

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КРЕПИ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОЙ ПОРИСТОСТИ МАТЕРИАЛА И НЕУПРУГОЙ РАБОТЫ ПОЛНОСТЬЮ СЖАТОЙ МАТРИЦЫ

Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Н. С. Перунов

*Воронежский государственный университет,
Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»*

Поступила в редакцию 02.06.2015 г.

Аннотация. Построена математическая модель, описывающая процесс деформирования монолитной крепи вертикальной горной выработки для материалов с пористой структурой, сжатый скелет которой обладает одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами. Деформирование пористой среды под действием заданных равномерно распределенных сжимающих нагрузок разделяется на два взаимосвязанных этапа: упругое деформирование пористой среды и неупругое деформирование сжатой матрицы. Задача нахождения напряженно-деформированного состояния крепи вертикальной выработки с круговой формой поперечного сечения на каждом этапе деформирования решается в рамках плоского деформированного состояния. При этом не учитываются эффекты, связанные с тем, что выработка имеет конечную глубину. Получены соотношения, определяющие поля напряжений и перемещений на первом этапе деформирования. Определена зависимость сжимающих нагрузок, при которых начальная пористость материала во всей области крепи достигает нулевого значения. На втором этапе процесса деформирования выведены аналитические выражения для нахождения полей напряжений и перемещений в упругой и пластической зонах деформирования сжатого скелета, а так же получено уравнение для определения радиуса упругопластической границы. В качестве условий совместности выбирались условия непрерывности компонент напряжений и перемещений на упругопластической границе, а также равенство нулю пластических деформаций на ней. Дана оценка влияния на величину границы раздела сред упругого и пластического деформирования начальной пористости, упрочнения и предела текучести материала. Показано асимптотическое поведение упругопластической границы со временем. Построены графические зависимости компонент напряжений от координаты при различных значениях величины начального раствора пор и других физико-механических и геометрических параметров материала и конструкции.

Ключевые слова: пористые материалы при неупругой работе сжатого скелета, монолитная крепь, вертикальная выработка, напряженно-деформированное состояние.

THE MATHEMATICAL MODEL OF DEFORMATION OF A CYLINDRICAL LINING OF EXCAVATION CONSIDERING THE INITIAL POROSITY OF THE MATERIAL AND THE INELASTIC WORK OF COMPRESSED MATRIX

D. V. Gotsev, A. E. Buntov, N. S. Perunov

Abstract. The mathematical model describing process of deformation monolithic is constructed for a vertical excavation for materials with porous structure which squeezed skeleton possesses at the same time elastic, viscous and plastic properties. Deformation of the porous environment under the influence of the set evenly distributed squeezing loadings is divided into two interconnected stages: elastic deformation of the porous environment and inelastic deformation of the squeezed matrix. A problem of finding of the intense deformed state for vertical development with a circular form of cross section at each stage of deformation decides within the flat deformed state. Thus the effects connected by that development has final depth aren't considered. The ratios defining fields of tension and movements at the first stage of deformation are received. Dependence of the squeezing loadings at which initial porosity of material in all area for is defined reaches zero value. At the second stage of process of deformation analytical expressions for finding of fields of tension and movements in elastic and plastic zones of deformation of the squeezed skeleton are removed, and the equation for determination of radius of elasto-plastic border is also received. As conditions of compatibility continuity conditions a component of tension and movements on elasto-plastic border, and also equality to zero plastic deformations on it got out. The assessment of influence on the size of limit of the section of environments of elastic and plastic deformation of initial porosity, hardening and a limit of fluidity of material is given. The asymptotic behavior of elasto-plastic border is shown over time. Graphic dependences a component of tension from coordinate are constructed at various values of size of initial solution of a time and other physicomaterial and geometrical parameters of material and a design.

Keywords: porous materials during the inelastic work of the squeezed skeleton, monolithic strengthening design, vertical development, the intense deformed state.

При добыче полезных ископаемых должно быть пройдено большое количество вертикальных и горизонтальных шахтных стволов, которые являются долговременными и дорогостоящими инженерными сооружениями, жизненно важными для функционирования шахты в целом. Состояние горных выработок в зависимости от их назначения должно удовлетворять различным требованиям, основным из которых является обеспечение безопасных условий для работающих людей. В связи с этим возникают требования по проведению укрепительных работ горных выработок и подземных сооружений, то есть создание крепежных конструкций — крепей. Крепи могут быть монолитными или многослойными.

Определение напряженно-деформированного состояния (далее НДС) крепей горных выработок является первым этапом решения задачи устойчивости подземных сооружений.

Теоретический анализ и практика эксплуатации горных выработок, как отмечено в работе [1] показывают, что наиболее достоверные результаты исследования устойчивости горных выработок получаются при привлечении более сложных моделей, как наиболее полно отражающих реальное поведение горных пород. С этой точки зрения использование моделей сложных сред, в которых учитываются такие свойства, как пористость, пластичность, вязкость, упрочнение, обнаруживаемые у реальных материалов, не могут не представлять существенный научный и практический интерес.

В отличие от работы [2], где приведены аналитические выражения для определения НДС сферической оболочки с учетом начальной пористости материала и сложной реологии сжатой матрицы в настоящей работе исследуется вопрос об определении полей напряжений и перемещений монолитной крепи вертикальной шахтного ствола глубокого заложения. При

этом материал крепи моделируется пористой средой, сжатый скелет которой обладает одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами.

Деформирование пористого материала с начальным раствором пор — ε_0 можно разделить на два взаимосвязанных этапа [3]. Первый — упругое деформирование сжимаемой пористой среды, второй — неупругое деформирование сжатого скелета с упрочняющимися упруго-вязко-пластическими свойствами. Связь между напряжениями и деформациями на первом этапе пор берется в виде закона Гука для сжимаемого тела

$$\sigma_j^\beta = \begin{cases} \lambda_1 \varepsilon_\alpha^e g_j^\beta + 2\mu_1 \varepsilon_j^\beta, \\ -\varepsilon_\alpha^e < \varepsilon_0, \end{cases} \quad (1)$$

где g_j^β , σ_j^β , ε_j^β смешанные компоненты метрического тензора, тензора напряжений и тензора упругих деформаций соответственно, λ_1 , μ_1 — параметры Ламе сжимаемого тела.

На втором этапе упругие деформации сжатого скелета подчиняются закону Гука для несжимаемого тела [4]

$$S_j^\beta = \begin{cases} 2(\mu_0 + \mu_1) \varepsilon_j^\beta - 2\mu_0 \left(\varepsilon_j^\beta \right)_0 + \frac{2}{3}\mu_1 \varepsilon_0 g_j^\beta, \\ -\varepsilon_\alpha^e = \varepsilon_0, \end{cases} \quad (2)$$

где S_j^β — компоненты тензора девиатора напряжений; $\left(\varepsilon_j^\beta \right)_0$ — компоненты тензора упругих деформаций, вычисленные на момент полного сжатия пор, то есть при выполнении условия $\varepsilon_\alpha^e = -\varepsilon_0$; $\mu_0 + \mu_1$ — модуль сдвига несжимаемого тела.

В зоне пластического деформирования сжатого скелета будем использовать модель несжимаемого упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела [5] с поверхностью нагружения

$$F = \left(S_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta - \eta \dot{\varepsilon}_j^\beta \right) \left(S_\beta^j - c \varepsilon_\beta^j - \eta \dot{\varepsilon}_\beta^j \right) - k^2, \quad (3)$$

где ε_j^β , $\dot{\varepsilon}_j^\beta$ — компоненты тензоров пластических деформаций и скоростей пластических деформаций соответственно, c — коэффициент упрочнения, η — коэффициент вязкости, k — предел текучести материала.

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_j^\beta = \varepsilon_j^\beta^e + \varepsilon_j^\beta^p, \quad (4)$$

причем пластическая и упругая составляющие объемной деформации соответственно удовлетворяют условиям несжимаемости

$$\varepsilon_{nn}^p = 0, \quad \varepsilon_{nn}^e = -\varepsilon_0. \quad (5)$$

В (2), (4), (5) и далее индексы “e” и “p” вверху величин обозначают их принадлежность соответственно к упругой и пластической зонам деформирования сжатого скелета.

Ниже рассмотрим задачу определения НДС цилиндрического тела (рисунок 1), являющегося крепью вертикальной выработки. Обозначим через b и a соответственно внешний и внутренний радиусы крепи. Действие массива горных пород на крепь заменим сжимающей

нагрузкой интенсивностью q_b равномерно распределенной по внешней поверхности. Сжимающая нагрузка интенсивностью q_a равномерно распределенная по внутренней поверхности моделирует собой давление жидкости или газа на крепь.

Для такого рода задач можно предположить [6], что при определении НДС не учитываются эффекты связанные с тем, что выработка имеет конечную глубину.

НДС монолитной крепи вертикальной горной выработки в рамках плоского деформированного состояния в цилиндрической системе координат (r, θ, z) будем моделировать следующими соотношениями геометрически линейной теории

— уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \tag{6}$$

— соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \tag{7}$$

где u — радиальная составляющая вектора перемещений;

— граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r|_{r=a} = -q_a \quad (q_a > 0, q_b > 0). \tag{8}$$

Связь между напряжениями и деформациями при упругом деформировании пористой среды возьмем в виде соотношений (1), которые при принятых допущениях переписутся в

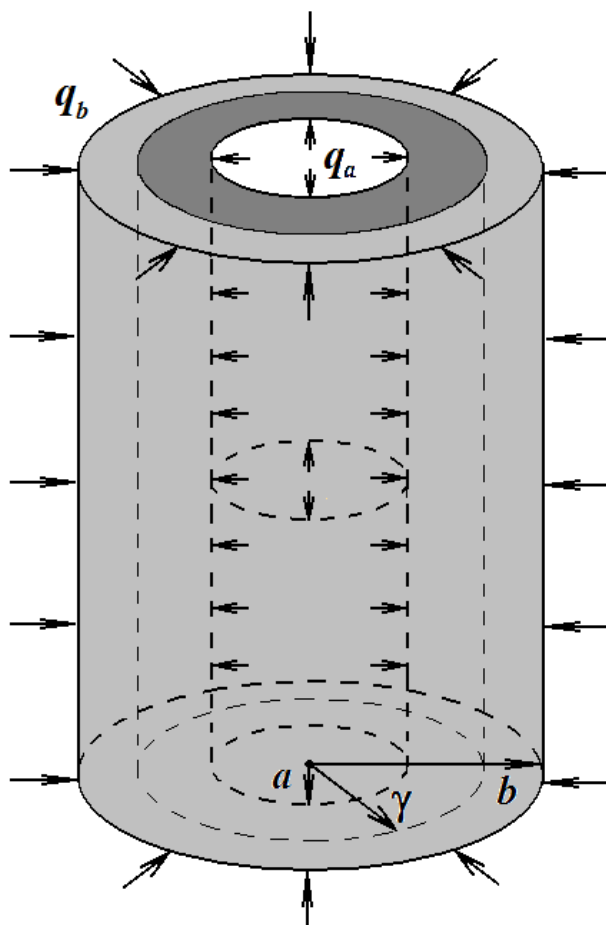


Рис. 1. Монолитная крепь вертикального шахтного ствола под действием радиального сжатия.

виде

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r + \lambda_1\varepsilon_\theta, & \sigma_\theta &= \lambda_1\varepsilon_r + (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_\theta, \\ \sigma_z &= \lambda_1(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta).\end{aligned}\tag{9}$$

Упругие деформации сжатого скелета связаны с напряжениями соотношениями (2), которые в нашем случае примут вид

$$\begin{aligned}s_r &= 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_r - 2\mu_0\varepsilon_{r_0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, & s_\theta &= 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_\theta - 2\mu_0\varepsilon_{\theta_0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \\ s_z &= \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0.\end{aligned}\tag{10}$$

В (10) и далее индекс “0” внизу компонент деформаций, напряжений и перемещений обозначает, что они вычислены на момент полного сжатия пор.

Функция нагружения (3), соотношения для полных деформаций в пластической зоне сжатого скелета (4), условия несжимаемости (5) в случае плоского деформированного состояния для нашей задачи переписутся соответственно в формах

$$(s_r - c\varepsilon_r^p - \eta\varepsilon_r^p)^2 + (s_\theta - c\varepsilon_\theta^p - \eta\varepsilon_\theta^p)^2 + s_z^2 = 2k^2,\tag{11}$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p,\tag{12}$$

$$\varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_z^e = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0.\tag{13}$$

На границе γ раздела сред упругого и пластического деформирования сжатого скелета должны выполняться условия непрерывности перемещений и напряжений

$$[u]|_{r=\gamma} = 0, \quad [\sigma_r]|_{r=\gamma} = 0.\tag{14}$$

В (14) квадратные скобки обозначают разность значений выражений соответствующих упругой и пластической области на границе $r = \gamma$.

Соотношения (6) – (14) представляют собой математические модели, описывающие НДС монолитной крепи вертикального шахтного ствола на этапах упругого деформирования пористой среды и неупругого деформирования сжатого скелета.

НДС монолитной крепи на первом этапе, то есть при наличии несхлопнутых пор согласно (6) – (9), определяется соотношениями

$$\begin{aligned}u &= \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} \cdot r + \frac{(q_b - q_a) a^2}{2(a^2 - 1)} \cdot \frac{1}{r}, \\ \varepsilon_r &= \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} - \frac{(q_b - q_a) a^2}{2(a^2 - 1)} \frac{1}{r^2}, & \varepsilon_\theta &= \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} + \frac{(q_b - q_a) a^2}{2(a^2 - 1)} \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_r &= q_a \cdot \frac{a^2 (r^2 - 1)}{r^2 (1 - a^2)} + q_b \cdot \frac{a^2 - r^2}{r^2 (1 - a^2)}, & \sigma_\theta &= q_a \cdot \frac{a^2 (r^2 + 1)}{r^2 (1 - a^2)} - q_b \cdot \frac{r^2 + a^2}{r^2 (1 - a^2)}, \\ \sigma_z &= q_a \cdot \frac{\lambda_1 a^2}{(\lambda_1 + 1)(1 - a^2)} - q_b \cdot \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + 1)(1 - a^2)},\end{aligned}\tag{15}$$

В (15) и далее все соотношения записаны в безразмерном виде, при этом все величины имеющие размерность напряжений отнесены к величине μ_1 , а имеющие размерность длины к радиусу b .

Из (15) следует, что объемная деформация при упругом сжатии пор определяется в виде

$$\varepsilon_\alpha^\alpha = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{q_b - q_a a^2}{(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)}.\tag{16}$$

Следовательно, достижение величины начального раствора пор нулевого значения (иначе — достижение объемной деформацией величины $-\varepsilon_0$) при упругом деформировании материала происходит одновременно во всей крепи под действием нагрузок удовлетворяющих условию

$$q_b = \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1) (1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0) a^2, \quad (17)$$

где $f(\varepsilon_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon_0 \neq 0 \\ 0, & \text{если } \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$.

При этом НДС (15) на момент полного закрытия пор переписывается в виде

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot r + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1))}{2} \cdot \frac{a^2}{r}, \\ \varepsilon_{r_0} &= -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1))}{2} \frac{a^2}{r^2}, \quad \varepsilon_{\theta_0} = -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1))}{2} \frac{a^2}{r^2}, \\ \sigma_{r_0} &= -\varepsilon_0 (\lambda_1 + 1) - \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1))}{r^2} a^2, \quad \sigma_{\theta_0} = -\varepsilon_0 (\lambda_1 + 1) + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1))}{r^2} a^2, \\ \sigma_{z_0} &= -\lambda_1 \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, если $q_b < \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1) (1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0) a^2$, то полного закрытия пор не происходит и материал ведет себя как сжимаемая упругая среда с параметрами $\lambda_1, \mu_1 = 1, \varepsilon_0$.

Если $q_b = \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1) (1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0) a^2$, то во всей крепи происходит полное сжатие пор (случай сжатого скелета). А при условии $q_b > \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1) (1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0) a^2$ возникнет и будет расти около внутренней поверхности крепи пластическая зона, препятствовать развитию которой будут упрочнение (c) и вязкость (η) материала, то есть сжатый скелет будет деформироваться как упрочняющаяся несжимаемая упругопластическая среда с параметрами $\mu = 1 + \mu_0, k, c$.

В этом случае сплошная среда разделяется на две зоны — упругую и пластическую, в каждой из которых значения перемещений, деформаций и напряжений в точках среды раскладываются на компоненты:

- а) пористого сжатия, определяемыми соотношениями (18);
- б) упруго-пластического сжатия (которые для деформаций в пластической зоне в свою очередь складываются из упругих и пластических компонент), определяемыми из решения упруго-пластической задачи.

НДС сжатого скелета монолитной крепи вертикального шахтного ствола согласно (6) — (14), (18) определяется в виде

— в упругой области ($\gamma < r < 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\eta\chi}{c + 2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left(2\gamma\dot{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c + 2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) - q_b, \\ \sigma_\theta &= \frac{\eta\chi}{c + 2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left(2\gamma\dot{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c + 2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - q_b; \end{aligned} \quad (19)$$

— в пластической области ($a < r < \gamma$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^p &= -\varepsilon_\theta^p = \frac{\chi}{c + 2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma^2}{r^2} - 1 \right) \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right), \\ \sigma_r &= -q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left(2 \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left(\mu \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 + 2 \ln \frac{a}{r} \right) + \eta\gamma\dot{\gamma} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + (c + 2\mu) \gamma^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta} = -q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left(2 \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left(\mu \left(\frac{2\gamma^2}{r^2} + \frac{r^2}{a^2} + 2 \ln \frac{a}{r} - 3 \right) + \eta\gamma\dot{\gamma} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right) + (c+2\mu)\gamma^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right).$$

Здесь в (19), (20) и далее $\chi = (q_a - q_b)$.

Радиус γ раздела зон упругого и пластического определяется из решения уравнения

$$q_b - q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left(2 \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left(\mu \left(\frac{\gamma^2}{a^2} - 1 + 2 \ln \frac{a}{\gamma} \right) + \gamma\dot{\gamma}\eta \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \right) + (c+2\mu)\gamma^2 \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) \right) = 0. \quad (21)$$

Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 2–4.

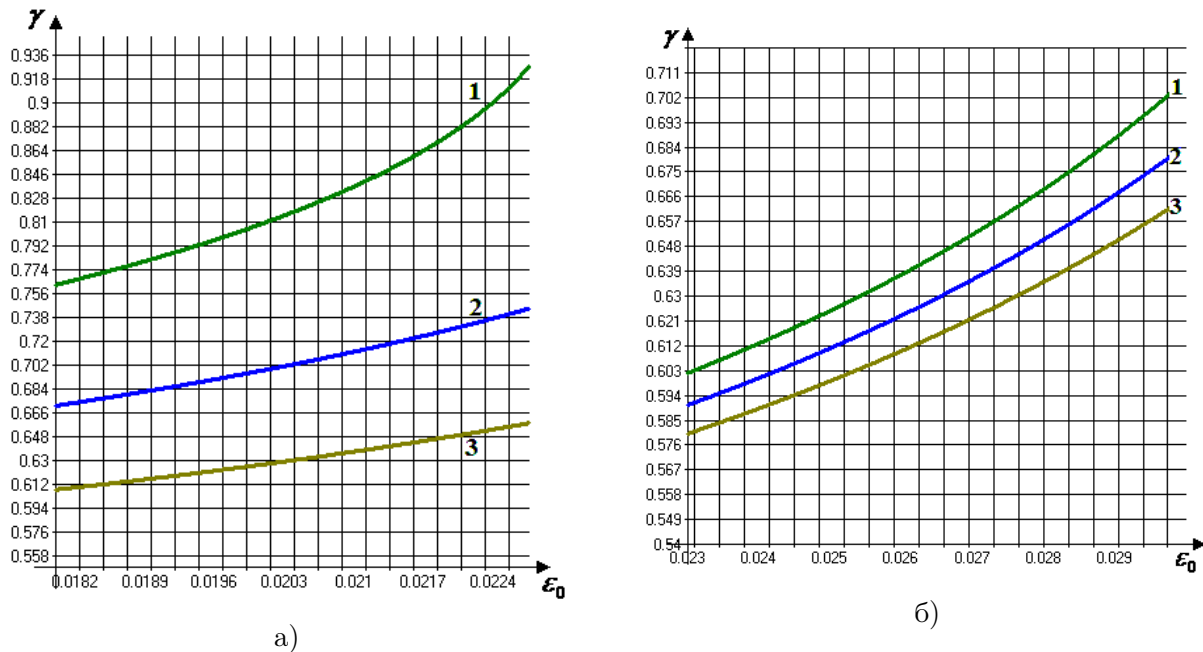


Рис. 2. Зависимость радиуса упругопластической границы γ от начального раствора пор ε_0 .

На рисунке 2а кривая 1 соответствует $k = 0.038$, кривая 2 — $k = 0.039$, кривая 3 — $k = 0.04$.

На рисунке 2б кривая 1 соответствует $c = 10^{-5}$, кривая 2 — $c = 0.005$, кривая 3 — $c = 0.01$.

На рисунках 4а и 4б кривые 1 соответствуют $k = 0.038$, кривые 2 — $k = 0.039$, кривая 3 — $k = 0.04$.

На рисунках 4в и 4г кривые 1 соответствуют $\varepsilon_0 = 0.02048$, кривые 2 — $\varepsilon_0 = 0.022$, кривая 3 — $\varepsilon_0 = 0.03$.

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими $a = 0.1$, $b = 1$, $q_a = 10^{-5}$, $q_b = 0.16384$, $c = 10^{-5}$, $\lambda_1 = 3$, $\mu_1 = 1$, $k = 0.04096$, $\varepsilon_0 = 0.02048$, $\mu = 2$.

Если в соотношениях (19) – (21) положить $\varepsilon_0 = 0$, то получим результаты работы [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимжанов, М. Т. Проблемы устойчивости равновесия в задачах геомеханики / М. Т. Алимжанов // Успехи механики. — 1990. Т. 13, № 3. — С. 21–57.
2. Гоцев, Д. В. Напряженно-деформированное состояние пористой сферической оболочке с учетом сложной реологии материала / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, А. Ю. Яковлев //

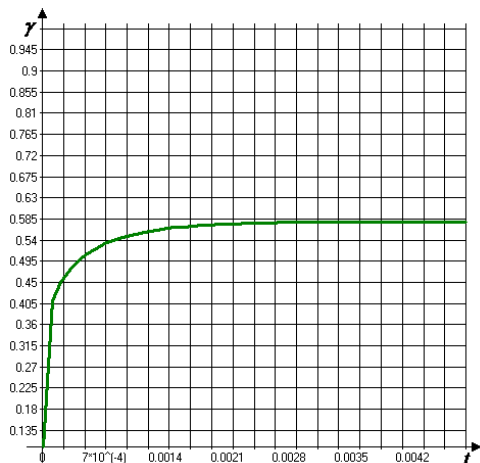


Рис. 3. Зависимость радиуса упругопластической границы γ от времени

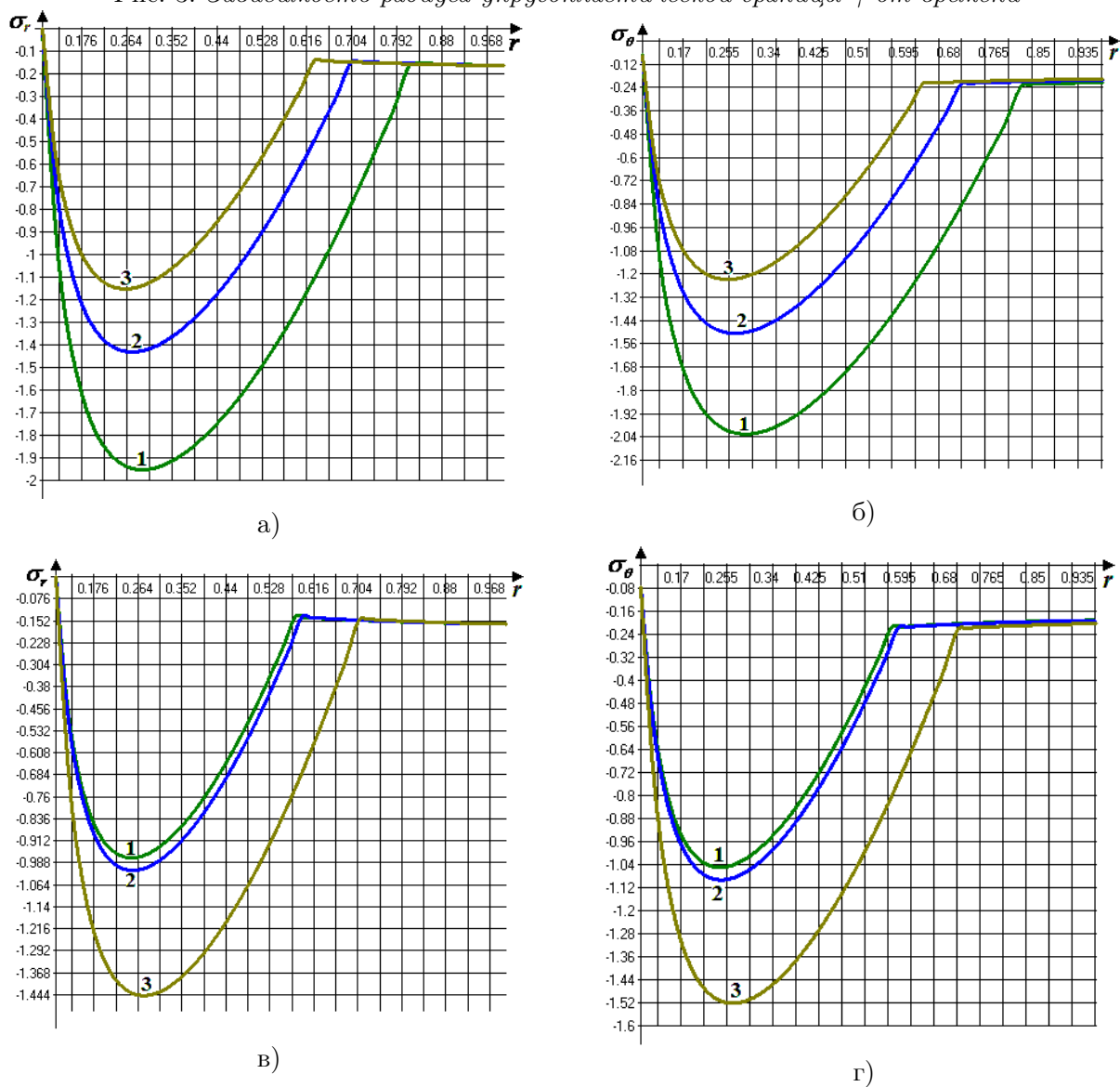


Рис. 4. Зависимость компонент напряжений σ_r и σ_θ от радиальной координаты r .

Сб. трудов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2015. — С. 93–97.

3. Гоцев, Д. В. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок / Д. Гоцев, А. Спорыхин. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. — 299 с.

4. Гоцев, Д. В. Устойчивость монолитной крепи подземного нефтехранилища сферической формы с учетом начальной пористости материала / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2014. — № 4 (22). — С. 114–123.

5. Спорыхин, А. Н. Об устойчивости деформирования упруго-вязко-пластических тел / А. Н. Спорыхин // Прикл. механика и техн. физика. — 1967. — № 4. — С. 52–58.

6. Гузь, А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок / А. Н. Гузь. — Киев : Наук. думка, 1977. — 204 с.

7. Ковалев, А. В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды / А. В. Ковалев, К. К. Горностаев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 1. — С. 135–140.

8. Ковалев, А. В. К определению момента сил трения диска, вращающегося в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью / А. В. Ковалев, А. А. Афанасьев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 94–101.

REFERENCES

1. Alimzhanov M. T. Problems of stability of balance in problems of geomechanics. [Alimzhanov M.T. Problemy ustojchivosti ravnovesiya v zadachax geomexaniki]. *Uspehi mexaniki — Progress of mechanics*, 1990, vol. 13, no. 3, pp. 21–57.

2. Gotsev D.V., Buntov A.E., Yakovlev A.Yu. The intense deformed condition of a porous spherical cover taking into account a difficult rheology of material. [Gocev D.V., Buntov A.E., Yakovlev A.Yu. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie poristoj sfericheskoy obolochki s uchetom slozhnoj reologii materiala]. *Sb. trudov Mezhdunarodnoj konferencii «Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki, informatiki i mexaniki» — Sb. works of the International conference «Actual Problems of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics»*, Moscow: FIZMATLIT, 2015, pp. 93–97.

3. Gotsev D.V., Sporykhin A. Metod of indignations in problems of stability of the supported excavations. [Gocev D.V., Sporyxin A. Metod vozmushhenij v zadachax ustojchivosti podkrepennyx gornyx vyrabotok]. Voronezh: Voronezh state university, 2010, 299 p.

4. Gotsev D.V., Buntov A.E. Stability monolithic fix underground oil storage of a spherical form taking into account initial porosity of material. [Gocev D.V., Buntov A.E. Ustojchivost' monolitnoj krepki podzemnogo neftexranilishha sfericheskoy formy s uchetom nachal'noj poristosti materiala]. *Vestnik ChGPU im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mexanika predel'nogo sostoyaniya — The ChGPU Bulletin of I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state*, 2014, no. 4 (22), pp. 114–123.

5. Sporykhin A.N. About stability of deformation of elastic and visco-plastic Bodies. [Sporyxin A.N. Ob ustojchivosti deformirovaniya uprugovyazko-plasticheskix tel]. *Prikl. mexanika i texn. fizika — Applied mechanics and technical physics*, 1967, no. 4, pp. 52–58.

6. Guz, A.N. Bases of the theory of stability of excavations. [Guz' A.N. Osnovy teorii ustojchivosti gornyx vyrabotok]. Kiev: Nauk. dumka, 1977, 204 p.

7. Kovalev A.V., Gornostayev K.K. About an elasto-plastic state of a thick-walled tube with given temperature for the model of complex environment. [Kovalev A.V., Gornostaev K.K. Ob uprugoplasticheskom sostoyanii tolstostennoj truby s uchetom temperatury dlya slozhnoj modeli sredy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 1, pp. 135–140.

8. Kovalev A.V., Afanasyev A.A. About finding friction torque of a disk rotating in limited space filled with viscous incompressible fluid. [Kovalev A.V., Afanas'ev A.A. K opredeleniyu momenta sil treniya diska, vrashhayushhegosya v ogranichenom prostranstve, zapolnennom vyazkoj neszhimaemoj zhidkost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 94–101.

Гоцев Дмитрий Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия

E-mail: rbgotsev@mail.ru

Тел.: 8-905-052-46-70

Gotsev Dmitry Viktorovich, the doctor of physical and mathematical sciences, professor of chair of mechanics and computer modeling, the Voronezh state university, Voronezh, Russia

E-mail: rbgotsev@mail.ru

Tel.: 8-905-052-46-70

Бунтов Алексей Евгеньевич, адъюнкт, Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина

E-mail: buntovkmss@mail.ru

Buntov Alexey Evgenyevich, the graduated in a military academy, the Air Force Military educational scientific center «Military and air academy of professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin», Voronezh, Russia

E-mail: buntovkmss@mail.ru

Перунов Николай Сергеевич, студент факультета ПММ, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: urlikz@mail.ru

Perunov Nikolay Sergeyeovich, student of faculty of applied mathematics, information scientists and mechanics, Voronezh state university, Voronezh, Russia

E-mail: urlikz@mail.ru