УДК 517.977

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ РАЗРЫВНОЙ СТРУНЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ*

М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.10.2015 г.

Аннотация. В работе рассматривается модель колебаний разрывной физической системы, состоящей из двух кусков струн, соединенных между собой с помощью пружины, с краевыми условиями третьего рода. Основной целью исследования является получение явного вида внешних воздействий, обеспечивающих переход колебательного процесса из начального состояния в заданное финальное состояние за малый промежуток времени при условии, что решение удовлетворяет условиям упругого закрепления на концах. Получен аналог формулы Даламбера, посредством которой удается предъявить в явном виде искомые внешние воздействия. Доказана единственность решения исследуемой математической модели.

Ключевые слова: колебания струны, разрывные решения, формула Даламбера, задача управления, краевая задача.

MODELING OF DISCONTINUOUS STRING OSCILLATIONS FOR THE CASE OF THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM

M. B. Zvereva, Zh. O. Zalukaeva, S. A. Shabrov

Abstract. In this paper we consider the oscillation model of discontinuos physical system, consisting of two pieces of strings which are interconnected by a spring with boundary conditions of third type. The main purpose of the research is to deduce an explicit form of external influences, allowing to put the process of oscillations from the initial state to the desired final state for a small period of time if the solution satisfies the elastic fastening conditions at the ends. The d'Alembert formula analogue was obtained, whereby it is possible to produce required external influences in the explicit form. The uniqueness of the solution of the considered mathematical model was proved.

Keywords: vibration of the string, discontinuous solutions, D'Alembert formula, control problem, boundary problem.

Задачам граничного управления и их оптимизации посвящены работы многих математиков, среди которых Ильин В. А., Моисеев Е. И., Егоров А. И., Знаменская Л. Н., Боровских А. В., Провоторов В. В. [1]–[6]. При изучении таких задач, в первую очередь, исследуются условия, при которых колебательный процесс в системе под воздействием некоторого граничного управления может быть переведен из состояния, задаваемого начальными условиями, в желаемое финальное состояние.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

Ранее в статье [7] для разрывной струны рассматривалась задача поиска граничных режимов с краевыми условиями первого рода $u(-1,t) = \mu_2(t)$, $u(1,t) = \mu_1(t)$. В настоящей работе для разрывной струны изучается задача с краевыми условиями третьего рода $-u'_x(-1,t) + \gamma_2 u(-1,t) = \mu_2(t)$, $u'_x(1,t) + \gamma_2 u(1,t) = \mu_1(t)$. Целью работы является нахождение внешних воздействий $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, позволяющих за промежуток времени $0 < T < 1$ перевести колебательный процесс в заданное финальное состояние.

Рассмотрим задачу о колебаниях механической системы, представляющую собой два куска струны единичной длины, натянутые вдоль отрезка $[-1,1]$, на концах которого расположены пружины жесткости γ_2, прикрепленные к вертикальным спицам. При этом предполагается, что струны дополнительно соединены между собой пружиной жесткости γ_1.

Пусть $u(x,t)$ — отклонение изучаемой системы в момент времени t от положения равновесия в точке x. Заметим, что в точке $x = 0$ определены только предельные значения функции $u(x,t)$, а именно, $u(-0,t)$, $u(+0,t)$, которые описывают отклонения соответствующих концов кусков струн. Колебания такой системы при $x \neq 0$ описываются волновыми уравнениями $u''_{xx}(x,t) = u''_{tt}(x,t)$.

Математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0,t) = \gamma_1 \Delta u(0,t), \\ u'_x(-0,t) = \gamma_1 \Delta u(0,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ u'_t(x,0) = \psi(x), \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ -u'_x(-1,t) + \gamma_2 u(-1,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u'_x(1,t) + \gamma_2 u(1,t) = \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta u(0,t) = \dfrac{u(+0,t) - u(-0,t)}{2}$ — скачок функции u в точке $x = 0$.

Теорема 1. Решение задачи (1) единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t)$ — решения задачи (1). Тогда разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0,t) = \gamma_1 \Delta u(0,t), \\ u'_x(-0,t) = \gamma_1 \Delta u(0,t), \\ u(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ u'_t(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ -u'_x(-1,t) + \gamma_2 u(-1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u'_x(1,t) + \gamma_2 u(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{2}$$

Докажем, что функция $u(x,t) \equiv 0$ при $x \neq 0$. Рассмотрим полную энергию цепочки струн в момент времени t, которую обозначим через $E(t)$. Имеем:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0-} ((u'_x)^2 + (u'_t)^2)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0+}^{1} ((u'_x)^2 + (u'_t)^2)\,dx + \frac{\gamma_2 u^2(-1,t)}{2} +$$

$$+ \frac{\gamma_2 u^2(1,t)}{2} + \frac{\gamma_1 (\Delta u(0,t))^2}{2}.$$

Заметим, что $\dfrac{d}{dt}E(t) = 0$. Значит, $E(t) = const$. Причем, $E(t) = E(0) = 0$. Значит, $u(x,t) = 0$ при $x \neq 0$.

Теорема 2. *Будем предполагать, что* $\varphi \in C^2[-1{,}0)\bigcup(0{,}1]$, $\psi \in C^1[-1{,}0)\bigcup(0{,}1]$, $\mu_i \in C^2[0{,}T]$, $0 \leqslant t \leqslant T < 1$. *Пусть для функций* φ, ψ *выполняются следующие условия:* $\varphi'(+0) = \varphi'(-0) = \gamma_1\Delta\varphi(0)$, $-\varphi'(-1) + \gamma_2\varphi(-1) = 0$, $\varphi'(1) + \gamma_2\varphi(1) = 0$, $\psi'(-0) = \psi'(+0)$, $\psi'(+0) + \psi'(-0) = 2\gamma_1\Delta\psi(0)$, $\psi'(-1) = \psi'(1)$, $\psi'(-1) = \gamma_2\psi(-1)$, $\psi'(1) = -\gamma_2\psi(1)$. *Тогда решение* $u(x{,}t)$ *задачи (1) может быть представлено в виде*

$$u(x{,}t) = \begin{cases} e^{-\gamma_2(x+t-1)}\int\limits_0^{t+x-1} e^{\gamma_2\alpha}\underline{\mu_1}(\alpha)\,d\alpha + \dfrac{\Phi^+(x-t)+\Phi^+(x+t)}{2} + \\ +\dfrac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Psi^+(s)ds, \quad x > 0 \\ e^{\gamma_2(x-t+1)}\int\limits_0^{t-x-1} e^{\gamma_2\alpha}\underline{\mu_2}(\alpha)\,d\alpha + \dfrac{\Phi^-(x-t)+\Phi^-(x+t)}{2} + \\ +\dfrac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Psi^-(s)ds, \quad x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь

$$\underline{\mu_i}(t) = \begin{cases} \mu_i(t), t \geqslant 0 \\ 0, t < 0; \end{cases}$$

$$\Phi^+(x) = \begin{cases} \varphi(x), \quad 0 < x \leqslant 1 \\ \varphi(+0), \quad x = 0 \\ \varphi(-x) - 2\gamma_1 e^{2\gamma_1 x}\int\limits_0^{-x}(\varphi(z)-\varphi(-z))e^{2\gamma_1 z}dz, \quad -1 \leqslant x < 0 \\ \varphi(2-x) + 2\gamma_2 e^{\gamma_2(2-x)}\int\limits_1^{2-x} e^{-\gamma_2 z}\varphi(z)\,dz, \quad 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

$$\Phi^-(x) = \begin{cases} \varphi(x), \quad -1 \leqslant x < 0 \\ \varphi(-0), \quad x = 0 \\ \varphi(-x) + 2\gamma_1 e^{-2\gamma_1 x}\int\limits_0^{x}(\varphi(z)-\varphi(-z))e^{2\gamma_1 z}dz, \quad 0 < x \leqslant 1 \\ \varphi(-2-x) + 2\gamma_2 e^{\gamma_2(2+x)}\int\limits_1^{2+x} e^{-\gamma_2 z}\varphi(-z)\,dz, \quad -2 < x \leqslant -1. \end{cases}$$

$$\Psi^+(x) = \begin{cases} \psi(x), \quad 0 < x \leqslant 1 \\ \psi(+0), \quad x = 0 \\ \psi(-x) - 2\gamma_1 e^{2\gamma_1 x}\int\limits_0^{-x}(\psi(z)-\psi(-z))e^{2\gamma_1 z}dz, \quad -1 \leqslant x < 0 \\ \psi(2-x) + 2\gamma_2 e^{\gamma_2(2-x)}\int\limits_1^{2-x} e^{-\gamma_2 z}\psi(z)\,dz, \quad 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

$$\Psi^-(x) = \begin{cases} \psi(x), \quad -1 \leqslant x < 0 \\ \psi(-0), \quad x = 0 \\ \psi(-x) + 2\gamma_1 e^{-2\gamma_1 x} \int\limits_0^x (\psi(z) - \psi(-z)) e^{2\gamma_1 z} dz, \quad 0 < x \leqslant 1 \\ \psi(-2-x) + 2\gamma_2 e^{\gamma_2(2+x)} \int\limits_1^{2+x} e^{-\gamma_2 z} \psi(-z)\, dz, \quad -2 < x \leqslant -1. \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что решение задачи (1) может быть представлено в виде суммы решений следующих задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0,t) = \gamma_1 \Delta u(0,t), \\ u'_x(-0,t) = \gamma_1 \Delta u(0,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ u'_t(x,0) = \psi(x), \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ -u'_x(-1,t) + \gamma_2 u(-1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u'_x(1,t) + \gamma_2 u(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0,t) = \gamma_1 \Delta u(0,t), \\ u'_x(-0,t) = \gamma_1 \Delta u(0,t), \\ u(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ u'_t(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \\ -u'_x(-1,t) + \gamma_2 u(-1,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ u'_x(1,t) + \gamma_2 u(1,t) = \mu_1(t). \quad 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{5}$$

В свою очередь, решение задачи (4) на соответствующих промежутках может быть представлено виде суммы решений задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1 \\ u'_x(1,t) = -\gamma_2 u(1,t), \\ u'_x(+0,t) = 0, \\ u(x,0) = \dfrac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x,0) = \dfrac{\psi(x) + \psi(-x)}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1 \\ u'_x(1,t) = -\gamma_2 u(1,t), \\ u'_x(+0,t) = 2\gamma_1 u(+0,t), \\ u(x,0) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x,0) = \dfrac{\psi(x) - \psi(-x)}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0 \\ u'_x(-1,t) = \gamma_2 u(-1,t), \\ u'_x(-0,t) = 0, \\ u(x,0) = \dfrac{\varphi(-x) + \varphi(x)}{2}, \\ u'_t(x,0) = \dfrac{\psi(-x) + \psi(x)}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -1 < x < 0 \\ u'_x(-1,t) = \gamma_2 u(-1,t), \\ u'_x(-0,t) = -2\gamma_1 u(-0,t), \\ u(x,0) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x,0) = \dfrac{\psi(x) - \psi(-x)}{2}, \end{cases}$$

Аналог формулы Даламбера [8] для каждой из задач позволяет получить требуемый результат.

Рассмотрим задачу поиска внешних воздействий $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, которые позволяют перевести рассматриваемую систему из начального состояния

$$u(x{,}0) = \varphi(x), \quad u'_t(x{,}0) = \psi(x)$$

в финальное

$$u(x{,}T) = \varphi^*(x), \quad u'_t(x{,}T) = \psi^*(x) \quad -1 \leqslant x < 0, 0 < x \leqslant 1 \tag{6}$$

за малый промежуток времени $0 < T < 1$.

Обозначим через $h(x{,}t)$ решение задачи (5), а через $v(x{,}t)$ — решение задачи (4). Тогда решение исходной задачи $u(x{,}t) = h(x{,}t) + v(x{,}t)$. Следовательно,

$$h(x{,}T) = \varphi^*(x) - v(x{,}T) = \widetilde{\varphi}(x),$$

$$h'_t(x{,}T) = \psi^*(x) - v'_t(x{,}T) = \widetilde{\psi}(x).$$

Рассмотрим случай, когда $x > 0$. Тогда

$$e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int\limits_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu_1}(\alpha) d\alpha = \widetilde{\varphi}(x),$$

$$-\gamma_2 e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int\limits_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu_1} \alpha d\alpha + \underline{\mu_1}(x + T - 1) = \widetilde{\psi}(x).$$

Продифференцируем первое равенство и вычтем из него второе. Получим

$$\widetilde{\varphi}'(x) - \widetilde{\psi}(x) = 0.$$

Проинтегрировав последнее равенство, имеем

$$\widetilde{\varphi}(t) - \widetilde{\varphi}(t_0) - (\widehat{\widetilde{\psi}}(t) - \widehat{\widetilde{\psi}}(t_0)) \equiv 0,$$

где $\widehat{\widetilde{\psi}}(t)$ — какая-то первообразная для $\widetilde{\psi}(t)$, $t_0 \in (0{,}1]$. Первообразную выберем так, чтобы

$$\widehat{\widetilde{\psi}}(t_0) - \widetilde{\varphi}(t_0) = 0. \tag{7}$$

Тогда получим равенство $\widetilde{\varphi}(t) - \widehat{\widetilde{\psi}}(t) = 0$, справедливое для всех $t \in (0{,}1]$.

С другой стороны,

$$2\underline{\mu_1}(T + x - 1) - 2\gamma_2 e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int\limits_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu_1}(\alpha) d\alpha = \widetilde{\varphi}'(x) + \widetilde{\psi}(x).$$

Значит, при $0 < x \leqslant 1 - T$ должно выполняться

$$\widetilde{\varphi}'(x) + \widetilde{\psi}(x) \equiv 0.$$

Зафиксировав любое $t_0 \in (0{,}1 - T]$ и проинтегрировав последнее равенство, получаем

$$\widetilde{\varphi}(t) - \widetilde{\varphi}(t_0) + \widehat{\widetilde{\psi}}(t) - \widehat{\widetilde{\psi}}(t_0) \equiv 0,$$

где $\widehat{\widetilde{\psi}}(t)$—какая-то первообразная для $\widetilde{\psi}(t)$, $t_0 \in (0{,}1-T]$.

Выберем первообразную так, чтобы

$$\widehat{\widetilde{\psi}}(t_0)+\widetilde{\varphi}(t_0)=0. \tag{8}$$

Тогда для всех $0<t\leqslant 1-T$ получим, что $\widetilde{\varphi}(t)+\widehat{\widetilde{\psi}}(t)=0$.

Поскольку

$$\widetilde{\varphi}(x)=e^{-\gamma_2(x+T-1)}\int\limits_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha}\underline{\mu_1}(\alpha)d\alpha,$$

то $\widetilde{\varphi}(x)\equiv 0$ при $x\leqslant 1-T$. Следовательно, если $t_0\in(0{,}1-T]$, то $\widetilde{\varphi}(t_0)=0$. Таким образом, для $t_0\in(0{,}1-T]$ равенства (7), (8) эквивалентны.

Получаем, что

$$\widetilde{\varphi}(t)-\widehat{\widetilde{\psi}}(t)=0,\quad t\in(0{,}1] \tag{9}$$

$$\widetilde{\varphi}(t)+\widehat{\widetilde{\psi}}(t)=0,\quad t\in(0{,}1-T]. \tag{10}$$

Вернувшись к исходным обозначениям, условия (8), (9), (10) перепишем следующим образом

$$\varphi^*(t)-v(t,T)-\widehat{\psi}^*(t)+\widehat{v}(t,T)=0,\quad t\in(0{,}1], \tag{11}$$

$$\varphi^*(t)-v(t,T)+\widehat{\psi}^*(t)-\widehat{v}(t,T)=0,\quad t\in(0{,}1-T], \tag{12}$$

$$\varphi^*(t_0)-v(t_0,T)+\widehat{\psi}^*(t_0)-\widehat{v}(t_0,T)=0,\quad t_0\in(0{,}1-T]. \tag{13}$$

Здесь

$$\widehat{v}(x,t)=\frac{\Phi^+(x+t)-\Phi^+(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\left(\widehat{\Psi}^+(x+t)+\widehat{\Psi}^+(x-t)\right),$$

где $\widehat{\Psi}^+(t)$ — какая-то первообразная для $\Psi^+(t)$.

В свою очередь, формулы (11), (12), (13) можно представить как

$$\varphi^*(t)-\widehat{\psi}^*(t)-\Phi^+(t-T)+\widehat{\Psi}^+(t-T)=0,\quad t\in(0{,}1], \tag{14}$$

$$\varphi^*(t)+\widehat{\psi}^*(t)-\Phi^+(t+T)-\widehat{\Psi}^+(t+T)=0,\quad t\in(0{,}1-T], \tag{15}$$

где первообразные $\widehat{\Psi}^+(t)$, $\widehat{\psi}^*(t)$ выбираются так, чтобы

$$\varphi^*(t_0)+\widehat{\psi}^*(t_0)-\Phi^+(t_0+T)-\widehat{\Psi}^+(t_0+T)=0,\quad t_0\in(0{,}1-T]. \tag{16}$$

Заметим, что равенство (14) может быть переписано следующим образом. Если $T<x\leqslant 1$, то

$$\varphi^*(x)-\widehat{\psi}^*(x)-\varphi(x-T)+\widehat{\psi}(x-T)=0.$$

Если $x=T$, то

$$\varphi^*(T)-\widehat{\psi}^*(T)-\varphi(+0)+\widehat{\psi}(+0)=0.$$

Если $0<x<T$, то

$$\varphi^*(x)-\widehat{\psi}^*(x)-\varphi(T-x)+2\gamma_1 e^{2\gamma_1(x-T)}\int\limits_0^{T-x}(\varphi(z)-\varphi(-z))e^{2\gamma_1 z}dz+$$

$$+2\widehat{\psi}(+0)-\widehat{\psi}(T-x)-e^{2\gamma_1(x-T)}\int\limits_0^{T-x}(\psi(z)-\psi(-z))e^{2\gamma_1 z}dz-\int\limits_0^{x-T}(\psi(-z)-\psi(z))dz=0.$$

Равенство (15) принимает вид

$$\varphi^*(x)+\widehat{\psi}^*(x)-\varphi(x+T)-\widehat{\psi}(x+T)=0, \quad x\in(0{,}1-T].$$

Причем, первообразные $\widehat{\psi^*}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ выбираются так, чтобы

$$\varphi^*(x_0)+\widehat{\psi^*}(x_0)-\varphi(x_0+T)-\widehat{\psi}(x_0+T)=0,$$

где x_0 — фиксированный элемент из промежутка $(0{,}1-T]$.

Найдем теперь функцию $\mu_1(t)$. Сложив $h'_t(x{,}T)$ и $h'_x(x{,}T)$, с учетом

$$v'_x(x{,}T)+v'_t(x{,}T)=\Phi^{+'}(x+T)+\Psi^+(x+T),$$

и замены $x+T-1=t$, получим

$$\mu_1(t)=\frac{1}{2}(\gamma_2\varphi^*(t+1-T)+\gamma_2\widehat{\psi^*}(t+1-T)+\varphi^{*'}(t+1-T)+\psi^*(t+1-T)+\gamma_2\varphi(1-t)+$$

$$+\varphi'(1-t)+\gamma_2\widehat{\psi}(1-t)+2\gamma_2\int\limits_1^{t+1}\psi(2-s)ds-\psi(1-t))-\gamma_2\widehat{\psi}(1).$$

где $\widehat{\psi^*}$ и $\widehat{\psi}$ - первообразные соответствующих функций.

Аналогично, внешнее воздействие $\mu_2(t)$ имеет вид

$$\mu_2(t)=\frac{1}{2}(\gamma_2\varphi^*(T-1-t)-\gamma_2\widehat{\psi^*}(T-1-t)-\varphi^{*'}(T-1-t)+\psi^*(T-1-t)+\gamma_2\varphi(t-1)-$$

$$-\varphi'(t-1)-\gamma_2\widehat{\psi}(t-1)-2\gamma_2\int\limits_{-1}^{-1-t}\psi(-2-s)ds-\psi(t-1))+\gamma_2\widehat{\psi}(-1).$$

При этом начальные и финальные данные задачи должны быть связаны следующими равенствами.

Если $-1\leqslant x<-T$, то

$$\varphi^*(x)+\widehat{\psi}^*(x)-\varphi(x+T)-\widehat{\psi}(x+T)=0.$$

Если $x=-T$, то

$$\varphi^*(-T)+\widehat{\psi}^*(-T)-\varphi(-0)-\widehat{\psi}(-0)=0.$$

Если $-T<x<0$, то

$$\varphi^*(x)+\widehat{\psi}^*(x)-\varphi(-T-x)-2\gamma_1e^{-2\gamma_1(x+T)}\int\limits_0^{T+x}(\varphi(z)-\varphi(-z))e^{2\gamma_1z}dz-$$

$$-2\widehat{\psi}(-0)+\widehat{\psi}(-T-x)+e^{-2\gamma_1(x+T)}\int\limits_0^{T+x}(\psi(z)-\psi(-z))e^{2\gamma_1z}dz-\int\limits_0^{x+T}(\psi(-z)-\psi(z))dz=0.$$

Если $T-1\leqslant x<0$, то

$$-\varphi^*(x)+\widehat{\psi}^*(x)+\varphi(x-T)-\widehat{\psi}(x-T)=0.$$

Причем, первообразные $\widehat{\psi^*}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ выбираются так, чтобы

$$-\varphi^*(x_0) + \widehat{\psi^*}(x_0) + \varphi(x_0 - T) - \widehat{\psi}(x_0 - T) = 0,$$

где x_0 — фиксированный элемент из промежутка $[T-1, 0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин, В. А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // Успехи математических наук. — 2005. — Т. 60, № 6 (366). — С. 89–114.

2. Избранные труды В. А. Ильина: В 2-х томах: Том 2. — М. : МАКС Пресс, 2008. — 692 с.

3. Егоров, А. И. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, вып. 1. — С. 85–92.

4. Егоров, А. И. Наблюдаемость колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами в точке соединения / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2011. — № 1. — С. 142–146.

5. Боровских, А. В. Формулы граничного управления неоднородной струной / А. В. Боровских // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, вып. 1. — С. 64—89.

6. Провоторов, В. В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн / В. В. Провоторов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. — 2012. — Вып. 1. — С. 62–71.

7. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний сингулярной струны / М. Б. Зверева, Ф. О. Найдюк, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 111–119.

8. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Издательство МГУ, 1999. — 797 с.

9. Баев, А. Д. Теоремы о “следах” для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 63–75.

REFERENCES

1. Il’in V.A., Moiseev E.I. Optimization of boundary controls of string vibrations. [Il’in V.A., Moiseev E.I. Optimizaciya granichnyx upravlenij kolebaniyami struny]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2005, vol. 60, iss. 6 (366), pp. 89–114.

2. Selected works of V. A. Il’in: 2 volumes: V. 2. [Izbrannye trudy V.A. Il’ina: V 2-x tomax: Tom 2]. Moscow: MAKS Press, 2008, 692 p.

3. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. On the controllability of elastic oscillations connected in series objects with distributed parameters. [Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Ob upravlyaemosti uprugix kolebanij posledovatel’no soedinennyx ob"ektov s raspredelennymi parametrami]. *Trudy instituta matematiki i mexaniki UrO RAN — Supplement to Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS*, 2011, vol. 17, iss. 1, pp. 85–92.

4. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Observability of oscillations of a network of related objects the distributed and concentrated parameters in the connection point. [Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Nablyudaemost’ kolebanij seti iz svyazannyx ob"ektov s raspredelennymi i sosredotochennymi parametrami v tochke soedineniya]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya — Vestnik of Saint Petersburg university. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2011, no. 1, pp. 142–146.

5. Borovskikh A.V. Formulas of boundary control of an inhomogeneous string. [Borovskix A.V. Formuly granichnogo upravleniya neodnorodnoj strunoj]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2007, vol. 43, iss. 1, pp. 64–89.

6. Provotorov V.V. Construction of boundary controls in the problem of oscillation of a system of strings. [Provotorov V.V. Postroenie granichnyx upravlenij v zadache o gashenii kolebanij sistemy strun]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya — Vestnik of Saint Petersburg university. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2012, no. 1, pp. 62–71.

7. Zvereva M.B., Najdyuk F.O., Zalukaeva Zh.O. Modeling vibrations of a singular string. [Zvereva M.B., Najdyuk F.O., Zalukaeva Zh.O. Modelirovaniye kolebanij singulyarnoj struny]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 111–119.

8. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Equations of mathematical physics. [Tixonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Moscow state University, 1999, 797 p.

9. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Davidova M.B. Theorems about the «trecas» for a class of pseudodifferential operators with degeneracy. [Baev A.D., Kovalevskij R.A., Davydova M.B. Teoremy o "sledax" dlya odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 63–75.

Зверева Маргарита Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zvereva_m@math.vsu.ru
Тел.: +7(473)2–20–86–90

Zvereva Margarita Borisovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvereva_m@math.vsu.ru
Tel.: +7(473)2–20–86–90

Залукаева Жанна Олеговна, аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Zalukaeva Zhanna Olegovna, Post-graduate student of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Шабров Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Shabrov Sergey Aleksandrovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90