УДК 517.983

КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЁННЫЕ ОСОБЕННОСТИ НЕРАЗРЕШЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Р. Зачепа

Воронежский экономико-правовой институт

Поступила в редакцию 30.09.2015 г.

Аннотация. Рассмотрена проблема локального ветвления решений неразрешенной относительно производной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $F(\dot{x}(t), x(t)) = 0$ в некоторой окрестности стационарного решения $x = 0$, где F — аналитическое отображение, действующее из окрестности нуля U пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $F(0{,}0) = 0$. Указаны условия конечной определенности решений (структурной устойчивости асимптотических представлений относительно возмущений уравнения слагаемыми достаточно высокого порядка в нуле). Использован переход к нелинейному аналитическому уравнению $F(y{,}x) = 0$ (заменой $\dot{x} = y$). Акцент сделан на случай, в котором точка (0,0) — особое стационарное решение: rank $\frac{\partial F(0,0)}{\partial y} < n$. Представлен метод приближенного нахождения решений $y = y(x)$ $(\dot{x} = y(x))$ с оценкой количества возможных решений и формулами их асимптотических представлений (в нуле).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно производной, ветвление решений, конечная определенность решения, асимптотическое представление ветви решений.

THE FINITE DEFINITENESS SINGULARITYS OF TO DIFFERENTIAL EQUATIONS UNRESOLVED WITH RESPECT TO A DERIVATIVE

V. R. Zachepa

Abstract. The problem of local branching of solutions of not resolved is considered rather derivative nonlinear system of the ordinary differential equations $F(\dot{x}(t), x(t)) = 0$ in some vicinity of the stationary solution of $x = 0$, where F —the analytical display operating from the vicinity of U zero space $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in space $\mathbb{R}^n$ $t \in \mathbb{R}^1$, $F(0{,}0) = 0$. Conditions are specified final definiteness of decisions (structural stability asymptotic representations concerning indignations of the equation composed rather high order in zero). Transition is used to the nonlinear analytical equation of $F(y, x) = 0$ (replacement $\dot{x} = y$) with emphasis on a case, in which point of (0,0) —singular stationary solution: rank $\frac{\partial F(0,0)}{\partial y} < n$. The method of approximate finding of solutions of $y = y(x)$ is presented $(\dot{x} = y(x))$ with an assessment of number of possible decisions and formulas their asymptotic representations (in zero).

Keywords: not allowed rather derivative differential equations, branching of decisions, final definiteness of the equation, asymptotic representations of branches decisions.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи механики, физики и других естественых наук приводят к проблеме построения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x_i} = P_i(x_1,x_2,...,x_n), \qquad i = 1,2,...,n$$

в некоторой окрестности стационарного решения $x = 0$. При этом функции $P_i(x)$ предполагаются аналитическими или достаточно гладкими. Процедуру построения решения такой задачи назовем *интегрированием уравнения, разрешенного относительно производной* или, более кратко, *разрешенным интегрированием.*

При построении решений обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной, возникает ситуация *неразрешенного интегрирования* уравнения

$$F(\dot{x}(t), x(t)) = 0\,, \tag{1}$$

где F — аналитическое отображение из окрестности U нуля пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $F(0,0) = 0$.

После замены $\dot{x} = y$ уравнение (1) сводится к уравнению

$$F(y,x) = 0\,, \tag{2}$$

Основной интерес представляет случай, в котором точка $(y,x) = (0,0)$ является особым решением (точкой бифуркации) уравнения (2), то есть

$$\operatorname{rank} \frac{\partial F(0,0)}{\partial y} < n.$$

В противном случае (регулярного решения $(y,x) = (0,0)$) можно было бы воспользоваться теоремой о неявной функции, и задача свелась бы к разрешенному интегрированию.

В особом случае основной интерес представляет разработка процедуры построения решений $y = y(x)$ $(\dot{x} = y(x))$, оценка количества решений и отыскание их асимптотик (в нуле). Сопутствующая задача — исследование порядков конечной определенности решений (устойчивости асимптотик решений относительно возмущений уравнения слагаемыми достаточно высокого порядка в нуле).

Рассмотренная в статье задача построения решений тесно связана с более ранними результатами автора по теории простых малых решений [1]–[3] гладких уравнений. Основу всех рассуждений представляет полученный автором алгоритм проверки конечной определенности аналитического уравнения и построения асимптотических приближений к ветвям малых решений [1],[3].

1. УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ УРАВНЕНИЯ ПО ПРОИЗВОДНОЙ

В этом пункте рассмотрим условие регулярности по производной, которое позволит разрешить уравнение (1) относительно производной.

Рассмотрим уравнение (2) в окрестности U нулевого особого решения.

Определение. *Будем говорить, что уравнение (2) регулярно по переменной y в $U \setminus (0,0)$, если*

$$\operatorname{rank} D_y F(y,x) = n$$

при $(y,x) \in F^{-1}(0) \setminus (0,0)$ (это эквивалентно тому, что $\det D_y F(y,x) \neq 0$ при $(y,x) \in F^{-1}(0) \setminus (0,0)$)

Рассмотрим функцию $\varphi(y,x) = \|x\|^2$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. В работе автора [4] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть уравнение (2) регулярно по переменной y в точках множества $U \setminus (0,0)$. Тогда гладкое многообразие $F^{-1}(0) \setminus (0,0)$ диффеоморно декартову произведению $M \times (0,c_0]$, где $M = F^{-1}(0) \bigcap \varphi^{-1}(c)$ — многообразие без края (компактное) размерности $n-1$, $(0,c_0]$ — полуинтервал вещественной прямой.*

Следствие. *В условиях теоремы 1 множество решений уравнения (2) гомеоморфно фактор множеству* $\mathrm{con}(M) = (M \times [0,c_0]) \Big/ M \times \{0\}$ *(конусу над M).*

Гладкое многообразие M является аналитическим множеством и, следовательно, представляет собой объединение конечного числа связанных компонент: $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$. Отсюда имеем, что множество решений уравнения (2) гомеоморфно объединению конечного числа пересекающихся в нуле конусов:

$$F^{-1}(0) \approx \mathrm{con}(M_1) \cup \mathrm{con}(M_2) \cup \dots \cup \mathrm{con}(M_k).$$

На каждом конусе $\mathrm{rank} D_y F(y,x)$ максимален при $(y,x) \neq (0,0)$. Следовательно, по теореме о неявной функции, для уравнения (2) имеется набор ветвей решений $y = y_i(x), i = 1,2,...,k$.

Таким образом, *уравнение (1) равносильно совокупности уравнений разрешённых относительно производной*

$$\dot{x}(t) = y_i(x(t)), \quad i = 1,2,...,k. \tag{3}$$

Число уравнений k равно числу компонент связности многообразия M.

Итак, справедлива

Теорема 2. *Пусть уравнение (2) регулярно по переменной y в точках множества $U \setminus (0,0)$. Тогда в некоторой окрестности нулевой особой точки уравнение (1) равносильно совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений (3).*

2. ТЕХНИКА ПРОСТЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение (2), удовлетворяющее условию регулярности по переменной y в точках множества $U \setminus (0,0)$. Вообще говоря, условие регулярности может быть выполнено не на всех компонентах связности. Пусть $y = y(x)$ — одна из связанных компонент гладкого многообразия $F^{-1}(0) \setminus (0,0)$, на которой выполнено условие регулярности. Назовем соответствующую ветвь решений $y = y(x)$ *простым малым решением уравнения (2).* Ему соответствует разрешенное относительно производной уравнение $\dot{x} = y(x)$. Таким образом, речь может идти о частичном разрешении уравнения (1).

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые факты теории аналитических множеств.

Теорема 3. (Неравенство Лоясевича [5]) *Пусть Ω — открытое множество в R^n, и пусть f — действительная аналитическая функция в Ω. Пусть $E = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$. Тогда для всякого компактного множества $K \subset \Omega$ существуют такие константы C, $\alpha > 0$, что для всех $x \in K$ выполняется неравенство $\mid f(x) \mid \geqslant C(d(x,E))^\alpha$* (здесь $d(x,E)$ — расстояние от точки x до множества E).

Следствие. Пусть Ω — открытое множество в R^n, и пусть X и Y — два аналитических множества в Ω. Тогда X и Y расположены регулярно по отношению друг к другу. То есть для всякого компакта K существуют такие константы C, $\gamma > 0$, что для $x \in X \cap K, C, \gamma > 0$ выполнено неравенство

$$d(x,Y) \geqslant C(d(x, X \cap Y))^\gamma.$$

Лемма 1. *Пусть $y = y(x)$ простое малое решение уравнения (2). Тогда для x из некоторой окрестности нуля существуют такие константы $C_1, \; s > 0$, что выполнено неравенство $\|y(x)\| \leqslant C_1\|x\|^s$.*

Доказательство. Рассмотрим аналитические множества $X = F^{-1}(0), Y = \{(y,x) \mid x = 0\}$, которые регулярно расположены. Следовательно, учитывая, что $X \cap Y = \{(0,0)\}$ (см. [4], лемма 2), $d((y(x),x),Y) \geqslant Cd((y(x),x),(0,0))$. То есть, $\|x\| \; \geqslant C\|(y(x),x)\|^\gamma \geqslant C\|y(x)\|^\gamma$ (для некоторого γ).

Таким образом,

$$\|y(x)\| \leqslant C_1\|x\|^s$$

при $C_1 = \frac{1}{C^s}, \;\; s = \frac{1}{\gamma}$. Наибольшее из чисел s, для которых удовлетворяется неравенство $\|y(x)\| \leqslant C\|x\|^s$, назовём *порядком в нуле* простого малого решения $y = y(x)$.

Лемма 2. *Пусть $y = y(x)$ — простое малое решение уравнения (2), тогда для $\forall x \neq 0$ из некоторой окрестности нуля существуют такие константы $C, \; l > 0$, что выполнено неравенство $\|(D_yF(y(x),x))^{-1}\| \leqslant C\|x\|^{-l}$.*

Доказательство. Рассмотрим аналитическую функцию

$$\psi(y,x) = \|F(y,x)\|^2 + (\det D_yF(y,x))^2 .$$

Из условия регулярности уравнения (2) по переменной y следует, что локально множество $\psi^{-1}(0)$ состоит из одной точки $(0,0)$. Следовательно, по неравенству Лоясевича, существуют такие константы $\overline{C},\alpha$, что выполнено неравенство $\psi(y,x) \; \geqslant \; \overline{C}\|(y,x)\|^\alpha$. Следовательно, $\det^2 D_yF(y(x),x) \geqslant \overline{C}\|(y(x),x)\|^\alpha$, $|\det D_yF(y(x),x)| \geqslant \overline{C}^{\frac{1}{2}}\|x\|^{\frac{\alpha}{2}}$. Отсюда вытекает неравенство $\|\,(D_yF(y(x),x))^{-1}\,\| \leqslant C\|x\|^{-l}, (l \geqslant \frac{\alpha}{2})$.

Наименьшее из чисел l, удовлетворяющих последнему неравенству, назовём *асимптотическим порядком* простого решения $y = y(x)$.

Заметим, что если $F \in C^\infty$, то леммы 1,2, вообще говоря, не верны. Это легко увидеть на примере уравнения $(y + x)^2 - e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Данное уравнение имеет пару простых решений $y(x) = -x \pm e^{-\frac{1}{2x^2}}$, для которых не существует порядка и асимптотического порядка в нуле.

Определение. *Простое малое решение $y = y(x)$ уравнения (2) назовем r-определенным, если для любого C^{r+1}-отображения $F_1(y,x) \in j_0^r(F)$* [1] *существует простое малое решение $y = \overline{y}(x)$ уравнения*

$$F_1(y,x) = 0, \tag{4}$$

для которого $\overline{y}(t) = y(x) + o(\|x\|^l)$ $(o(\|x\|^l)/\|x\|^l \to 0 \;\;$ при $\;\; x \to 0)$.

Простое малое решение $y = y(x)$ назовем *конечно определенным*, если существует такое r, при котором оно r-определено.

Следующая теорема показывает, что определение корректно. Другими словами, существует инъективное соответствие между r-определенными простыми решениями $y = y(x)$ уравнения (2) и соответствующими им простыми решениями $y = \overline{y}(x)$ уравнения (4).

Теорема 4. *Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — различные простые решения уравнения (2) с асимптотическими порядками l_1 и l_2 $(l_1 < l_2)$ соответственно. Пусть $\overline{y}(x)$ — решение уравнения (4). Тогда не могут выполняться одновременно следующие соотношения:*

$$\overline{y}(x) = y_1(x) + o_1(\|x\|^{l_1}), \quad \overline{y}(x) = y_2(x) + o_2(\|x\|^{l_2}).$$

Доказательство. В противном случае было бы выполнено: $y_2(x) = y_1(x) + o(\|x\|^{l_1}\;)$, при $l_2 \geqslant l_1$, $o(\|x\|^{l_1}) \neq 0$. Тогда

$$F(y_2(x),x) = F(y_1(x),x) + D_yF(y_1(x),x) \cdot o(\|x\|^{l_1}) + \omega(x) \cdot o^2(\|x\|^{l_1}) = 0.$$

---

[1] Символом $j_0^r(F)$ здесь обозначена струя r-го порядка отображения F в нуле.

Следовательно,

$$D_yF(y_1(x),x)(o(\|x\|^{l_1})+(D_yF(y_1(x),x))^{-1}\cdot\omega(x)\cdot o^2(\|x\|^{l_1}))=0.$$

Последнее не верно, так как

$$\|o(\|x\|^{l_1})+(D_yF(y(x),x))^{-1}\cdot\omega(x)\cdot o^2(\|x\|^{l_1})\|\geqslant$$

$$\geqslant\|o(\|x\|^{l_1})\|-c_1\|x\|^{-l_1}\|\omega(x)\|\cdot\|o(\|x\|^{l_1})\|^2>\frac{1}{2}\left\|o(\|x\|^{l_1})\right\|.$$

3. ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК r-ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРОСТОГО МАЛОГО РЕШЕНИЯ

В этом пункте будет установлен достаточный признак r-определенности простого решения с применением метод сжимающих отображений.

Теорема 5. *Пусть $y=y(x)$ — простое малое решение уравнения (2), l — асимптотический порядок $y=y(x)$, s — его порядок в нуле. Тогда решение $y=y(x)$ является r-определенным для r, удовлетворяющих соотношению $(r+1)min\{s;1\}>2l$, и решение (возмущенного) уравнения (4) можно представить в виде:*

$$\overline{y}(x)=y(x)+\|x\|^{l+\varepsilon}\cdot\delta(x),$$

где $\varepsilon>0$, $\delta(x)\in C_{V(0)}$, $C_{V(0)}$ — пространство непрерывных функций на некоторой окрестности нуля $V(0)$.

Доказательство. Уравнение (4) можно представить в виде:

$$F_1(y,x)=F(y,x)+\omega^{r+1}(y,x)=0,$$

где $\|\omega^{r+1}(y,x)\|/\|(y,x)\|^{r+1}<c$, при $(y,x)\to 0$. Подставив в последнее уравнение $\overline{y}(x)=y(x)+\|x\|^{l+\varepsilon}\cdot\delta(x)$, где $\varepsilon=(r+1)min\{s;1\}-2l$, получим

$$F\left(y(x)+\|x\|^{l+\varepsilon}\cdot\delta(x),x\right)+\omega^{r+1}\left(y(x)+\|x\|^{l+\varepsilon}\cdot\delta(x),x\right)=0,$$

или

$$F(y(x),x)+D_yF(y(x),x)\|x\|^{l+\varepsilon}\cdot\delta(x)+G(x,\delta(x))\|x\|^{2(l+\varepsilon)}\delta^2(x)+$$

$$+\omega^{r+1}(y(x),x)+D_y\omega^{r+1}(y(x),x)\cdot\|x\|^{l+\varepsilon}\cdot\delta(x)+Q(x,\delta(x))\|x\|^{2(l+\varepsilon)}\delta^2(x)=0.$$

Следовательно,

$$\|x\|^{l+\varepsilon}\left(D_yF(y(x),x)+D_y\omega^{r+1}(y(x),x)\right)\delta(x)=$$

$$=-\omega^{r+1}(y(x),x)-\|x\|^{2(l+\varepsilon)}(G(x,\delta(x))+Q(x,\delta(x)))\delta^2(x). \tag{5}$$

Таким образом, доказательство теоремы свелось к разрешимости уравнения (5) в пространстве $C_{V(0)}$ относительно $\delta(x)$ при условии $(r+1)min\{s;1\}>2l$. Покажем, что оператор $D_yF(y(x),x)+D_y\omega^{r+1}(y(x),x)$ обратим при малых $x\neq 0$. Действительно, разложим в ряд:

$$(D_yF(y(x),x)+D_y\omega^{r+1}(y(x),x))^{-1}=$$

$$=(D_yF(y(x),x))^{-1}-(D_yF(y(x),x))^{-1}D_y\omega^{r+1}(y(x),x)(D_yF(y(x),x))^{-1}+$$

$$+(D_yF(y(x),x))^{-1}D_y\omega^{r+1}(y(x),x)(D_yF(y(x),x))^{-1}\cdot D_y\omega^{r+1}(y(x),x)(D_yF(y(x),x))^{-1}-\ldots.$$

Следовательно, в силу того, что $\|D_y\omega^{r+1}(y(x),x)\| < c_0\|x\|^m,\ \ m = r\,min\{s;1\}$, получим

$$\|(D_yF(y(x),x)) + (D_y\omega^{r+1}(y(x),x))^{-1}\| < c\|x\|^{-l} + c\|x\|^{-l}\, c_0\|x\|^m c\|x\|^{-l} +$$

$$+c\|x\|^{-l}c_0\|x\|^m c\|x\|^{-l}c_0\|x\|^m c\|x\|^{-l} + \ldots\ =\ \frac{c\|x\|^{-l}}{1 - c_0c\|x\|^{m-l}} < 2c\|x\|^{-l}$$

($m > l$, так как $r\,min\{s;1\} + min\{s;1\} > 2l$ и, следовательно, $r\,min\{s;1\} > l$).

Таким образом, показано, что оператор $D_yF(y(x),x) + D_y\omega^{r+1}(y(x),x)$ обратим при малых $x \neq 0$. Следовательно, уравнение (5) можно представить в виде:

$$\delta(x) = -\|x\|^{-l-\varepsilon}(D_yF(y(x),x) + D_y\omega^{r+1}(y(x),x))^{-1}\cdot\omega^{r+1}(y(x),x)-$$

$$-\|x\|^{l+\varepsilon}(D_yF(y(x),x) + D_y\omega^{r+1}(y(x),x))^{-1}\cdot(G(x,\delta(x)) + Q(x,\delta(x)))\delta^2(x). \qquad (6)$$

Покажем, что уравнение (6) разрешимо относительно $\delta(x)$ в любом конечном шаре в $C_{V(0)}$ в достаточно малой окрестности $V(0)$. Для этого необходимо, во-первых, чтобы первое слагаемое правой части находилось в пространстве $C_{V(0)}$. Это следует из оценки:

$$\|x\|^{-l-\varepsilon}\|(D_yF(y(x),x) + D_y\omega^{r+1}(y(x),x))^{-1}\|\cdot\|\omega^{r+1}(y(x),x)\| <$$

$$< \|x\|^{-l-\varepsilon}2c\|x\|^{-l}\cdot c_1\|x\|^{(r+1)min\{s;1\}} = 2cc_1,$$

так как $\varepsilon = (r+1)min\{s;1\} - 2l$.

Во-вторых, второе слагаемое правой части уравнения (6) есть оператор, сжимающий по $\delta(x)$ на любом конечном шаре пространства $C_{V(0)}$ в достаточно малой окрестности $V(0)$. Это нетрудно увидеть, если использовать запись

$$\|x\|^{l+\varepsilon}(D_yF(y(x),x) + D_y\omega^{r+1}(y(x),x))^{-1}(G(x,\delta(x)) + Q(x,\delta(x)))\delta^2(x) =$$

$$= \|x\|^{\varepsilon}P(x,\delta(x))\delta^2(x).$$

Выберем конечный шар в пространстве $C_{V(0)}$ радиуса $R: \|\delta(x)\| < R$, получим

$$\|\|x\|^{\varepsilon}P(x,\delta_1(x))\delta_1^2(x) - \|x\|^{\varepsilon}P(x,\delta_2(x))\delta_2^2(x)\| <$$

$$< \|x\|^{\varepsilon}\sup_{\|\delta\|\leqslant R}\|D_\delta(P(x,\delta(x))\delta^2(x))\|\,\|\delta_1(x) - \delta_2(x)\|\,.$$

Если выбрать окрестность $V(0)$ такую, что

$$\|x\|^{\varepsilon}\sup_{|\ \delta|\ \leqslant R}\|D_\delta(P(x,\delta(x))\delta^2(x))\|\ <\ 1\,,$$

то оператор $\|x\|^{\varepsilon}P(x,\delta(x))\delta^2(x)$ будет сжимающим по $\delta(x)$ в пространстве $C_{V(0)}$. Согласно принципу сжатых отображений, уравнение (6) имеет единственное решение $\delta(x)$. Следовательно, уравнение (4) имеет малое решение вида: $\overline{y}(x) = y(x) + \|x\|^{(r+1)min\{s;1\}-l}\delta(x)$, $\delta(x) \in C_{V(0)}$.

Покажем простоту решения $\overline{y}(x)$. Имеем

$$(D_yF_y(y(x) + \|x\|^{l+\varepsilon}\delta(x),x) + D_y\omega^{r+1}(y(x) + \|x\|^{l+\varepsilon}\delta(x),x))^{-1} =$$

$$= (D_yF_y(y(x),x) + D_y\omega^{r+1}(y(x),x) + O(\|x\|^{l+\varepsilon},\delta(x)))^{-1},$$

где $O(\|x\|^{l+\varepsilon},\delta(x))$ имеет в нуле порядок не меньше $l+\varepsilon$. Далее, аналогично доказательству оценки $\|(D_yF(y(x),x) + D_y\omega^{r+1}(y(x),x))^{-1}\| < 2c\|x\|^{-l}$, получаем

$$\|(D_yF_y(y(x),x) + D_y\omega^{r+1}(y(x),x) + O(\|x\|^{l+\varepsilon},\delta(x)))^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant 2c\|x\|^{-l} + 2c\|x\|^{-l} c_3 \|x\|^{l+\varepsilon} 2c\|x\|^{-l} + ... \leqslant \frac{2c\|x\|^{-l}}{1 - 2cc_3\|x\|^{\varepsilon}} < 4c\|x\|^{-l}.$$

Отсюда следует простота решения $y = \overline{y}(x)$ уравнения (4).

Следствие. *Пусть $y = y(x)$ — простое аналитическое решение уравнения (2), l — его асимптотический порядок. Тогда решение $y = y(x)$ является r-определенным, если выполнено $r \geqslant 2l$.*

Таким образом, мы рассмотрели r-определенные простые малые решения аналитических уравнений, асимптотика которых в нуле до l-го порядка включительно однозначно определяется отрезком ряда Тейлора r-го порядка уравнения. При возмущении уравнения слагаемыми, начиная с $(r+1)$-го порядка сохранится свойство простоты r-определенного решения и его асимптотика в нуле до порядка $l + \varepsilon$, где $\varepsilon = (r+1)\min\{s;1\} - 2l$.

С другой стороны, всякое простое решение $y = y(x)$ аналитического уравнения будет конечно определенным, так как найдется такое натуральное $r : (r+1)\min\{s;1\} > 2l$, что $y = y(x)$ — r-определено.

В случае $F \in C^{\infty}(U,R^n)$ теорема 5 имеет место, если предположить существование асимптотического порядка и порядка в нуле для простого решения $y = y(x)$.

4. КОНЕЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ УРАВНЕНИЯ И КРАТНОСТЬ ОСОБОГО РЕШЕНИЯ

В этом пункте рассмотрим связь понятия конечной определенности уравнения с понятием бифуркационной краткости отображения F.

Напомним, что решение $y = y(x)$ уравнения (2) называется конечно определенным, если найдется такое натуральное r, при котором решение $y = y(x)$ является r-определенным.

Уравнение (2) назовем r-определенным, если для любого C^{r+1}-отображения $F_1(y,x)$, $F_1 \in j_0^r(F)$ ростки множеств $F^{-1}(0)$ и $F_1^{-1}(0)$ в точке (0,0) гомеоморфны, а ростки множеств $F^{-1}(0) \setminus (0{,}0)$ и $F_1^{-1}(0) \setminus (0{,}0)$ в точке (0,0) диффеоморфны.

Уравнение (2) назовем конечно определенным, если оно r-определено при некотором r. Очевидно, что из r-определенности (конечной определенности) уравнения следует r-определенность (конечная определенность) всех его малых решений. Возникает вопрос, верно ли обратное утверждение?

Пусть $y = y_1(x)$, $y = y_2(x), \ldots, y = y_k(x)$ — все малые решения уравнения (2) и все эти решения являются простыми. Согласно теореме 5 найдутся числа $r_1,r_2, \ldots, r_k$ такие, что решение $\overline{y} = y_i(x)$ является r_i-определенным, $i = 1,2,...k$. При этом r_i достаточно взять удовлетворяющим следующим неравенствам: $(r_i+1)\min\{s_i;1\} > 2l_i$, где s_i — порядок в нуле, l_i - асимптотический порядок решения $y = y_i(x)$. Следовательно, если выбрать $r = \max\{r_1,r_2,...,r_k\}$, то все простые малые решения $y = y_i(x)$ будут r-определены и решения $\overline{y}_i = y_i(x) + \|x\|^{(r_i+1)\min\{s_i;1\} - l_i}$ возмущенного уравнения (4) также будут простыми. Возникает вопрос, будет ли уравнение (2) r-определено? Не появятся ли наряду с решениями $y = \overline{y_i}(x)$ другие решения? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий элементарный пример.

Рассмотрим уравнение $f(y,x) = (y - x^2)(y^2 - 2yx + x^2 + x^4) = 0$, где $f : R^2 \to R^1$. Единственным малым вещественным решением уравнения будет $y(x) = x^2$. Порядок s в нуле этого решения очевидно равен 2. Найдем асимптотический порядок l. Так как $(D_y f(x^2,x))^{-1} = (2x^4 - 2x^3 + x^2)^{-1} < 2|x|^{-2}$, то асимптотический порядок l решения $y(x) = x^2$ равен 2. Таким образом, решение $y(x) = x^2$, согласно теореме 5, является 4-определенным. Тем не менее, возмутив уравнение слагаемыми не ниже 5-го порядка, получим уравнение $f_1(y,x) = f(y,x) + 2(x^2 - y)x^4 = 0$, имещее три простых решения $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x + x^2$, $y_3(x) = x - x^2$. При этом решение $y_1(x)$ будет по-прежнему 4-определенным, а решения $y_2(x)$, $y_3(x)$ будут 6-определенными.

Таким образом, на этом примере мы убедились, что для r-определенности уравнения недостаточно иметь r-определенность всех его малых решений, так как при возмущениях уравнения слагаемыми не ниже $(r+1)$-го порядка могут ответвиться новые решения (переходить из комплексного пространства в вещественное). Как будет показано ниже, для того, чтобы из r-определенности всех малых решений вытекала r-определенность уравнения, достаточно, чтобы число решений уравнения (2) совпадало с бифуркационной краткостью нуля отображения $F(y,0)$.

Пусть $F(y)$ — C^∞-отображение, действующее в вещественном пространстве R^n, $F(0)=0$. Будем рассматривать различные гладкие деформации $F_t(y)$ отображения $F(y)$ ($F_t(y)$ гладко зависит от $t \in \mathbb{R}^m$, $F_0(y)=F(y)$).

Натуральное число $\rho(F,0)$ назовем бифуркационной кратностью отображения $F(y)$ в нуле, если выполнено:

1) при всех деформациях $F_t(y)$ количество малых решений $y(t)$ уравненя $F(y,t)=0$ $(F(y,t) := F_t(y))$ не превышает $\rho(F,0)$ (если такого числа нет, то полагаем $\rho(F,0) = +\propto$);

2) найдется такая деформация $\overline{F_t}(y)$, что уравнение $\overline{F_t}(y,t)=0$ имеет ровно $\rho(F,0)$ малых решений $y=y(t)$.

Заметим, что, в соответствии с результатами из [6]-[8], бифуркационная кратность отображения в нуле не превосходит алгебраической кратности (размерности локального кольца особенности).

Следующая теорема отвечает на вопрос, поставленный в начале пункта.

Теорема 6. *Пусть отображение $F(y,0)(F \in C^\infty(R^n \times R^n, R^n))$ имеет в нуле конечную бифуркационную кратность $\rho(F,0)=k$ и пусть уравнение (2) имеет ровно k простых решений $y=y_1(x), y=y_2(x), \ldots, y=y_k(x)$ с порядками в нуле s_i, асимптотическими порядками l_i. Тогда уравнение (2) r-определено* [2] *относительно возмущений вида $\omega^{r+1}(y,x)$, $\omega^{r+1}(y,0)=0$, где $\|\omega^{r+1}(y,x)\|/\|(y,x)\|^{r+1} < c$, при $(y,x) \to 0$, для $r = max\{r_1,r_2,\ldots,r_k\}$, $(r_i+1)max\{s_i;1\} > 2l_i$, $i=1,2,\ldots,k$.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 5 и определения бифуркационной кратности отображения в нуле.

В рассматриваемом выше примере уравнение

$$f_1(y,x) = (y-x^2)(y-x-x^2)(y-x+x^2) = 0$$

будет конечно определено относительно возмущений вида $\omega^7(y,x)$, $\omega^7(y,0)=0$, так как имеет три простых решения и $\rho(f_1(y,o)) = 3$, $r_1 = 4$, $r_2 = r_3 = 6$.

5. КРИТЕРИЙ КОНЕЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В предыдущем пункте получено достаточное условие r-определенности уравнения в зависимости от числа его простых решений и их асимптотики в нуле (чисел s_i, l_i). В этом пункте получим критерий конечной определенности уравнения без применения этой информации и в более общем случае.

Рассмотрим аналитическое уравнение:

$$F(x) = 0, \tag{7}$$

где $F : (R^{n+p},0) \to (R^n,0)$. Обозначим $\Sigma(F) = \{x \mid \mathrm{rank} DF(x) < n\}$ — росток в нуле множества особых решений уравнения (7). Будем предполагать, что $o \in \Sigma(F)$. В работе автора [1] получена следующая теорема.

[2] Здесь r-определенность отличается от введенной выше, так как рассматривается устойчивость относительно возмущений $\omega^{r+1}(y,x)$, удовлетворяющих условию: $\omega^{r+1}(y,0)=0$. В случае совпадения бифуркационной кратности $\rho(F,0)$ с алгебраической условие $\omega^{r+1}(y,0)=0$ можно отбросить.

Теорема 7. *Уравнение (7) r-определено тогда и только тогда, когда для любого C^{r+1}-отображения $F_1 \in j_0^r(F)$ росток множества особых решений уравнения*

$$F_1(x) = 0$$

состоит из одной точки $x = 0$ ($\sum(F_1) \cap F_1^{-1}(0) = \{0\}$).

Заметим, что теорема 7 верна для $F \in C^{r+1}$.

Следующая теорема даст критерий конечной определенности аналитического уравнения (7).

Теорема 8. *Пусть $F : R^{n+p} \longrightarrow R^n$) — аналитическое отображение. Уравнение (7) конечно определено тогда и только тогда, когда $x = 0$ — изолированное особое решение уравнения (7) : $\Sigma(F) \cap F^{-1}(0) = \{0\}$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 7. Пусть $x = 0$ — изолированное особое решение уравнения (7). Рассмотрим неотрицательную аналитическую функцию:

$$\varphi(x) = \|F(x)\|^2 + \det(D_xF(x)(D_xF(x))^T).$$

Локальное множество нулей этой функции состоит из одной точки $x = 0$. По неравенству Лоясевича, для всех x из некоторой замкнутой окрестности нуля верна оценка: $\varphi(x) > cd(x,\varphi^{-1}(0))^\alpha$, где $c,\alpha > 0$, $d(x,\varphi^{-1}(0))$ — расстояние от точки x до множества φ^{-1}. Учитывая, что существует окрестность $U(0)$ такая, что $\varphi^{-1}(0) \cap U(0) = \{0\}$, получаем:

$$\|F(x)\|^2 + \det(D_xF(x)(D_xF(x))^T) > c\|x\|^\alpha.$$

Выберем $r > \alpha$. Покажем, что уравнение (7) r-определено. Для этого, согласно теореме (7), необходимо и достаточно, чтобы для любого отображения $F_1 \in j_0^r(F)$, $F_1(x) = F(x) + \omega^{r+1}(x)$ $(\|\omega^{r+1}(x)\|/\|x\|^{r+1} < c,$ при $x \to 0)$ система уравнений

$$F_1(x) = 0\,, \quad det(D_xF(x)(D_xF(x))^T) = 0$$

имела $x = 0$ изолированным решением. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \|F_1(x)\|^2 + \det\left(D_xF_1(x)(D_xF_1(x))^T\right),$$

для которой верна оценка

$$\psi(x) = \|F(x)\|^2 + O(\|x\|^{r+2}) + det(D_xF(x)(D_xF(x))^T) +$$

$$+O(\|x\|^r) > c\|x\|^\alpha + O(\|x\|^{r+2}) + O(\|x\|^r) > \frac{c}{2}\|x\|^\alpha$$

$(O(\|x\|^k)/\|x\|^k < c$ при $x \to 0$). Откуда следует, что решение $x = 0$ изолировано.

Для случая, когда $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+p},\mathbb{R}^n)$, теорема, вообще говоря, не верна, так как неравенство Лоясевича в этом случае выполняется только при дополнительных предположениях.

Рассмотрим уравнение: $f(x) = (x+y)^2 - e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, где $x,y \in R^1$, $f(x) \in C^\infty(R^2,R^1)$. Легко видеть, что $(x,y) = 0$ — изолированное особое решение. Неравенство Лоясевича не выполнено, так как ни при каком α не верна оценка:

$$((x+y)^2 - e^{-\frac{1}{x^2}})^2 + 4(x+y)^2 + 4(x+y - e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3})^2 > c\|(x,y)\|^\alpha$$

(достаточно проверить при $x = -y$). Уравнение не является конечно определенным, так как уравнение

$$f_1(x,y) = f(x,y) + e^{-\frac{1}{x^2}} = (x+y)^2 = 0$$

имеет особое решение $x = -y$.

Теорема 9. *Пусть* $F \in C^\infty(R^{n+p}, R^n)$ *и идеал*

$$(\|F(x)\|^2 + det(D_x F(x)(D_x F(x))^T)) \cdot C^\infty(R^{n+p})$$

замкнут [5]. Уравнение (7) конечно определено тогда и только тогда, когда $x = 0$ *— его изолированное особое решение.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8, так как замкнутость идеала позволяет применить неравенство Лоясевича к бесконечно гладкой функции (см. [5]).

Предыдущий пример показывает, что для бесконечно гладких отображений из изолированности нулевого особого решения не следует его конечная определенность.

6. НЕРАЗРЕШЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рассмотрим неразрешенное относительно производной уравнение (1) и соответствующее ему аналитическое уравнение (2). Из полученных выше результатов вытекает:

I. Если в окрестности нуля U выполнено условие регулярности уравнения (1) по производной (условие регулярности уравнения (2) по переменной y), то множество решений уравнения (2) гомеоморфно объединению конечного числа конусов: $F^{-1}(0) \approx conM_1 \cup conM_2 \cup ... \cup conM_k$.

II. Условие регулярности по переменной y может быть выполнено не на всем множестве $F^{-1}(0)$, а на отдельном конусе $conM_i$ (отдельной компоненте связности множества $F^{-1}(0) \setminus (0{,}0)$). Ему соответствует решение уравнения (2) $y = y(x)$, соответствено, решение уравнения (1) $\dot{x} = y(x)$. Это решение называется простым малым решением уравнения (2). Для него существуют порядок в нуле s и асимптотический порядок l.

III. Простое малое решение $y = y(x)$ будет r-определенным для r, удовлетворяющих неравенству $(r+1)min\{s;1\} > 2l$. При этом уравнение $F_1(y,x) = 0$ при $F_1 \in j_0^r(F)$ будет иметь простое малое решение $\overline{y}(x) = y(x) + \|x\|^{l+\varepsilon}\delta(x)$. Соответственно, уравнение

$$F_1(\dot{x}(t), x(t)) = 0 \tag{8}$$

частично разрешается: в некоторой окрестности простого решения его можно записать в виде

$$\dot{y}(x) = y(x) + \|x\|^{l+\varepsilon}\delta(x).$$

IV. Если число простых малых решений уравнения (2) совпадает с бифуркационной кратностью $\rho(F,0)$ в нуле отображения $F(y,0)$, то уравнение (2) r-определено для $r = max\{r_1, r_2, ..., r_k\}$, $(r_i + 1)max\{s_i; 1\} > 2l_i$, $i = 1,2,...,k$. Соответственно, при $F_1 \in j_0^r(F)$ неразрешенное относительно производной уравнение $F_1(\dot{x}(t), x(t)) = 0$ (см. (8)) равносильно совокупности разрешенных уравнений

$$\dot{y}(x) = y_i(x) + \|x\|^{l_i+\varepsilon_i}\delta_i(x), \quad i = 1,2,...,k.$$

V. Получен критерий r-определенности уравнения (2) и критерий конечной определенности уравнения (2), который состоит в изолированности нулевого $(y,x) = (0{,}0)$ особого решения уравнения (2).

Следовательно, в данном случае уравнение с такой же струей r-го порядка, как у исходного уравнения (1), разрешимо.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий предыдущие результаты. Пусть неразрешенная относительно производной система имеет вид:

$$(\dot{x}_1 - P_1(x_1,x_2))(\dot{x}_2 - Q_2(x_1,x_2)) + \omega_1(\dot{x}_1,\dot{x}_2,x_1,x_2) = 0\,,$$
$$(\dot{x}_1 - Q_1(x_1,x_2))(\dot{x}_2 - P_2(x_1,x_2)) + \omega_2(\dot{x}_1,\dot{x}_2,x_1,x_2) = 0\,,$$

где P_1,P_2,Q_1,Q_2 — аналитические в нуле функции, $P_i(0,0) = Q_i(0,0) = 0, i = 1,2$.

После замены $\dot{x}_1 = y_1, \dot{x}_2 = y_2$ главная часть системы примет вид

$$(y_1 - P_1(x_1,x_2))(y_2 - Q_2(x_1,x_2)) = 0\,,$$
$$(y_1 - Q_1(x_1,x_2))(y_2 - P_2(x_1,x_2)) = 0\,.$$

Если предположить, что равенство $P_i(x_1,x_2) - Q_i(x_1,x_2) = 0$, $i = 1,2$ верно тогда и только тогда, когда $(x_1,x_2) = (0,0)$, то последняя система имеет два простых малых решения

$$y_1 = P_1(x_1,x_2), \quad y_2 = P_2(x_1,x_2), \tag{A}$$

$$y_1 = Q_1(x_1,x_2), \quad y_2 = Q_2(x_1,x_2) \quad . \tag{B}$$

По неравенству Лоясевича, существуют числа $c_i,l_i > 0$ такие, что

$$\mid P_i(x_1,x_2) - Q_i(x_1,x_2) \mid > c_i \|(x_1,x_2)\|^{l_i}, i = 1,2.$$

Следовательно, на решении (A)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_2(x_1,x_2)-Q_2(x_1,x_2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{P_1(x_1,x_2)-Q_1(x_1,x_2)} \end{pmatrix},$$

$$\| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} \| < c\|(x_1,x_2)\|^{-max\{l_1;l_2\}},$$

на решении (B)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{Q_2(x_1,x_2)-P_2(x_1,x_2)} \\ \frac{1}{Q_1(x_1,x_2)-P_1(x_1,x_2)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} \| < c\|(x_1,x_2)\|^{-max\{l_1;l_2\}}.$$

Таким образом, исходная система будет r-определенной при $r + 1 > 2max\{l_1,l_2\}$.

Для возмущений ω_i, удовлетворяющих условию: $\frac{\|\omega_i(y_1,y_2,x_1,x_2)\|}{\|(y_1,y_2,x_1,x_2)\|^{r+1}} < c$, при $(y_1,y_2,x_1,x_2) \to 0$, исходная система разрешается:

$$\dot{x}_1 = P_1(x_1,x_2) + \|(x_1,x_2)\|^{l+\varepsilon}\delta_1(x_1,x_2)\,,$$
$$\dot{x}_2 = P_2(x_1,x_2) + \|(x_1,x_2)\|^{l+\varepsilon}\delta_2(x_1,x_2)\,,$$

и

$$\dot{x}_1 = Q_1(x_1,x_2) + \|(x_1,x_2)\|^{l+\varepsilon}\gamma_1(x_1,x_2)\,,$$
$$\dot{x}_2 = Q_2(x_1,x_2) + \|(x_1,x_2)\|^{l+\varepsilon}\gamma_2(x_1,x_2)\,,$$

где $l = max\{l_1; l_2\}$, $\varepsilon > 0$, $\delta_1(x)$, $\delta_2(x)$, $\gamma_1(x),\gamma_2(x)$ — непрерывные функции в малой окрестности точки $(x_1,x_2) = (0,0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зачепа, В. Р. О v-определенности ростка гладкого отображения в особой точке / В. Р. Зачепа // Глобальный анализ и нелинейные уравнения. — 1988. — С. 119–126.

2. Зачепа, В. Р. Локальный анализ фредгольмовых уравнений / В. Р. Зачепа, Ю. И. Сапронов. — Воронеж: ВГУ, 2002. — 185 с.

3. Зачепа, В. Р. Конечно определенные особенности функций, порожденные неразрешенным интегрированием / В. Р. Зачепа // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 2. — С. 26–34.

4. Зачепа, В. Р. Регулярные ветвления решений неразрешенных относительно производной дифференциальных уравнений / В. Р. Зачепа // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 86–96.

5. Мальгранж, Б. Идеалы дифференцируемых функций / Б. Мальгранж. — М. : Мир, 1968. — 129 с.

6. Паламодов, В. П. О кратности голоморфного отображения / В. П. Паламодов // Функциональный анализ и его приложения. — 1967. — Т. 1, № 3. — С. 54–65.

7. Паламодов, В. П. Замечания о конечнократных дифференцируемых отображениях / В. П. Паламодов // Функциональный анализ и его приложения. — 1972. — Т. 6, № 2. — С. 52–61.

8. Химшиашвили, Г. Н. О локальной степени гладкого отображения / Г. Н. Химшиашвили // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1977. — Т. 85, № 2. — С. 309–311.

REFERENCES

1. Zachepa V.R. About v-definiteness of a sprout smooth displays in a special point. [Zachepa V.R. O v-opredelennosti rostka gladkogo otobrazheniya v osoboj tochke]. *Global'nyj analiz i nelinejnye uravneniya — The Global analysis and nonlinear equations*, 1988, pp. 119–126.

2. Zachepa V.R., Sapronov Yu.I. Local analysis of the Fredholm equations. [Zachepa V.R., Sapronov Yu.I. Lokal'nyj analiz fredgol'movyx uravnenij]. Voronezh: VGU. 2002, 185 p.

3. Zachepa V.R. Konechno certain features of functions, generated by not allowed integration. [Zachepa V.R. Konechno opredelennye osobennosti funkcij, porozhdennye nerazreshennym integrirovaniem]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2006, no. 2, pp. 26–34.

4. Zachepa V.R. Regular branching of solutions to differential equations unresolved with respect to a derivative. [Zachepa V.R. Regulyarnye vetvleniya reshenij nerazreshennyx otnositel'no proizvodnoj differencial'nyx uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 86–96.

5. Malgranzh B. Ideals of differentiable functions. [Mal'granzh B. Idealy differenciruemyx funkcij]. Moscow: Mir, 1968, 129 p.

6. Palamodov V.P. About frequency rate of holomorphic display. [Palamodov V.P. O kratnosti golomorfnogo otobrazheniya]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 1967, vol. 1, iss. 3, pp. 54–65.

7. Palamodov V.P. Remarks on the finite-to-one differentiable displays. [Palamodov V.P. Zamechaniya o konechnokratnyx differenciruemyx otobrazheniyax]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 1972, vol. 6, iss. 2. pp. 52–61.

8. Himshiashvili G.N. About local degree of the smooth displays. [Ximshiashvili G.N. O lokal'noj stepeni gladkogo otobrazheniya]. *Soobshh. AN Gruz. SSR — Soobshch. AN Freight. Soviet Socialist Republic*, 1977, vol. 85, no. 2, pp. 309–311.

Зачепа Валерий Ростиславович, Доцент кафедры прикладной информатики и математики ВЭПИ, к.ф.-м.н., Воронеж, Россия
E-mail: zachepa.valery@yandex.ru
Тел.: +7(473)239-44-27

Zachepa Valeri Rostislavovich, Docent of chair of apl. inform. & math. of VEPI, Voronezh, Russia
E-mail: zachepa.valery@yandex.ru
Tel.: +7(473)239-44-27