УДК 517.928 [1+2]

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. П. Зубова, В. И. Усков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 18.10.2015 г.

Аннотация. Статья посвящена исследованию сингулярно возмущенной задачи Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве с малым параметром при производной. Коэффициентом при искомой функции является фредгольмовский оператор с нулевым индексом и ядром произвольной размерности. Цепочки присоединённых элементов, отвечающие нулевому собственному числу оператора, имеют разную длину. Строится асимптотическое разложение решения этой задачи методом Васильевой-Вишика-Люстерника. При вычислении компонентов регулярной части разложения решения используется метод каскадной декомпозиции уравнений. Доказывается асимптотичность этого разложения. Находятся условия регулярности вырождения для этой задачи. Формулируются условия поведения решения при стремлении параметра к нулю.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение, асимптотический метод, фредгольмовский оператор, каскадная декомпозиция.

THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM FOR THE FIRST-ORDER EQUATION IN A BANACH SPACE

S. P. Zubova, V. I. Uskov

Abstract. The article is devoted singularly perturbed Cauchy problem for differential equations in Banach space with a small parameter at the derivative. The coefficient under the unknown function is a Fredholm operator with zero index and the kernel of any dimension. Chains associated elements, corresponding to the zero eigenvalues have different lengths. We construct an asymptotic expansion of the solution of this problem by Vasilyeva-Vishik-Lyusternik method. When calculating the components of the regular part of the expansion of the solution cascade decomposition method of equations is used. Asymptoticity of this expansion is proved. The conditions regular degeneracy are found. Conditions solution behavior are formulated as the parameter to zero.

Keywords: singularly perturbed differential equations, asymptotic methods, Fredholm operator, cascade decomposition.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается уравнение

$$\varepsilon\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = Ax(t,\varepsilon) + h(t) \tag{1}$$

с условием

$$x(0,\varepsilon) = x^0 \in E, \tag{2}$$

где A — замкнутый линейный оператор: $E \to E$; E — банахово пространство; $\overline{\operatorname{dom} A} = E$; A — фредгольмов оператор с нулевым индексом, вообще говоря, неограниченный; $h(t)$ — непрерывная функция; $t \in [0,T]$; $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Решением задачи (1), (2) считается дифференцируемая функция $x(t,\varepsilon)$, удовлетворяющая (1), (2) при всех $t \in [0,T]$.

Уравнение (1) описывает движение вязкого потока (воздух, вода или кровь в сосудах) [1].

Уравнение такого вида рассматривалось в работе проф. С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана [2], где для построения асимптотического разложения решения задачи о колебаниях сильно вязкой жидкости использовался метод Боголюбова-Крылова.

Решение поставленной в данной работе задачи обобщает решение этой задачи в работе [3], где рассматривается случай $\dim\operatorname{Ker} A = 1$.

В монографии [1] строится асимптотическое разложение решения такой задачи методом регуляризации сингулярных возмущений при самосопряженном A, действующем в гильбертовом пространстве.

В настоящей работе рассматривается случай $\dim\operatorname{Ker} A \geqslant 1$ при наличии цепочек Жордана, вообще говоря, различной длины, отвечающих собственному числу 0; строится асимптотическое решение методом, разработанным в [4, 5].

Уравнение (1) является *сингулярно возмущенным* [1, 4], поскольку тип этого уравнения при формальном приравнивании $\varepsilon = 0$ меняется, так как предельное уравнение имеет вид:

$$A\bar{x}(t) = -h(t) \tag{3}$$

с некоторой искомой функцией $\bar{x}(t)$.

Возможно следующее поведение решения $x(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$:

(a) $\varepsilon^k x(t,\varepsilon) \rightrightarrows \bar{x}(t)$ при некотором $k \geqslant 0$;

(b) $\left\|\varepsilon^k x(t,\varepsilon)\right\| \to +\infty$ при некотором $k \geqslant 0$;

(c) предела $\varepsilon^k x(t,\varepsilon)$ при определенном k не существует.

Ограниченная функция $\upsilon(t,\varepsilon)$ называется *функцией погранслоя вблизи точки* $t = 0$, если $\upsilon(t,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} 0$ на отрезке $[t',T]$, $\forall t' : 0 < t' < T$, и $\upsilon(t,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\not\rightrightarrows} 0$ на всем отрезке $[0,T]$ [6].

Явление погранслоя возникает, если имеет место равенство:

$$x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t) + \upsilon(t,\varepsilon),$$

где $\bar{x}(t)$ — некоторое решение предельного уравнения (3), $\upsilon(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя.

Также говорят о явлении погранслоя в том случае, когда

$$x(t,\varepsilon) = \frac{\bar{x}(t) + O(\varepsilon)}{\varepsilon^k} + \upsilon(t,\varepsilon).$$

В данной работе строится асимптотическое разложение решения $x(t,\varepsilon)$ в виде ряда по степеням параметра ε:

$$\begin{gathered} x(t,\varepsilon) = \bar{x}_m(t,\varepsilon) + \bar{\upsilon}_m(t,\varepsilon) + R_m(t,\varepsilon), \\ \bar{x}_m(t,\varepsilon) = \sum_{i=-p}^{m} \varepsilon^i x_i(t), \quad \bar{\upsilon}_m(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \upsilon_i(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\upsilon_i(\tau)$ — функции погранслоя вблизи точки $t = 0$, $R_m(t,\varepsilon)$ — остаточный член.

Цель работы: выявить условия, при которых имеет место явление погранслоя, т.е. условия регулярности вырождения, построить функции $x_i(t)$, $\upsilon_i(\tau)$ и установить асимптотичность разложения (4), для чего достаточно доказать справедливость оценки:

$$R_m(t,\varepsilon) = o\left[\varepsilon^m \left(x_m(t) + \upsilon_m(\tau)\right)\right], \quad \varepsilon \to 0, \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Для этого используются следующие свойства фредгольмовского оператора A.

Свойство A [7]:

$$E = \operatorname{Coim} A \oplus \operatorname{Ker} A, \quad E = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A, \tag{6}$$

где $\operatorname{Coker} A$ — дефектное подпространство, $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к ядру $\operatorname{Ker} A$ в E, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$. Сужение $\widetilde{A}$ оператора A на подпространство $\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1}$.

Вводятся проекторы P и Q на $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Coker} A$ соответственно, отвечающие разложениям (6), и оператор $A^- = \widetilde{A}^{-1}(I - Q)$, называемый полуобратным, $A^-\colon \operatorname{Im} A \to \operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$. Здесь и далее через I обозначен единичный оператор в соответствующем пространстве.

Свойство B [8]:

Уравнение

$$A\mathrm{v} = \mathrm{w}, \quad \mathrm{v} \in \operatorname{dom} A, \quad \mathrm{w} \in E, \tag{7}$$

эквивалентно системе

$$\begin{cases} \mathrm{v} = A^-\mathrm{w} + P\mathrm{v}, \\ Q\mathrm{w} = 0, \end{cases}$$

где $P\mathrm{v}$ — некоторый элемент ядра $\operatorname{Ker} A$.

Второе условие в последней системе является условием корректности уравнения (7).

Пусть оператор A имеет цепочки Жордана присоединенных элементов, отвечающих собственному числу 0, максимальной длины $p < \infty$.

Обозначим $A_0 = A$, $Q_0 = Q$, $P_0 = P$. Известно [8], что цепочки Жордана оператора A имеют максимальную длину p тогда и только тогда, когда обратим оператор A_p, построенный по формулам, приведенным в работах [8-10] (в них принять $B = I$):

$$A_1 = S_0P_0, \quad \widehat{S}_0 = I - A_1^- S_0, \quad S_0 = Q_0,$$
$$A_{j+1} = Q_jS_{j-1}A^-P_j, \quad \widehat{S}_j = \widehat{S}_{j-1} - A_{j+1}^- S_j, \quad T_j = A^-\widehat{S}_{j-1}, \quad S_j = Q_jS_{j-1}T_j, \quad j \geqslant 1.$$

Из этих соотношений следуют общие формулы для операторов A_j:

$$A_1 = Q_0P_0, \quad A_j = \Omega_{j-1}K_jA^-P_{j-1}, \quad j \geqslant 2,$$

в обозначениях: $\Omega_j = \prod\limits_{k=0}^{j} Q_{j-k}, \quad j \geqslant 0; \quad K_2 = I, \quad K_j = \prod\limits_{k=1}^{j-2} T_k, \quad j \geqslant 3.$

Мы будем рассматривать случай, когда A_j, $j = 1,2,\ldots,p$, — ненулевые операторы.

Операторы A_j, $j = 0,1,\ldots,p-1$, — фредгольмовские с квадратными матрицами. Для этих операторов введем: проекторы P_j и Q_j на $\operatorname{Ker} A_j$ и $\operatorname{Coker} A_j$ соответственно и полуобратный оператор $A_j^- = \widetilde{A}_j^{-1}(I - Q_j)$, $\widetilde{A}_j^{-1}\colon \operatorname{Coim} A_j \to \operatorname{Im} A_j \cap \operatorname{dom} A_j$, отвечающие разложениям:

$$\operatorname{Ker} A_{j-1} = \operatorname{Coim} A_j \oplus \operatorname{Ker} A_j, \quad \operatorname{Coker} A_{j-1} = \operatorname{Im} A_j \oplus \operatorname{Coker} A_j, \quad j \geqslant 1.$$

Уравнение (3) имеет неединственное решение. В силу свойства B оно имеет вид:

$$\bar{x}(t) = -A^-h(t) + P\varphi(t)$$

с некоторой вектор-функцией $P\varphi(t) \in \operatorname{Ker} A$. При этом оно разрешимо не при любых $h(t)$, а только для тех, для которых $Qh(t) = 0$.

1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Методом, разработанным в [4], [5], находим уравнения первого итерационного процесса:

$$Ax_{-p}(t) = 0, \tag{8}$$

$$Ax_{-p+l}(t) = \frac{dx_{-p+l-1}}{dt}, \quad l = 1,2,\ldots,p-1, \tag{9}$$

$$Ax_0(t) = \frac{dx_{-1}}{dt} - h(t), \tag{10}$$

$$Ax_l(t) = \frac{dx_{l-1}}{dt}, \quad l = 1,2,\ldots,m; \tag{11}$$

уравнения второго итерационного процесса:

$$\frac{d\upsilon_i}{d\tau} = A\upsilon_i(\tau), \quad i = 0,1,\ldots,m, \tag{12}$$

и уравнение для остаточного члена:

$$\varepsilon\frac{dR_m}{dt} = AR_m(t,\varepsilon) - \varepsilon^{m+1}\frac{dx_m}{dt}. \tag{13}$$

Потребуем, чтобы сумма $\bar{x}_m(t,\varepsilon) + \bar{\upsilon}_m(t,\varepsilon)$ удовлетворяла начальному условию (2). Для этого функции $x_i(t)$, $\upsilon_i(\tau)$ и $R_m(t,\varepsilon)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} &x_{-p+l}(0) = 0, \quad l = 0,1,\ldots,p-1,\\ &x_0(0) + \upsilon_0(0) = x^0,\\ &x_l(0) + \upsilon_l(0) = 0, \quad l = 1,2,\ldots,m, \end{aligned} \tag{14}$$

$$R_m(0,\varepsilon) = 0. \tag{15}$$

1.1. Первый итерационный процесс

При вычислении функций $x_i(t)$ для наглядности будет введена отдельная двойная нумерация формул. При решении уравнений используется свойство B.

Уравнение (8) равносильно равенству:

$$x_{-p}(t) = P_0\varphi_{-p.0}(t). \tag{$-p.1$}$$

Уравнения (9) равносильны системам:

$$x_{-p+l}(t) = A^{-}\frac{dx_{-p+l-1}}{dt} + P_0\varphi_{-p+l.0}(t), \tag{$-p+l.1$}$$

$$Q_0\frac{dx_{-p+l-1}}{dt} = 0, \quad l = 1,2,\ldots,p-1. \tag{$-p+l.2$}$$

Уравнение (10) равносильно системе:

$$x_0(t) = A^{-}\left(\frac{dx_{-1}}{dt} - h(t)\right) + P_0\varphi_{0.0}(t), \tag{0.1}$$

$$Q_0\left(\frac{dx_{-1}}{dt} - h(t)\right) = 0. \tag{0.2}$$

Уравнения (11) эквивалентны системам:

$$x_l(t) = A^{-}\frac{dx_{l-1}}{dt} + P_0\varphi_{l.0}(t), \tag{l.1}$$

$$Q_0\frac{dx_{l-1}}{dt} = 0, \quad l = 1,2,\dots,m. \tag{l.2}$$

Вектор-функции $P_0\varphi_{-p.0}(t)$, $P_0\varphi_{-p+l.0}(t)$, $P_0\varphi_{0.0}(t)$, $P_0\varphi_{l.0}(t) \in \operatorname{Ker} A$ надлежит вычислить.

В равенствах $(-p+l.1)$, (0.1) и $(l.1)$ введем обозначения:

$$f_{-p+l}(t) = A^{-}\frac{dx_{-p+l-1}}{dt}, \quad f_0(t) = A^{-}\left(\frac{dx_{-1}}{dt} - h(t)\right), \quad f_l(t) = A^{-}\frac{dx_{l-1}}{dt}.$$

Т.е. эти равенства можно переписать в виде:

$$x_{-p}(t) = P_0\varphi_{-p.0}(t), \quad x_i(t) = f_i(t) + P_0\varphi_{i.0}(t), \quad i \neq -p.$$

1.1.1. Алгоритм вычисления

Вычисление функций $x_{-p}(t)$, $x_{-p+l}(t)$, $l = 1,2,\dots,p-1$, $x_l(t)$, $l \geqslant 0$, разобьем на p шагов с вычислением промежуточных значений этих функций на каждом шаге. Каждая из функций $x_i(t)$ вычисляется по цепочке формул:

$$\begin{aligned}&(i.1)\overset{\text{1-й шаг}}{\to}(i+1.1),(i+1.2)\overset{\text{2-й шаг}}{\to}(i+2.1),(i+2.2)\overset{\text{3-й шаг}}{\to}(i+3.1),(i+3.2)\to\\&\to\dots\overset{(p-2)\text{-й шаг}}{\to}(i+p-2.1),(i+p-2.2)\overset{(p-1)\text{-й шаг}}{\to}(i+p-1.1),(i+p-1.2)\to\\&\overset{p\text{-й шаг}}{\to}(i+p.2),\end{aligned}$$

используя последовательно фредгольмовость операторов A_1, A_2, $\dots$, A_{p-1} и обратимость оператора A_p (в $\operatorname{Ker} A_{p-1}$).

Пусть каждая функция $x_i(t)$ $(p+1)$ раз непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим алгоритм вычисления функции $x_{-p+l}(t)$.

<u>1-й шаг</u>. Подставим выражение $(-p+l.1)$ для $x_{-p+l}(t)$ в равенство $(-p+l+1.2)$, получим уравнение:

$$\Omega_0\left(\frac{df_{-p+l}}{dt} + \frac{dP_0\varphi_{-p+l.0}}{dt}\right) = 0.$$

В силу того, что $\Omega_0 P_0 = Q_0 P_0 = A_1$ – фредгольмовский оператор, последнее соотношение равносильно системе:

$$\begin{cases}\dfrac{dP_0\varphi_{-p+l.0}}{dt} = P_1\varphi_{-p+l.1}(t),\\ \Omega_1\dfrac{df_{-p+l}}{dt} = 0.\end{cases}$$

Тогда равенство $(-p+l+1.1)$ примет вид:

$$x_{-p+l+1}(t) = y_{-p+l+1}(t) + K_2\frac{dP_1\varphi_{-p+l.1}}{dt} + P_0\varphi_{-p+l+1.0}(t)$$

с некоторой функцией $y_{-p+l+1}(t)$.

<u>s-й шаг</u>, $s = 2{,}3,\ldots,p-1$. На $(s-1)$-м шаге получим промежуточное равенство:

$$x_{-p+l+s-1}(t) = y_{-p+l+s-1}(t) + \sum_{j=1}^{s-1} K_{j+1}\left(P_j\varphi_{-p+l+s-1-j.j}(t)\right) + P_0\varphi_{-p+l+s-1.0}(t).$$

Подставим это равенство в $(-p+l+s.2)$, получим уравнение:

$$\Omega_0\left(\frac{dy_{-p+l+s-1}}{dt} + \sum_{j=1}^{s-1} K_{j+1}\frac{dP_j\varphi_{-p+l+s-1-j.j}}{dt} + \frac{dP_0\varphi_{-p+l-1.0}}{dt}\right) = 0.$$

Оно последовательно расщепляется на следующие системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_r\varphi_{-p+s-r-1.r}}{dt} = -A^-_{r+1}\Omega_r\left(\dfrac{dy_{-p+l+s-1}}{dt} + \sum\limits_{j=r+1}^{s-1} K_{j+1}\dfrac{dP_j\varphi_{-p+l+s-1-j.j}}{dt}\right) + \\ + P_{r+1}\varphi_{-p+s-r-1.r+1}(t), \\ \Omega_{r+1}\left(\dfrac{dy_{-p+l+s-1}}{dt} + \sum\limits_{j=r+1}^{s-1} K_{j+1}\dfrac{dP_j\varphi_{-p+l+s-1-j.j}}{dt}\right) = 0, \quad r = 0{,}1,\ldots,l-2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{s-1}\varphi_{-p.s-1}}{dt} = -A^-_s\Omega_{s-1}\dfrac{dy_{-p+l+s-1}}{dt} + P_s\varphi_{-p.s}(t), \\ \Omega_s\dfrac{dy_{-p+l+s-1}}{dt} = 0. \end{cases}$$

Этот процесс называют каскадной декомпозицией уравнений (8)-(11).

Вторые равенства в последних системах на каждом шаге обеспечивают существование и единственность функции $x_{-p+l-1}(t)$. Для всех функций $x_i(t)$ обозначим такие условия $(\mathcal{E})$.

После подстановок из первых равенств в полученных системах, проходя снизу вверх, в силу равенства $(-p+l+s.1)$ получим равенство для функции $x_{-p+l-s}(t)$:

$$x_{-p+l+s}(t) = y_{-p+l+s}(t) + \sum_{j=1}^{s-1} K_{j+1}\left(P_j\varphi_{-p+l+s-j.j}(t)\right) + P_0\varphi_{-p+l+s.0}(t).$$

<u>p-й шаг</u>. Положим в последнем равенстве $s = p-l-1$, получим равенство:

$$x_{-1}(t) = y_{-1}(t) + \sum_{j=1}^{l} K_{j+1}A^-\left(P_j\varphi_{-1-j.j}(t)\right) + P_0\varphi_{-1.0}(t).$$

Подставив это равенство в $(i+p.2)$, получим уравнение:

$$\Omega_0\left(\widetilde{y}_{-1}(t) + \sum_{j=1}^{l} K_{j+1}A^-\frac{dP_j\varphi_{-1-j.j}}{dt} + \frac{dP_0\varphi_{-1.0}}{dt}\right) = 0$$

с некоторой функцией $\widetilde{y}_{-1}(t)$.
p разветвлений этого равенства и вторых равенств в последующих системах приводят к уравнению:

$$\Omega_{p-1}\left(\widetilde{y}_{-1}(t) + K_pA^-\frac{dP_{p-1}\varphi_{-p.p-1}}{dt}\right) = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$\frac{dP_{p-1}\varphi_{-p.p-1}}{dt} = -A_p^{-1}\Omega_{p-1}\widetilde{y}_{-1}(t).$$

В силу первых равенств в последних системах, полученных на каждом шаге, и равенства $(-p+l.1)$, получим искомое равенство для функции $x_{-p+l}(t)$:

$$x_{-p+l}(t) = w_{-p+l}(t) + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^{p-1-j}}{(p-1-j)!} P_{p-1-j}\varphi_{-p+l.p-1-j}(0)$$

с некоторой функцией $w_{-p+l}(t)$.

При вычислении функции $x_{-p}(t)$ на 1-м шаге уравнение:

$$\Omega_0 \frac{dP_0\varphi_{-p.0}}{dt} = 0$$

равносильно равенству:

$$\frac{dP_0\varphi_{-p.0}}{dt} = P_1\varphi_{-p.1}(t).$$

Функции $x_{-p}(t)$ и $x_l(t)$ вычисляются аналогичным образом. Они находятся по следующим соотношениям:

$$x_{-p}(t) = w_{-p}(t) + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^{p-1-j}}{(p-1-j)!} P_{p-1-j}\varphi_{-p.p-1-j}(0),$$

$$x_l(t) = w_l(t) + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^{p-1-j}}{(p-1-j)!} P_{p-1-j}\varphi_{l.p-1-j}(0)$$

с некоторыми функциями $w_{-p}(t)$ и $w_l(t)$.

В силу линейной независимости элементов цепочек Жордана имеем:

$$P_{p-1-j}\varphi_{i.p-1-j}(0) = 0, \quad j = 0,1,\ldots,p-1, \quad i \neq 0.$$

Из равенств (14) и разложения:

$$x^0 = (I-P)x^0 + Px^0, \tag{16}$$

где $(I-P)x^0 \in \operatorname{Coim} A, \quad Px^0 \in \operatorname{Ker} A$, следует, что

$$P_0\varphi_{0.0}(0) = Px^0.$$

Далее приведем явные формулы для нахождения функций $x_i(t)$ при каждом значении p. Введем операторы:

$$J_k = \underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^\theta}_{(k)} (\cdot)\, ds^k, \quad k \geqslant 1,$$

$$F_1 = I - J_1 A_1^{-1} Q \frac{d}{dt},$$

$$F_k = I - \sum_{j=1}^{k-1} J_j A_j^{-} \Omega_{j-1} K_{j+1} \frac{d^j}{dt^j} - J_k A_k^{-1} \Omega_{k-1} K_{k+1} \frac{d^k}{dt^k}, \quad k \geqslant 2.$$

1.1.2. Случай $p = 1$.

В этом случае справедливы следующие формулы:

$$x_{-1}(t) = J_1 A_1^{-1} \Omega_0 h(t),$$

$$x_0(t) = F_1 f_0(t) + Px^0,$$

$$x_l(t) = F_1 f_l(t), \quad l \geqslant 1.$$

1.1.3. Случай $p = 2$.

В этом случае справедливы следующие формулы:

$$x_{-2}(t) = J_2 A_2^{-1} \Omega_1 h(t),$$

$$x_{-1}(t) = F_2 f_{-1}(t) + H_{2.-1} h(t),$$

где:

$$H_{2.-1} = J_1 A_1^{-} \Omega_0(\cdot) + J_2 A_2^{-1} \Omega_1 A^{-} \left(I - A_1^{-} Q\right) \frac{d}{dt},$$

$$x_0(t) = F_2 f_0(t) + Px^0,$$

$$x_l(t) = F_2 f_l(t), \quad l \geqslant 1.$$

При этом условия $(\mathcal{E})$ таковы:

$$\Omega_1 \left(\frac{df_{-1}}{dt} - h(t) \right) = 0,$$

$$\Omega_1 \frac{df_0}{dt} = 0,$$

$$\Omega_1 \frac{df_{l+1}}{dt} = 0, \quad l \geqslant 0.$$

1.1.4. Случай $p = 3$.

Имеют место следующие формулы:

$$x_{-3}(t) = J_3 A_3^{-1} \Omega_2 h(t),$$

$$x_{-2}(t) = F_3 f_{-2}(t) + H_{3.-2} h(t),$$

где:

$$H_{3.-2} = J_2 A_2^{-} \Omega_1 (\cdot) + J_3 A_3^{-1} \Omega_2 G_{3.-2.1} \frac{d}{dt},$$

$$G_{3.-2.1} = A^{-}(I - A_1^{-} Q)(I - A^{-} A_2^{-} \Omega_1),$$

$$x_{-1}(t) = F_3 f_{-1}(t) + H_{3.-1} h(t),$$

при этом:

$$H_{3.-1} = J_1 A_1^{-} \Omega_0 (\cdot) + J_2 A_2^{-} \Omega_1 A^{-} \left(I - A_1^{-} Q\right) \frac{d}{dt} + J_3 A_3^{-1} \Omega_2 G_{3.-1.1} \frac{d^2}{dt^2},$$

$$G_{3.-1.1} = A^{-} \left(I - A_1^{-} Q\right) \left(I - A^{-} A_2^{-} \Omega_1\right) A^{-} \left(I - A_1^{-} Q\right),$$

$$x_0(t) = F_3 f_0(t) + Px^0,$$

$$x_l(t) = F_3 f_l(t), \quad l \geqslant 1.$$

Здесь условия $(\mathcal{E})$ имеют вид:

$$\Omega_1 \frac{df_{-2}}{dt} = 0, \quad \Omega_2 \left(K_3 \frac{d^2 f_{-2}}{dt^2} - h(t) \right) = 0,$$
$$\Omega_1 \left(\frac{df_{-1}}{dt} - h(t) \right) = 0, \quad \Omega_2 \left(K_3 \frac{d^2 f_{-1}}{dt^2} - A^- \left(I - A_1^- Q \right) \frac{dh}{dt} \right) = 0,$$
$$\Omega_1 \frac{df_0}{dt} = 0, \quad \Omega_2 K_3 \frac{df_0}{dt} = 0,$$
$$\Omega_1 \frac{df_{l+1}}{dt} = 0, \quad \Omega_2 K_3 \frac{df_{l+1}}{dt} = 0, \quad l \geqslant 0.$$

1.1.5. Случай $p \geqslant 4$.

Введем обозначения:

$$\Gamma_r = I - K_r A^- A_r^- \Omega_{r-1}, \quad R_{k_1.k_2} = \prod_{\gamma=k_1}^{k_2} \Gamma_\gamma.$$

Тогда имеют место следующие формулы:

$$x_{-p}(t) = J_p A_p^{-1} \Omega_{p-1} h(t),$$
$$x_{-p+1}(t) = F_p f_{-p+1}(t) + H_{p.-p+1} h(t),$$

где:

$$H_{p.-p+1} = J_{p-1} A_{p-1}^- \Omega_{p-2} + J_p A_p^{-1} \Omega_{p-1} G_{p.-p+1.1} \frac{d}{dt},$$
$$G_{p.-p+1.1} = A^- \left(I - A_1^- Q \right) R_{2.p-1}.$$

При $l = 2,3,\ldots,p-1$ имеем:

$$x_{-p+l}(t) = F_p f_{-p+l}(t) + H_{p.-p+l} h(t),$$

при этом:

$$H_{p.-p+l} = J_{p-l} A_{p-l}^- \Omega_{p-l-1} + \sum_{j=1}^{l-1} J_{p-l+j} A_{p-l+j}^- \Omega_{p-l+j-1} G_{p.-p+l.j} \frac{d^j}{dt^j} + J_p A_p^{-1} \Omega_{p-1} G_{p.-p+l.l} \frac{d^l}{dt^l},$$

$$G_{p.-p+l.1} = A^- \left(I - A_1^- Q \right) R_{2.p-l},$$
$$G_{p.-p+l.j} = A^- \left(I - A_1^- Q \right) R_{2.p-l+j-1} G_{p.-p+l.j-1}, \quad j = 2,3,\ldots,l.$$

Далее:

$$x_0(t) = F_p f_0(t) + P x^0,$$
$$x_l(t) = F_p f_l(t), \quad l \geqslant 1.$$

Условия $(\mathcal{E})$ имеют следующий вид.

Для функции $x_{-p+l-1}(t), \quad l = 1,2,\ldots,p-2$:

$$\begin{cases} \Omega_r K_{r+1} \dfrac{d^r f_{-p+l}}{dt^r} = 0, \quad r = 1,2,\ldots,p-l-1, \\ \Omega_{p-l} \left(K_{p-l+1} \dfrac{d^{p-l} f_{-p+l}}{dt^{p-l}} - h(t) \right) = 0, \\ \Omega_{p-l+r} \left(K_{p-l+r+1} \dfrac{d^{p-l+r} f_{-p+l}}{dt^{p-l+r}} + G_{p.-p+l.r} \dfrac{d^r h}{dt^r} \right) = 0, \quad r = 1,2,\ldots,l-1, \quad l = 1,2,\ldots,p-2. \end{cases}$$

Для функции $x_{-2}(t)$:

$$\begin{cases} \Omega_1\left(K_2\dfrac{df_{-1}}{dt} - h(t)\right) = 0, \\ \Omega_r\left(K_{r+1}\dfrac{d^r f_{-1}}{dt^r} + G_{p.-1.r-1}\dfrac{d^{r-1}h}{dt}\right) = 0, \quad r = 2{,}3,\ldots,p-1. \end{cases}$$

Для функции $x_{l-1}(t)$, $\quad l \geqslant 0$:

$$\Omega_r K_{r+1}\frac{d^r f_l}{dt^r} = 0, \quad r = 1{,}2,\ldots,p-1.$$

Очевидно, что функции $\dfrac{dx_i}{dt}$, приведенные в пунктах 1.1.2-1.1.5, ограниченные.

1.2. Второй итерационный процесс

Пусть задача (1),(2) с $h(t) \equiv 0$ равномерно корректна.

Обозначим $U_G(t)$ полугрупповой оператор, порожденный некоторым оператором G.

Решая уравнения (12) с начальными значениями $\upsilon_i(0)$ последовательно, начиная с первого, получим [11]:

$$\upsilon_i(\tau) = U_A(\tau)\upsilon_i(0), \quad i = 0{,}1,\ldots,m. \tag{17}$$

Для нахождения начальных значений $\upsilon_i(0)$ воспользуемся равенствами (14) и разложением (16). Имеем:

$$\begin{aligned} &\upsilon_0(0) = (I-P)x^0 - f_0(0) = (I-P)x^0 + A^- h(0), \\ &\upsilon_l(0) = -f_l(0), \quad l \geqslant 1. \end{aligned}$$

Справедливо следующее замечание.

Замечание 1. *Из полученных для $\upsilon_i(0)$ равенств следует, что $\bar{\upsilon}_m(t,\varepsilon) \in \operatorname{Coim} A$.*

Формула для нахождения функции $\bar{\upsilon}_m(t,\varepsilon)$ такова:

$$\bar{\upsilon}_m(t,\varepsilon) = U_A(\tau)\left[(I-P)x^0 + A^- h(0) - \sum_{i=1}^{m}\varepsilon^i f_i(0)\right], \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}. \tag{18}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АСИМПТОТИЧНОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ

Введем оператор $A_\varepsilon = \varepsilon^{-1}A$. Решив уравнение (13) с начальным условием (15), получим:

$$R_m(t,\varepsilon) = -\varepsilon^m \int_0^t U_{A_\varepsilon}(t-s)\frac{dx_m}{ds}ds. \tag{19}$$

Для доказательства асимптотичности разложения (4) решения уравнения (1) достаточно установить справедливость оценки:

$$\|R_m(t,\varepsilon)\| < m_0 \cdot \varepsilon^{m+1}, \quad m_0 = \text{const} > 0. \tag{20}$$

или, как это следует из соотношения (19), оценки:

$$\left\|\int_0^t U_{A_\varepsilon}(t-s)\frac{dx_m}{ds}ds\right\| < m_0 \cdot \varepsilon. \tag{21}$$

Установим выполнение неравенства (21).

Справедлива оценка [11]:

$$\|U_{A_\varepsilon}(t)\| = \left\|U_A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\| \leqslant m_1 \exp\left[\omega \cdot \frac{t}{\varepsilon}\right], \quad m_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{22}$$

В силу ограниченности полугруппы $U_{A_\varepsilon}(t)$ и функции $\dfrac{dx_m}{dt}$ имеем:

$$\left\|\int\limits_0^t U_{A_\varepsilon}(t-s)\frac{dx_m}{ds}ds\right\| \leqslant m_2 \int\limits_0^t \|U_{A_\varepsilon}(t-s)\|ds, \quad m_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Оценим интеграл в правой части последнего неравенства, пользуясь оценкой (22):

$$\int\limits_0^t \|U_{A_\varepsilon}(t-s)\|\,ds \leqslant m_1 \int\limits_0^t \exp\left[\frac{\omega}{\varepsilon}\cdot(t-s)\right]ds = -m_1\frac{\varepsilon}{\omega}\left(1-\exp\left[\frac{\omega}{\varepsilon}\cdot t\right]\right) \leqslant$$
$$\leqslant -m_1\frac{\varepsilon}{\omega}\left(1-\exp\left[\frac{\omega}{\varepsilon}\cdot T\right]\right) = -\frac{m_1}{\omega}\left(1-\exp\left[\frac{\omega}{\varepsilon}\cdot T\right]\right)\cdot\varepsilon.$$

Пусть $\omega < 0$. В этом случае $0 < \exp\left[\dfrac{\omega}{\varepsilon}\cdot T\right] < 1$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда будет выполнена искомая оценка (20) с константой $m_0 = -\dfrac{m_1 m_2}{\omega} > 0$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть задача Коши* (1), (2) *с* $h(t) \equiv 0$ *равномерно корректна,* A *– фредгольмовский оператор с жордановыми цепочками элементов, отвечающих собственному числу* 0*, максимальной длины* p*. Пусть сужение оператора* A *на* $\mathrm{Coim}\,A$ *есть производящий оператор полугруппы отрицательного типа,* $h(t)$ *—* $(m+p)$ *раз непрерывно дифференцируемая функция при каждом* $t \in [0,T]$*. Тогда имеет место асимптотическое разложение* (4) *с функциями* $x_i(t)$*, определяемыми по формулам, приведенным в пунктах* 1.1.2-1.1.5*, и функцией* $\bar{v}_m(t,\varepsilon)$*, определяемой по формуле* (18)*.*

Справедливо замечание.

Замечание 2. *Из теоремы следует поведение* $x(t,\varepsilon)$ *с* $k = p$*: случай* (a) *имеет место, если все точки спектра оператора* A *находятся в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \omega < 0$*. Случай* (b) *– если хотя бы одна точка спектра оператора* A *находится в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$*. Случай* (c) *имеет место, если хотя бы одна точка спектра оператора* A *находится на оси* $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$*, а остальные — в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$*.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов, С. А. Основы математической теории пограничного слоя / С. А. Ломов, И. С. Ломов. — М. : Издательство Московского университета, 2011. — 456 с.

2. Крейн, С. Г. Асимптотический метод в задаче о колебаниях сильно вязкой жидкости / С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан // Прикладная математика и механика. — 1969. — Т. 33, № 3. — С. 456–464.

3. Треногин, В. А. Развитие и приложения асимтотического метода Люстерника-Вишика / В. А. Треногин // Успехи мат. наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4 (154). — С. 123–156.

4. Васильева, А. Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.

5. Вишик, М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, вып. 5 (77). — С. 3–122.

6. Зубова, С. П. О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной / С. П. Зубова // Доклады РАН. — 2014. — Т. 454, № 4. — С. 383–386.

7. Аткинсон, Ф. В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах / Ф. В. Аткинсон // Математический сборник. — 1951. — Т. 28 (70), № 1. — С. 3–14.

8. Зубова, С. П. Решение однородной задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной / С. П. Зубова // Доклады РАН. — 2009. — Т. 428, № 4. — С. 444–446.

9. Баев, А. Д. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / А. Д. Баев, С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 134–140.

10. Зубова, С. П. Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения в случае двухшаговой декомпозиции / С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестник Ижевского гос. ун–та им. М. Т. Калашникова. Серия: математика. — 2015. — № 1 (65). — С. 120–122.

11. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

REFERENCES

1. Lomov S.A., Lomov I.S. Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer. [Lomov S.A., Lomov I.S. Osnovyi matematicheskoy teorii pogranichnogo sloya]. Moscow: Moscow University, 2011, 456 p.

2. Krein S.G., Ngo Zuy Kan. Asymptotic method in the problem of vibrations of a very viscous liquid. [Krein S.G., Ngo Zuy Kan Asimptoticheskiy metod v zadache o kolebaniyax sil'no vyazkoy zhidkosti]. *Prikladnaya matematika i mexanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 33, no. 3, pp. 456–464.

3. Trenogin V.A. Development and application of the asymptotic Lyusternik-Vishik method. [Trenogin V.A. Razvitie i prilozheniya asimptoticheskogo metoda Lyusternika-Vishika]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, iss. 4 (154), pp. 123–156.

4. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations. [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmuschennyix uravneniy]. Moscow: Nauka, 1973, 272 p.

5. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. [Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regulyarnoe vyirozhdenie i pogranichnyix sloy dlya lineynyix differentsialnyix uravneniy s malyim parametrom]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1957, vol. 12, iss. 5 (77), pp. 3–122.

6. Zubova S.P. On the role of disturbances in the Cauchy problem for equations with Fredholm operator at the derivative. [Zubova S.P. O roli vozmuscheniy v zadache Koshi dlya uravneniya s fredgolmovyim operatorom pri proizvodnoy]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, no. 4, pp. 383–386.

7. Atkinson F.V. Normal solvability of linear equations in normed spaces. [Atkinson F.V. Normalnaya razreshimost lineynyix uravneniy v normirovannyix prostranstvax]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1951, vol. 28 (70), no. 1, pp. 3–14.

8. Zubova S.P. The solution of the homogeneous Cauchy problem for a Noetherian operator at the derivative. [Zubova S.P. Reshenie odnorodnoy zadachi Koshi dlya uravneniya s neterovyim operatorom pri proizvodnoy]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2009, vol. 428, no. 4, pp. 444–446.

9. Baev A.D., Zubova S.P., Uskov V.I. The Solution of problems for descriptor equations by decomposition method. [Baev A.D., Zubova S.P., Uskov V.I. Reshenie zadach dlya deskriptornyih uravnenij metodom dekompozitsii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*,

2013, no. 2, pp. 134–140.

10. Zubova S.P., Uskov V.I. The Solution of Cauchy problem for descriptor equation in two-step decomposition case. [Zubova S.P., Uskov V.I. Reshenie zadachi Koshi dlya deskriptornogo uravneniya v sluchae dvuhshagovoy dekompozitsii]. *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo universiteta imeni M. T. Kalashnikova. Seriya: Matematika — Proceedings of Izhevsk State University M. T. Kalashnikov. Series: Mathematics*, 2015, no. 1 (65), pp. 120–122.

11. Krein S.G. Linear differential equations in a Banach space. [Krein S.G. Lineynyie differentsialnyie uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

Зубова Светлана Петровна, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: spzubova@mail.ru
Тел.: +78(4732)66–60–76

Zubova Svetlana Petrovna, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Assistant professor, Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: spzubova@mail.ru
Tel.: +78(4732)66–60–76

Усков Владимир Игоревич, аспирант кафедры математического анализа Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: vum1@yandex.ru
Тел.: +7(4732)33–48–86

Uskov Vladimir Igorevich, aspirant of Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vum1@yandex.ru
Tel.: +7(4732)33–48–86