омбилического полинома) (см. [2]) $W = x^3 \pm xy^2 + \delta_1x + \delta_2y + \delta_3x^2$, то неравенства, задающие угол, примут следующий вид: $\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 + \dots \geq 0$, $\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 + \dots \geq 0$ (в общем случае угловой сектор криволинеен). Для описания всех типов допустимых раскладов достаточно рассмотреть прямолинейный угол $\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 + \dots \geq 0$, $\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 + \dots \geq 0$. На основе нормализованной формы можно получить полное описание всех (не только максимальных) раскладов бифурцирующих экстремалей. В качестве примера приведем список тех *bif*-раскладов для омбилической особенности гиперболического типа, в которых вершина угла является точкой минимума. Так как первая строка матрицы такого расклада равна $(1,0,0)$, то можно ограничиться лишь записью усеченных матриц, состоящих из второй и

третьей строк:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь каждая строка матриц соответствует фиксированному количеству бифурцирующих точек: 9 точек для первой строки, 8 — для второй и т.д.

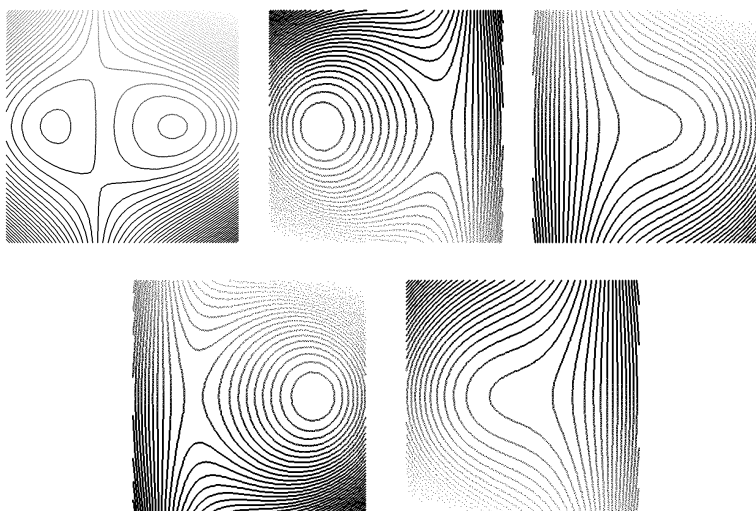


Рис. 3. Типовые фазовые портреты ключевой функции в случае омбилической особенности гиперболического типа.

Обосновать этот список можно «направленным» перебором вариантов посредством следующих действий:

- 1) перечисление типичных фазовых портретов ключевой функции;
- 2) перечисление максимальных *bif*-раскладов (см. теорему 1);
- 3) применение следующих стандартных геометрических действий: а) поступательный перенос углового сектора с вершиной в заранее заданной новой точке плоскости, б) поворот углового сектора (вокруг вершины) на произвольно заданный угол, в) изменение величины углового раствора.

Очевидно, что при таких преобразованиях после каждого перехода одной из сторон угла через «обычную» (не краевую) критическую точку происходят бифуркационные изменения. Расклад изменяется либо по количеству точек, либо по характеру взаимного примыкания

критических точек. Все бифуркационные эффекты можно увидеть, если рассмотреть типовые линии уровня (фазовые портреты) ключевой функции и типовые расположения угла по отношению к линиям уровней (см. ниже рисунки).

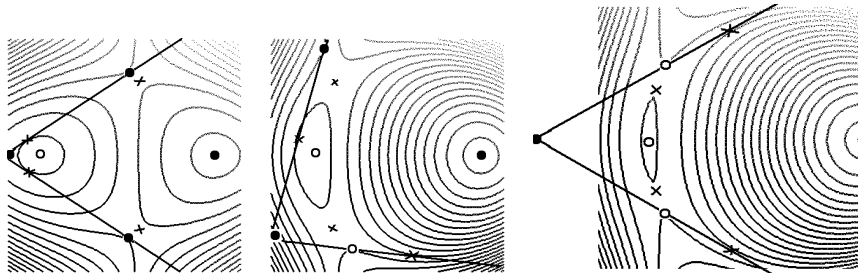


Рис. 4 а. Типовые расположения угла по отношению к линиям уровней ключевой функции (в случае омбилической особенности гиперболического типа).

а) 9-точечные расклады

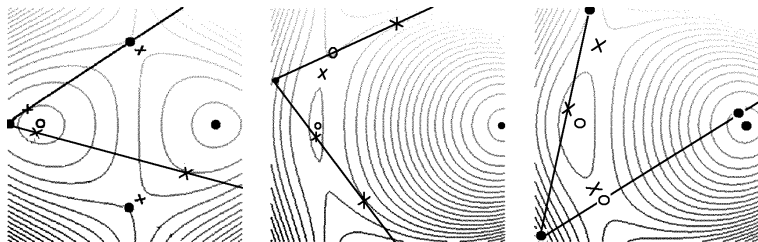


Рис. 4 б. Типовые расположения угла по отношению к линиям уровней ключевой функции (в случае омбилической особенности гиперболического типа).

б) 8-точечные расклады

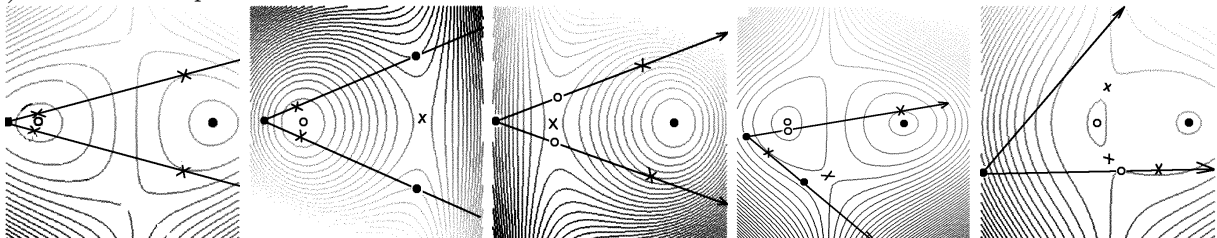


Рис. 4 в. Типовые расположения угла по отношению к линиям уровней ключевой функции (в случае омбилической особенности гиперболического типа).

в) 7-точечные расклады

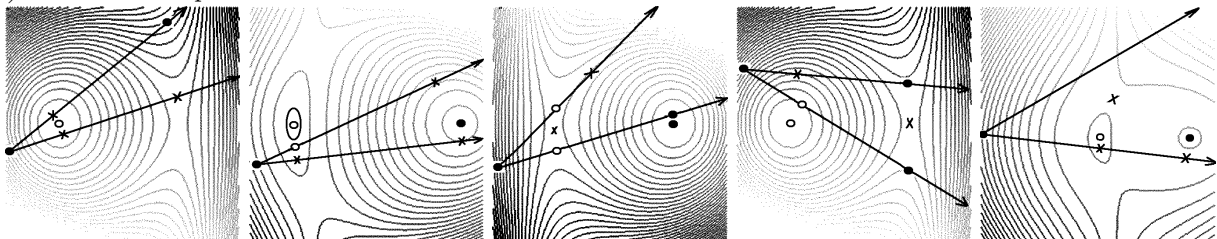


Рис. 4 г. Типовые расположения угла по отношению к линиям уровней ключевой функции (в случае омбилической особенности гиперболического типа).

г) 6-точечные расклады

Характер взаимного примыкания критических точек определяется характеристическим клеточным комплексом (графом) *bif*-расклада [1].

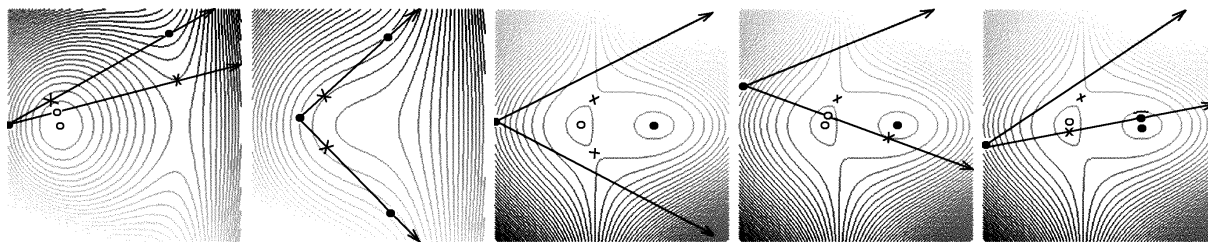


Рис. 4 д. Типовые расположения угла по отношению к линиям уровней ключевой функции (в случае омбилической особенности гиперболического типа).

д) 5-точечные расклады

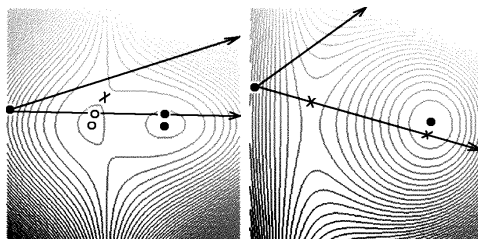


Рис. 4 е. Типовые расположения угла по отношению к линиям уровней ключевой функции (в случае омбилической особенности гиперболического типа).

е) 4-точечные расклады

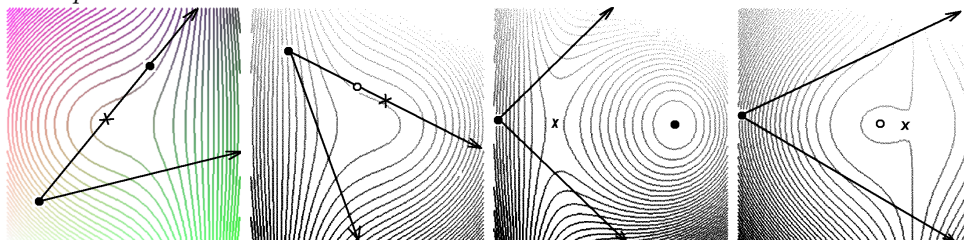


Рис. 4 ж. Типовые расположения угла по отношению к линиям уровней ключевой функции (в случае омбилической особенности гиперболического типа).

ж) 3-точечные расклады

Из теории Морса [8] известно, что каждую гладкую функцию W на конечномерном многообразии M , имеющую лишь морсовские критические точки, можно изобразить клеточным комплексом, каждая клетка которого взаимно однозначно соответствует критической точке функции W . Размерность клетки равна индексу Морса соответствующей критической точки, а примыкания клеток в комплексе соответствуют взаимным примыканиям критических точек (как особых точек динамической системы $\dot{\xi} = -\text{grad}W(\xi)$). Причем гомотопический тип изображающего комплекса совпадает с гомотопическим типом многообразия M . Из этого факта вытекает, в частности, что наборы стационарных точек функций на плоскости и в трехмерном пространстве можно изображать графами (одномерными остовами клеточных комплексов). Если функция W , заданная на $\mathbb{R}^n$, коэрцитивна, то изображающий ее комплекс гомотопически тривиален (гомотопен точке). Следовательно, в случае коэрцитивной функции изображающий граф связан.

В случае функции двух переменных изображающий (характеристический) клеточный комплекс состоит из l_0 вершин, l_1 ребер и l_2 двумерных клеток. Он полностью определяется своим одномерным остовом (изображающим графом). Вершины графа взаимно однозначно соответствуют точкам минимумов, а ребра — седлам индекса 1. При этом две вершины соединяются ребром, если существует кривая, соединяющая соответствующую пару точек

минимумов, составленная из пары линий кратчайшего спуска (интегральных кривых поля градиентов), связывающих пары «седло – минимум» (малым шевелением функции или метрики можно добиться того, чтобы любая интегральная кривая, вытекающая из седла, втекает в точку локального минимума). За счет изменения метрики в областях вида $\{c_1 < W < c_2\}$, не содержащих критических точек, можно переносить финальные точки сепаратрис из одних локальных минимумов на другие (то есть сепаратрисы будут втекать в другие точки локальных минимумов). За счет таких переключений можно получать разнообразные соединения ребрами вершин в пределах единого расклада стационарных точек. Переключениям сепаратрис соответствуют гомологические преобразования графа. Если граф $\hat{\Gamma}$ получен из графа Γ через последовательность следующих трех операций: 1) удаление любого ребра, соединяющего пару внутренних (некраевых) вершин A, B , 2) склеивание оставшихся (после удаления ребра) частей графа по вершинам A, B (за точкой стыка сохраним обозначение A) и 3) приклеивание к точке стыка A нового «висячего» ребра (вторая вершина приклеенного ребра – краевая точка), то говорить, что граф $\hat{\Gamma}$ получен из графа Γ прямым гомологическим преобразованием, а граф Γ получен из $\hat{\Gamma}$ обратным гомологическим преобразованием [1].

Если граф $\tilde{\Gamma}$ получен из графа Γ через конечную последовательность прямых и обратных гомологических преобразований, то графы Γ и $\tilde{\Gamma}$ называются гомологичными. Очевидно, что гомологические преобразования не изменяют количества вершин и ребер графа.

Понятие характеристического комплекса естественно распространяется на функции, рассмотренные на угловых секторах. На основе рисунка 4 не сложно выяснить, как устроены характеристические комплексы рассмотренных выше раскладов.

В качестве примера укажем следующие комплексы:

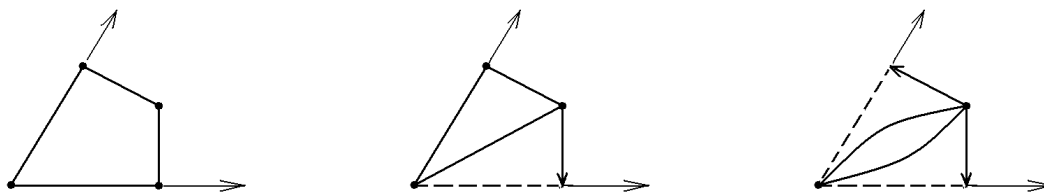


Рис. 5. Характеристические комплексы омбилических особенностей гиперболического типа (для максимальных раскладов)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.
2. Арнольд, В. И. Особенности дифференцируемых отображений / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. — М. : МЦНМО, 2004. — 672 с.
3. Singularities of Functions on Boundaries, Corners / D. Siersma [et. al.] // Quart. J. Oxford Ser. — 1981. — V. 32, № 125. — P. 119–127.
4. Белоглазов, А. В. Об угловых особенностях гладких функций в нелинейных задачах математической физики / А. В. Белоглазов // Труды воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна – 2006. — Воронеж : ВорГУ, 2006. — С. 21–36.
5. Колесникова, И. В. Двухмодовые ветвления экстремалей гладких функционалов в точках минимума с однородными особенностями шестого порядка / И. В. Колесникова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9, вып. 2. — С. 25–30.

6. Колесникова, И. В. Ветвление фаз кристалла, определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка / И. В. Колесникова, Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов // Системы управления и информационные технологии. — 2009. — № 1(35). — С. 72–76.

7. Колесникова, И. В. Максимальные расклады бифурцирующих экстремалей гладкого функционала из угловой точки минимума с омбилической особенностью / И. В. Колесникова, Ю. И. Сапронов, Н. С. Уварова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 205–211.

8. Постников, М. М. Введение в теорию Морса / М. М. Постников. — М. : Наука, 1971. — 568 с.

REFERENCES

1. Darinskiy B.M., Sapronov Yu.I., Zarev S.L. Bifurcation of extremals of Fredholm functionals. [Darinskiy B.M., Sapronov Yu.I., Carev S.L. Bifurkacii e'kstremalej fredgol'movykh funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 12, pp. 3–140.

2. Arnold V.I., Varchenko A.N., Gusein-Zade S.M. Singularities of differentiable maps. [Arnol'd V.I., Varchenko A.N., Gusejn-Zade S.M. Osobennosti differenciruemykh otobrazhenij]. Moscow, 2004, 672 p.

3. Siersma D. et. al. Singularities of Functions on Boundaries, Corners. Quart. J. Oxford Ser., 1981, vol. 32, no. 125, pp. 119–127.

4. Beloglazov A.V. About corner singularities of smooth functions in nonlinear mathematical physics. [Beloglazov, A. V. Ob uglovykh osobennostyakh gladkix funkciy v nelinejnykh zadachax matematicheskoy fiziki]. Proceedings of Voronezh Winter Mathematical School of S. G. Krein, 2006, pp. 21–36.

5. Kolesnikova I.V. Two-Mode Branching Extremals of Smooth Functionals with Homogeneous Features of the Sixth Order in Minima Points. [Kolesnikova I.V. Dvuxmodovye vetvleniya e'kstremalej gladkix funkcionalov v tochkax minimuma s odnorodnymi osobennostyami shestogo poryadka]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 2, pp. 25–30.

6. Kolesnikova I.V., Darinskiy B.M., Sapronov Yu.I. Branching phases crystal determines the thermodynamic potential of the sixth order. [Kolesnikova I.V. Darinskiy B.M., Sapronov Yu.I. Vetvlenie faz kristalla, opredelyaemykh termodinamicheskim potencialom shestogo poryadka]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii — Control Systems and Information Technology*, 2009, no. 1 (35), pp. 72–76.

7. Kolesnikova I.V., Sapronov Yu.I., Uvarova N.S. Maximum spreading of the smooth functional of bifurcating extremals from the corner minimum point with umbilic singularity. [Kolesnikova I.V., Sapronov Yu.I., Uvarova N.S. Maksimal'nye rasklady bifurcuyushchix e'kstremalej gladkogo funkcionala iz uglovoj točki minimuma s ombilicheskoy osobennost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 205–211.

8. Postnikov M.M. Introduction to Morse Theory. [Postnikov M.M. Vvedenie v teoriyu Morsa]. Moscow: Nauka, 1971, 568 p.

Уварова Н.С., аспирант кафедры математического моделирования, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: nsuvarova88@gmail.com

Uvarova N.S., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: nsuvarova88@gmail.com