УДК 517.9

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В. С. ГОЛУБЕВА, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В. А. Костин, С. А. Чехов, Д. А. Фахад

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.06.2015 г.

Аннотация. Методами общей теории сильно непрерывных полугрупп преобразований доказывается равномерно корректная разрешимость в смысле С. Г. Крейна задачи без начальных условий для некоторой системы уравнений, описывающих движение сжимаемой жидкости в пористой среде. Приводятся алгоритмы численной реализации полученного решения и градиента давления на границе области. Особенностью вычисления градиента является то, что приходится вычислять действие неограниченного оператора на исходных данных. В случае условий Коши для временной переменной такие задачи рассматривались Ю. И. Бабенко. Однако в его исследованиях вопросы корректной разрешимости таких уравнений не рассматривались.

Ключевые слова: дробные степени операторов, задачи фильтрации, корректные и некорректные задачи, полугруппы преобразований.

ABOUT CORRECT SOLVABILITY OF PROBLEMS WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR V. S. GOLUBEV'S EQUATIONS, WHICH DESCRIBE THE MOTION OF A COMPRESSIBLE FLUID IN A POROUS ENVIRONMENT

V. A. Kostin, S. A. Chekhov, D. A. Fakhad

Abstract. The methods of the general theory of strongly continuous semigroups of transformations proved equally correct solvability in terms of S. G. Krein problem without initial conditions for a system of equations describing the motion of a compressible fluid in a porous environment. Algorithms for numerical implementation of resulting solution and the pressure gradient on the boundary are given. A feature of the gradient estimation is that we have to estimate the effect of an unbounded operator for the input data. In the case of the Cauchy conditions for time variable these problems were dealt with by Y. I. Babenko. However, questions of correct solvability these kind of equations in his research were not considered.

Keywords: correct and incorrect problem, filtration problem, fractional powers of operators, semigroups of transformations.

В работе [4] В. С. Голубева для описания процесса нестационарной фильтрации сжимаемой жидкости в пористой среде предложена следующая система уравнений:

$$a\frac{\partial^2 P_1(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t},\ x \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t} = \gamma(P_1(t,x) - P_2(t,x)),\ t \in R^+ = (0,\infty), \tag{2}$$

где ν – доля объема проточных зон; $P_1(t,x)$, $P_2(t,x)$ – давление в проточных и застойных зонах, γ – константа массобмена между проточными и застойными зонами.

Требуется найти градиент давления на границе $\left.\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = q(t)$ области, который определяет скорость течения жидкости согласно равенству $V(t) = -\frac{k}{\mu\chi}q(t)$, где k – проницаемость среды, μ – вязкость жидкости, χ – пористость, отнесенная к объему проточных зон.

В работах Ю. И. Бабенко [1], [2] при $t \geqslant 0$ для системы (1)-(2) рассматривается начально-краевая задача:

$$P_1(t,x)|_{x=0} = \varphi(t),\ \ P_1(t,x)|_{x=\infty} = 0,\ \ P_2(t,x)|_{x=\infty} = 0, \tag{3}$$

$$P_1(t,x)|_{t=0} = P_2(t,x)|_{t=0} = 0 \tag{4}$$

и указывается представление градиента давления в виде

$$q(t) = L_t^{\frac{1}{2}}\varphi(t) = \sqrt{\frac{a}{\nu}}e^{-\gamma t}Me^{\gamma t}, \tag{5}$$

где неограниченный оператор M формально выписывается в виде ряда

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^{\frac{1}{2}-n}, \tag{6}$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = \gamma(\beta - 1)$, $a_n = -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{n-k}a_k$ $(n \geqslant 3)$, сходимость которого в [1] и [2] не обсуждается.

Тем самым по существу не обсуждается вопрос о сходимости приближенных решений к точному и их устойчивости к погрешностям исходных данных.

Корректная разрешимость задачи (1)-(4) в пространствах непрерывных и ограниченных функций с точки зрения существования, единственности и устойчивости решения по исходным данным была установлена в [10].

В настоящей работе для системы (1)-(2) рассматривается задача, в которой условия Коши в (4) заменяются условиями

$$\sup_{t\in(-\infty,T)} |P_1(t,x)| < \infty,\quad \sup_{t\in(-\infty,T)} |P_2(t,x)| < \infty \tag{7}$$

Как известно (см. [1] с. 57, [11] с. 238), такие задачи относятся к классу задач без начальных условий, которые описывают процессы начавшиеся так давно, что начальные данные не сказываются на поведении решения.

В настоящем сообщении доказывается

Теорема 1. Задача (1)–(3), (7) равномерно корректно разрешима и справедливы оценки

$$|P_1(t,x)| \leqslant M \sup_{t\in(-\infty,T)} |\varphi(t)|, \tag{8}$$

$$|P_2(t,x)| \leqslant M \sup_{t\in(-\infty,T)} |\varphi(t)|, \tag{9}$$

При этом указывается алгоритм численной реализации решения задачи.

1. МЕТОД И СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ

Здесь мы применяем метод С. Г. Крейна исследования разрешимости краевых задач для уравнения эллиптического типа в банаховом пространстве (см. [9] с. 322), для применения которого система (1)-(3), (7) записывается в абстрактной форме

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} = Ap(x),\ x \geqslant 0, \tag{1.1}$$

$$p(0) = \varphi,\ \lim_{x\to\infty} ||p(x)|| = 0. \tag{1.2}$$

Показывается, что оператор $-A$ является генератором равностепенно непрерывной, в смысле К. Иосиды, полугруппы операторов $U(x, -A)$, удовлетворяющей условию

$$||U(x, -A)|| \leqslant Me^{-\omega x},\ \omega \geqslant 0,\ x \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Из этой оценки следует существование квадратного корня $A^{\frac{1}{2}}$. При этом оператор $-(A)^{\frac{1}{2}}$ является также генератором равностепенно непрерывной полугруппы $U(x, -A^{\frac{1}{2}})$ с оценкой

$$||U(x, -A^{\frac{1}{2}})|| \leqslant Me^{-\sqrt{\omega}x}. \tag{1.4}$$

В соответствии с этим вводятся следующие понятия:

Определение 1.1. Функция $p(x)$ называется обобщенным решением уравнения (1.1), если она непрерывна на $[0, \infty)$, имеет непрерывную вторую производную на $(0, \infty)$, $p(x) \in D(A)$, $A^{\frac{1}{2}}p(x) \in C_{(0,\ \infty)}$ и удовлетворяет уравнению (1.1).

Определение 1.2. Краевая задача (1.1)–(1.2) называется равномерно корректной, если для всех $f \in E$ существует единственное обобщенное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее (1.2), непрерывно зависящее в норме $||p||_{C(E)} = \sup\limits_{x\in R^+} ||p(x)||_{C(E)}$ от f.

По теореме С. Г. Крейна [9] для решения равномерно корректной задачи справедливо представление

$$p(x) = U(x, -A^{\frac{1}{2}})\varphi \tag{1.5}$$

Из (1.4) и (1.5) следует равномерно корректная разрешимость задачи (1.1)-(1.2) с оценкой $||p|| \leqslant Me^{-\sqrt{\omega x}}||\varphi||$.

Для дальнейшего полезно следующее

Утверждение 1.1. Если φ_n – собственный элемент оператора A, то есть

$$A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n,$$

где $\lambda_n > 0$, то решение задачи (1.1)-(1.2) имеет вид

$$p(x) = e^{-\sqrt{\lambda_n}x}\varphi_n \tag{1.6}$$

Доказательство следует из формулы Иосиды (см. [5] с. 358)

$$U(x, -A^{\frac{1}{2}})\varphi_n = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty s^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4s}}U(s, -A)\varphi_n ds, \tag{1.7}$$

пользуясь которой в (1.5), получаем соотношение

$$U(x, -A^{\frac{1}{2}})\varphi_n = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty s^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4s}}e^{-\sqrt{\lambda_n}s}\varphi_n ds = e^{-\sqrt{\lambda_n}x}\varphi_n. \tag{1.8}$$

Отсюда следует (1.6).

Таким образом, если в (1.2) $q = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m \varphi_m$, то решение задачи (1.1)-(1.2) имеет вид

$$p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m}x} \varphi_m. \tag{1.9}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Делая в системе (1)-(2) замену $t = \ln\tau$ и, полагая $u(\tau,x) = P_1(\ln\tau,x)$, $v(\tau,x) = P_2(\ln\tau,x)$, перейдем к системе

$$a\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2} = \nu\tau\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau} + (1-\nu)\tau\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau},\ x \geqslant 0, \tag{2.1}$$

$$\tau\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau} = \gamma[u(\tau,x) - v(\tau,x)],\ \tau \in (0, e^T) \tag{2.2}$$

При этом условия (3) и (7) принимают вид

$$u(\tau,x)|_{x=0} = P(\ln\tau) = \varphi(\tau),\ u(\tau,x)|_{x=\infty} = 0,\ v(\tau,x)|_{x=\infty} = 0 \tag{2.3}$$

$$\sup_{\tau\in(0,e^T)} |u(\tau,x)| < \infty \tag{2.4}$$

$$\sup_{\tau\in(0,e^T)} |v(\tau,x)| < \infty \tag{2.5}$$

Далее, решая уравнение $\tau\frac{dv}{d\tau} + \gamma v(\tau) = \gamma u(\tau)$, при условии (2.4), получаем соотношение

$$v(\tau,x) = \frac{\gamma}{\tau^\gamma}\int\limits_0^\tau s^{\gamma-1}u(s,x)ds, \tag{2.6}$$

используя которые в (2.1), приходим к задаче нахождения решения уравнения

$$a\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2} = \nu\tau\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau} + (1-\nu)\gamma u(\tau,x) - \frac{(1-\nu)\gamma^2}{\tau^\gamma}\int\limits_0^\tau s^{\gamma-1}u(s,x)ds = L_\tau u(\tau,x), \tag{2.7}$$

удовлетворяющего условию (2.4).

Полагая $a > 0$, приведем задачу (2.7), (2.4) к виду

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = Au(x) = \frac{1}{a}L_\tau u(x), \tag{2.8}$$

$$U(0) = \varphi. \tag{2.9}$$

Теорема 2.1. Оператор $-A$ является генератором полугруппы $U(x, -A)$ в классе ограниченных для $\tau \in (0,e^T)$ функций.

Действительно, оператор $A_1u = \nu\tau\frac{\partial u}{\partial\tau}$ является оператором Ж. Адамара и как доказано в [7] он является генератором равностепенно непрерывной полугруппы вида

$$U(x, -A_1)\varphi(\tau) = \varphi(\tau e^{-\frac{x}{a}}), \tag{2.10}$$

а интегральный оператор, заданный выражением

$$A_2\varphi = \frac{(1-\nu)\gamma^2}{\tau^\gamma}\int\limits_0^\tau s^{\gamma-1}\varphi(s)ds, \qquad (2.11)$$

ограничен с оценкой $||A_2\varphi||_C \leqslant (1-\nu)\gamma||\varphi||_C$.

И следовательно задача (2.8)-(2.9) равномерно корректна.

Теперь применяя оператор A к функции $\varphi_n(\tau) = \tau^n$, $n \geqslant 0$, получим

$$A\tau^n = \frac{\nu}{a}n\tau^n + \frac{(1-\nu)\gamma\tau^n}{a} - \frac{(1-\nu)\gamma^2}{a}\int\limits_0^\tau s^{\gamma+n-1}ds = \\ = \frac{1}{a}\left[n + (1-\nu)\gamma - \frac{(1-\nu)\gamma^2}{\gamma+n}\right]\tau^n = \lambda_n\tau^n. \qquad (2.12)$$

Таким образом, функции $\varphi_n(\tau) = \tau^n$ являются собственными функциями оператора A, при этом $\lambda_n \geqslant 0$.

И, следовательно, в силу теоремы С.Г. Крейна и формулы (1.9), получаем, что если краевые условия $\varphi(\tau)$ представимы в виде

$$\varphi(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\tau^m,\ \tau \in (0, e^T), \qquad (2.13)$$

то решение задачи (2.8)-(2.9) имеет вид

$$u(\tau,x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m}x}\tau_m. \qquad (2.14)$$

Отсюда для решения исходной задачи для системы (1)-(4) получим

$$P_1(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m}x}e^{mt},\ t \in (-\infty,T), \qquad (2.15)$$

$$P_2(t,x) = \gamma\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m}x}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\gamma(s-t)}e^{ms}ds. \qquad (2.16)$$

В частности из (2.13) имеем формально

$$P_2(t,x) = \gamma\sum_{m=0}^{\infty} c_m\frac{1}{m+\gamma}e^{-\sqrt{\lambda_m}x}e^{mt}. \qquad (2.17)$$

Градиент давления представлен в виде

$$\left.\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\sum_{m=0}^{\infty} c_m\sqrt{\lambda_m}e^{mt},\ t \in (-\infty,T), \qquad (2.18)$$

Однако ряд (2.18) может расходиться. Поэтому, пользуясь (2.13), для приближенного вычисления градиента давления укажем следующий алгоритм:

1. Так как $\varphi \in D(A)$, то $\varphi' \in C_{(0,e^T)}$ и в силу сепарабельности пространства $C_{(0,e^T)}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $Q_N(\tau) = \sum\limits_{m=0}^{N} b_m \tau^m$, такой, что выполняется неравенство

$$||\varphi - Q_N|| < \varepsilon. \tag{2.19}$$

Отсюда и из представления

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + \int\limits_0^\tau [\varphi'(s) - Q_N(s)]ds + \int\limits_0^\tau Q_N(s)ds$$

следует оценка

$$||\varphi - \widetilde{Q}_{N+1}|| < e^T \varepsilon, \tag{2.20}$$

где $Q_{N+1}(\tau) = \int_0^\tau Q_N(s)ds - \varphi(0)$.

И, таким образом, в качестве давления на границе области $x = 0$, с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$, берется многочлен $Q_N(\tau)$. Например, это может быть интерполяционный многочлен Ньютона или Тейлора, если $\varphi(\tau)$ - достаточно гладкая функция.

2. Окончательно для граиента давления в случае функции $P_1(t,x)$ с точностью до $\varepsilon > 0$ получаем соотношение

$$q(t) = \left.\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} \cong \left.\frac{\partial Q_N(e^t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко, Ю. И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков / Ю. И. Бабенко. — Л. : Химия, 1986. — 144 с.

2. Бабенко, Ю. И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена / Ю. И. Бабенко. — СПБ. : НПО «Профессионал», 2009. — 584 с.

3. Баев, А. Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

4. Голубев, В. С. Уравнение движения жидкости в пористой среде с застойными зонами / В. С. Голубев // ДАН СССР. — 1978. — Т. 238, №6. — С. 1318–1320.

5. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

6. Костин, А. В. О корректной разрешимости некоторых нестационарных задач без начальных условий / А. В. Костин, М. В. Муковнин, М. Х. Гим // Научные ведомости БелГУ. Серия. Математика. Физика. — 2014. — № 25 (196), Вып. 37. — С. 30–38.

7. Костин, В. А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка / В. А. Костин, М. Н. Небольсина // Доклады Академии Наук. — 2009. — Т. 428, № 1. — С. 20–22.

8. Костин, В. А. О коэрцитивности систем C_0-операторных многочленов / В. А. Костин, М. В. Муковнин, М. Х. Гим // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 150–159.

9. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

10. Небольсина, М. Н. Об одной задаче фильтрации в пористой среде / М. Н. Небольсина, С.Х.М. Аль Кхазраджи // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 129–135.

11. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Изд-во МГУ; Наука, 2004. — 798 с.

12. Баев, А. Д. Теоремы о “следах” для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 63–75.

13. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

REFERENCES

1. Babenko Yu.I. Heat and Mass Transfer. The Method of Calculation of Heat and Diffusion Currents. [Babenko Yu.I. Teplomassoobmen, metody rascheta teplovyx i diffuzionnyx potokov]. Leningrad: Chemistry, 1986, 144 p.

2. Babenko Yu.I. Methods of a fractional integrodifferentsirovaniye in applied of the theory of a Heat and Mass Transfer. [Babenko Yu.I. Metody drobnogo integrodifferencirovaniya v prikladnyx zadachax teorii teplomassoobmena]. St. Petersburg: NPO «Proffesional», 2009, 584 p.

3. Baev A.D., Buneev S.S. Apriori estimates of solutions one of boundary – value problem in the band for degenerate elliptic equation of high order are obtained. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka reshenij odnoj kraevoj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya e'llipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 81–92.

4. Golubev V.S. Equations of a motion of a fluid in a porous environment with stagnant zones. [Golubev V.S. Uravneniya dvizheniya zhidkosti v poristoi srede s zastoinymi zonami]. *DAN SSSR — Doklady Akademii Nauk USSR*, 1978, vol. 238, no. 1, pp. 1318–1320.

5. Iosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

6. Kostin A.V., Mukovnin M.V., Geem M.H. About well-Posed solvability of some nonstationary problems without initial conditions. [Kostin A.V., Mukovnin M.V., Geem M.H. O korrektnoi razreshimosti nekotorykh nestacionarnykh zadach bez nachal'nykh uslovii]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika — Proceedings of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics*, 2014, no. 25(196), r. 37, pp. 30–38.

7. Kostin V.A., Nebol'sina M.N. Well-Posedness of Boundary Value Problems for a Second-Order Equation. [Kostin V.A., Nebol'sina M.N. O korrektnoj razreshimosti kraevyx zadach dlya uravneniya vtorogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2009, vol. 428, no. 1, pp. 20–22.

8. Kostin V.A., Mukovnin M.V., Geem M.H. Coercivity Of Systems C_0-Operator Polynomials. [Kostin V.A., Mukovnin M.V., Geem M.H. O koercitivnosti sistem C_0-operatornykh mnogochlenov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 150–159.

9. Krejn S.G. Linear Differential Equations in Banach Spaces. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

10. Nebolsina M.N., Al Khazraji About one problem of a filtration in the porous environment. [Nebolsina M.N., Al Khazraji Ob odnoj zadache v poristoj srede]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 129–135.

11. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. [Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki]. Moscow: Nauka, Moscow, 2004, 798 p.

12. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Davidova M.B. Theorems about the «trecas» for a class of pseudodifferential operators with degeneracy. [Baev A.D., Kovalevskij R.A., Davydova M.B. Teoremy o “sledax” dlya odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem].

Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2015, no. 2, pp. 63–75.

13. Baev A.D., Kobylinskii P.A., Davidova M.B. On the Properties of Switching a Class of Degenerate Pseudo-Differential Operators with the Operators Of Differentiation. [Baev A.D., Kobylinskij P.A., Davydova M.B. O svojstvax kommutacii odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov s operatorami differencirovaniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 102–108.

Костин В. А., доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: vlkostin@mail.ru

Kostin V. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematical Modeling, Departament of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vlkostin@mail.ru

Чехов С. А., аспирант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: chekhovsergey@rambler.ru

Chekhov S. A., graduate student, Departament of Mathematical Modeling, Departament of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: chekhovsergey@rambler.ru

Фахад Д. А., аспирант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация

Fakhad D. A., graduate student, Departament of Mathematical Modeling, Departament of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation