УДК 517.9

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова

Воронежский Государственный Педагогический Университет,
Воронежский Государственный Технический Университет

Поступила в редакцию 13.04.2015 г.

Аннотация. В статье изучаются спектральные свойства разностного оператора второго порядка с растущим потенциалом. Оператор рассматривается в гильбертовом пространстве двусторонних, суммируемых с квадратом модуля комплексных последовательностей. Такой оператор является дискретным аналогом дифференциального оператора второго порядка с комплексным растущим потенциалом. В основе исследования лежит метод подобных операторов, развиваемый А. Г. Баскаковым и его учениками. Данный метод позволяет свести изучение рассматриваемого оператора к оператору, матрица которого имеет блочно-диагональный вид. Получены асимптотические оценки собственных значений, собственных векторов и спектральных проекторов разностного оператора.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, разностный оператор, спектральные проекторы.

THE SIMILAR OPERATOR METHOD IN INVERSTIGATION OF SPECTRAL PROPERTIES OF ONE CLASS DIFFERENCE OPERATORS

G. V. Garkavenko, N. B. Uskova

Abstract. In this paper we study the spectral properties of a difference operator of second order with growing potential. The operator in the Hilbert space is considered bilateral, square summable sequences of complex module. This operator is a discrete analogue of the second order differential operator with complex growing potential. The study is based on a method of similar operators, developed by A. G. Baskakov and his disciples. This method allows us to reduce the study of the operator to an operator whose matrix has the block-diagonal form. Asymptotic estimates of eigenvalues, eigenvectors and spectral projections difference operator.

Keywords: the similar operator method, spectrum, difference operator, spectral projections.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим гильбертово пространство двусторонних комплексных последовательностей $l_2(\mathbb{Z})$ со скалярным произведением $(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)}$ и нормой $\|x\| = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2)^{\frac{1}{2}}$, где $x,y \in l_2(\mathbb{Z})$, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, порождённой этим скалярным произведением. В пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ зададим линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ формулой

$$(Ax)(n) = a(n)x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in D(A) \tag{1}$$

с областью определения $D(A) \subset l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$D(A) = \{x \in l_2(\mathbb{Z}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^2 |x(n)|^2 < \infty\},$$

где $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ - последовательность, обладающая свойствами:

1) $a(i) \neq a(j)$ при $i \neq j$;

2) $\lim\limits_{|n|\to\infty} |a(n)| \to \infty$;

$$3)\ 0 < d_i = \inf_{i\neq j} |a(i) - a(j)| \to \infty, |i| \to \infty. \tag{2}$$

Заметим, что сопряженный к A оператор $A^* : D(A^*) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ определяется формулой $(A^*x)(n) = \overline{a(n)}x(n),\ n \in \mathbb{Z}$, его область определения совпадает с $D(A)$ и $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для $x \in D(A)$, поэтому, согласно [1, глава 13], оператор A является нормальным оператором.

Символом $\rho(A)$ обозначим резольвентное множество оператора A, а символом $\sigma(A)$ - его спектр. Из условий на последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ следует, что $\sigma(A) = \{a(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$, то есть спектр оператора A состоит из простых изолированных собственных значений. Если число λ_0 не совпадает ни с одним $a(n)$, то $\lambda_0 \in \rho(A)$ и оператор $(A - \lambda_0 I)^{-1} : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ действует по формуле $((A-\lambda_0 I)^{-1}x)(n) = ((a(n)-\lambda_0)^{-1}x)(n),\ n \in \mathbb{Z}$. Такой оператор является нормальным компактным оператором.

Рассмотрим самосопряженный ограниченный оператор $B : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$(Bx)(n) = -2x(n) + x(n+1) + x(n-1),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in l_2(\mathbb{Z}). \tag{3}$$

Оператор вида $A - B$ рассматривался в работах [2], [3].В стандартном базисе $\{e_k\},\ k \in \mathbb{Z}$ пространства $l_2(\mathbb{Z})$, где $(e_k)(n) = (\delta_{nk}),\ n, k \in \mathbb{Z}$, матрица оператора $A - B$ имеет трёхдиагональный вид

$$\begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & -1 & a(-2)+2 & -1 & 0 & . & . & . & . \\
. & 0 & -1 & a(-1)+2 & -1 & 0 & . & . & . \\
. & . & 0 & -1 & a(0)+2 & -1 & 0 & . & . \\
. & . & . & 0 & -1 & a(1)+2 & -1 & 0 & . \\
. & . & . & . & 0 & -1 & a(2)+2 & -1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}$$

Рассматриваемый класс разностных операторов и их матриц соответствует уравнениям Штурма-Лиувилля при их дискретизации [3].

В работе [2] изучались разностные операторы конечного порядка указанного вида с условием $a(n) > 0, n \in \mathbb{Z}$, и получена двусторонняя оценка наименьшего собственного значения вариационным методом. Ниже приводятся асимптотические оценки спектра и спектральных проекторов оператора $A - B$ при условии (2) без условия неотрицательности последовательности a или предположения самосопряженности оператора A.

Спектральному анализу соответствующих дифференциальных операторов с растущим потенциалом посвящены монографии [4, гл. V §2] и [5, гл.VII §24].

Основные результаты статьи содержатся в теоремах 1 и 4. Сформулируем первую из них.

Теорема 1. *Существует такое натуральное число $k \geqslant 1$, что спектр $\sigma(A-B)$ оператора $A-B$ представим в виде*

$$\sigma(A-B) = \sigma_{(k)} \cup (\cup_{|i|>k}\sigma_i), \tag{4}$$

где $\sigma_{(k)}$ содержит не более чем $2k+1$ собственных значений, $\sigma_i = \{\mu_i\}$, $|i| > k$ - одноточечные множества и имеют место следующие асимптотические формулы

$$\mu_i = a(i) + 2 + O(d_i^{-1}), \tag{5}$$

$$\mu_i = a(i) + 2 - \frac{a(i+1) - 2a(i) + a(i-1)}{(a(i+1) - a(i))(a(i-1) - a(i))} + O(d_i^{-2}),\ |i| > k. \tag{6}$$

Соответствующие собственные векторы $\widetilde{e}_i, |i| > k$, допускают асимптотическую оценку

$$\|\widetilde{e}_i - \widetilde{y}_i\| = O(d_i^{-2}), \tag{7}$$

где

$$\widetilde{y}_i(j) = \begin{cases} 1, i = j, \\ (a(i \pm 1) - a(i))^{-1}, j = i \pm 1, \\ 0, \textit{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{8}$$

Исследовать оператор $A - B$ будем методом подобных операторов, который и изложем в адаптированном для рассматриваемого случая виде. Отметим, что к операторам, близким к оператору $A - B$ метод подобных операторов ранее не применялся.

1. О МЕТОДЕ ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Метод подобных операторов берёт начало с работ А. Пуанкаре, А. А. Ляпунова, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, К. Фридрихса, Р. Тернера и окончательно оформляется в работах А. Г. Баскакова [6]–[10]. Мы будем придерживаться идеологии и методологии работы [10]. Обычно метод подобных операторов применяется для получения спектральных характеристик дифференциальных операторов (см. например [11]).

Основная идея метода подобных операторов состоит в преобразовании оператора $A - B$, где $A : D(A) \subset H \to H$ - хорошо изученный оператор с известными характеристиками, имеющий спектр $\sigma(A)$ и резольвентное множество $\rho(A)$, а оператор возмущения B в некотором смысле мал по сравнению с A, в подобный ему более просто устроенный оператор. В нашем случае подобный оператор будет иметь блочно-диагональную матрицу. Спектральные свойства такого оператора легко изучать, так как они близки к спектральным свойствам оператора A.

Наиболее важным понятием метода подобнъх операторов является понятие допустимой тройки. Линейные операторы, действующие в пространстве операторов будем, согласно терминологии М.Г. Крейна, называть трансформаторами.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, и $End\,H$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в H.

Определение 2. [10]. Пусть $J : End\,H \to End\,H$, $\Gamma : End\,H \to End\,H$ трансформаторы. Тройку $(End\,H, J, \Gamma)$ назовём допустимой для невозмущенного оператора A, а $End\,H$ допустимым пространством возмущений, если
1) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причём J проектор;
2) $(\Gamma X)(D(A)) \subset D(A)$, при этом

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX,\ X \in End\,H \tag{9}$$

и $Y = \Gamma X \in End\, H$ — единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;
3) существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\|\Gamma\| \leqslant \gamma$, $max\{\|X\Gamma Y\|, \|\Gamma XY\|\} \leqslant \gamma\|X\|\|Y\|$;
4) для любого $X \in End\, H$ и $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon. \tag{10}$$

Теорема 3. [10]. *Пусть $(End\, H, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для оператора $A : D(A) \subset H \to H$ и B - некоторый оператор из $End\, H$. Тогда, если*

$$\gamma\|B\| < \frac{1}{4}, \tag{11}$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX$, где $X \in End\, H$ является решением нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B. \tag{12}$$

Решение X может быть найдено методом простых итераций, положив $X_0 = 0$, $X_1 = B$,.... (Оператор $\Phi : End\, H \to End\, H$, определённый правой частью равенства (12) является сжимающим в шаре $\{X \in End\, H : \|X - B\| < 3\|B\|\}$). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX$ осуществляет оператор $I + \Gamma X \in End\, H$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Отметим, что в дальнейшем удобно будет пользоваться матричным представлением операторов A и B, определённых формулами (1) и (3) соответственно. В этом параграфе символом H будет обозначаться гильбертово пространство $l_2(\mathbb{Z})$. Для любого оператора X из $End\, H$ вида

$$X_p = \sum_{i-j=p} P_i X P_j.$$

Отметим, что $||X_p|| = \sup_{i-j=p} ||P_i X P_j||$ (см. [12]) и

$$X = \lim_{n\to\infty} \sum_{|p|\leqslant n} (1 - \frac{|p|}{n}) X_p$$

Оператор X_p называется (согласно [12]) p-ой диагональю матрицы оператора X (относительно разложения единицы $\{P_k\}, k \in \mathbb{Z}$).

Напомним, что собственными векторами оператора A являются базисные векторы e_n, $n \in \mathbb{Z}$, а соответствующие спектральные проекторы задаются формулой $P_n x = (x, e_n)e_n$.

Представим оператор $A - B$ в виде $A - B = \widetilde{A} - \widetilde{B}$, где $(\widetilde{A}x)(n) = a(n)x(n) + 2x(n)$, $(\widetilde{B}x)(n) = x(n-1) + x(n+1)$. Тогда $\sigma(\widetilde{A}) = \{a(n) + 2, n \in \mathbb{Z}\}$ собственные векторы и спектральные проекторы те же, что и у оператора A, $\widetilde{B} \in End\, H$ при этом $||\widetilde{B}|| = 2$ и главная диагональ у матрицы оператора $\widetilde{B}$ нулевая.

Перейдём к определению трансформаторов $J : End\, H \to End\, H$ и $\Gamma : End\, H \to End\, H$. Положим

$$JX = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n X P_n,\ X \in End\, H. \tag{13}$$

Очевидно, что трансформатор J диагонализует матрицу оператора X и $J\widetilde{B} = 0$ в силу определения оператора $\widetilde{B}$.

Перепишем равенство (9) для матричных элементов матрицы $Y = (y_{lm})$, где $Y = \Gamma X$:

$$a(l)y_{lm} - y_{lm}a(m) = x_{lm},\ l \neq m,$$

откуда

$$y_{lm} = \frac{x_{lm}}{a(l) - a(m)}, \tag{14}$$

и $y_{ll} = 0,\ l \in \mathbb{Z}$. Так как $a(l) \neq a(m)$ при $l \neq m$, то формула (14) корректна. Таким образом матричные элементы оператора ΓX определены. При этом $Y \in End\, H$ и

$$\|Y\| = \sum_p \|Y_p\| \leqslant c(\min_{i\neq j} |a(i) - a(j)|)^{-1} \sum_p \|X_p\| = c(\min_{i\neq j} |a(i) - a(j)|)^{-1} \|X\|.$$

Здесь используется оценка на норму обратного оператора к оператору коммутирования для вычисления нормы оператора ΓX. Эта оценка является следствием более общих оценок, приводимых в [7, теорема 1.3]. В случае, если A самосопряженный оператор, $c = \pi/2$ [7, теорема 1.3 а]. В случае, если A - нормальный оператор, точное значение константы c неизвестно, известны лишь её оценки: $c < 5$ [7, теорема 1.3 б]. В конечномерном случае $c < 2{,}91$ [13]. Так как мы далее получаем асимптотические оценки, то для дальнейшего изложения это не принципиально.

Пусть $Q_k = \sum_{|i|\leqslant k} P_i$. Наряду с трансформаторами J и Γ рассмотрим семейство трансформаторов J_k и Γ_k, задаваемых формулами

$$J_k X = \sum_{|i|>k} P_i X P_i + Q_k X Q_k \tag{15}$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - \Gamma(Q_k X Q_k) = \Gamma X - Q_k(\Gamma X)Q_k \tag{16}$$

Ясно, что $J_0 X = JX,\ \Gamma_0 X = \Gamma X$. Так как операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X$ отличаются от JX и ΓX на конечномерный оператор.

Замечание 1. Из формул (13)-(16) также следует, что операторы J,Γ и J_k, Γ_k не изменятся, если вместо оператора $\widetilde{A}$ рассматривать оператор $\widetilde{A} - \lambda_0 I$, где $\lambda_0 \in \rho(\widetilde{A})$. Отметим, что $D(\widetilde{A}) = D(\widetilde{A} - \lambda_0 I)$.

Лемма 1. *Тройка $(End\, l_2(\mathbb{Z}), J_k, \Gamma_k)$ является допустимой для оператора $\widetilde{A}$ тройкой при любом k.*

Доказательство. Выполнение условия 1) и равенства (9) определения 1 вытекает непосредственно из построения операторов $J_k : End\, H \to End\, H$ и $\Gamma_k : End\, H \to End\, H$.

Проверим выполнение условия $(\Gamma X)(D(\widetilde{A})) \subset D(\widetilde{A})$, для этого нам потребуется семейство проекторов $Q_n = \sum_{|i|\leqslant n} P_i$, где $n > k, n \to \infty$. Возьмем вектор $x \in l_2(\mathbb{Z})$. В случае, когда $\widetilde{A}$ является обратимым оператором, имеем $\widetilde{A}^{-1}x \in D(\widetilde{A})$. Пусть $x_0 = \Gamma_k X \widetilde{A}^{-1}x$, покажем, что $x_0 \in D(\widetilde{A})$. Рассмотрим семейство операторов $\widetilde{A}(Q_n \Gamma_k X)\widetilde{A}^{-1}$ и представим их на векторе $x \in l_2(\mathbb{Z})$ в виде $y_n = \widetilde{A}(Q_n \Gamma_k X)\widetilde{A}^{-1}x = Q_n \Gamma_k X x + Q_n(X - J_k X)\widetilde{A}^{-1}x$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n \Gamma_k X x = \Gamma_k X x$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(X - J_k X)\widetilde{A}^{-1}x = (X - J_k X)\widetilde{A}^{-1}x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \widetilde{A}(\Gamma_k X)\widetilde{A}^{-1}x = y_0, y_0 \in l_2(\mathbb{Z})$. Тогда в силу замкнутости оператора $\widetilde{A}$ имеем $x_0 \in D(\widetilde{A})$ и $\widetilde{A}x_0 = y_0$.

Если же оператор $\widetilde{A}$ необратим, то при доказательстве данного пункта вместо $\widetilde{A}$ рассмотрим оператор $\widetilde{A} - \lambda_0 I,\ \lambda_0 \in \rho(\widetilde{A})$, и учтем замечание 1.

Перейдем к условию 3) определения 1.

Элементы матрицы оператора $\Gamma_k X$ также определяются формулой (14) при $l > k$ или $m > k$, но теперь не только $y_{ll} = 0$, но и $y_{lm} = 0$ при $l \leqslant k$ и $m \leqslant k$, что следует из формулы

(16) (т. е. у матрицы оператора $\Gamma_k X$ нулевая главная диагональ и центральный блок размера $2k+1$).

Для получения оценок на норму оператора Γ_k снова обратимся к работе [7] и рассмотрим оператор $ad_A Y = AY - YA$, $Y \in End\, H$. Представим пространство $End\, H$ как прямую сумму подпространств $End\, H = Im\, J_k \oplus Ker\, J_k$, и $ad_A|_{Im\, J_k} = 0$, обозначим $ad_A|_{Ker\, J_k} = A_k$. Тогда, опять же из [7] получаем, что $\Gamma_k X = A_k^{-1}$ и так как $\sigma(A_k) = \{\lambda_i - \lambda_j\}$, где $i > k$ или (и) $j > k$, то $\|\Gamma_k\| = \|A_k^{-1}\| \leqslant \dfrac{c}{d_k}$.

Так как $X\Gamma_k Y \in End\, H$, $\|(\Gamma_k X)Y\| \leqslant \|\Gamma_k\|\|X\|\|Y\| = \gamma_k\|X\|\|Y\|$, $\|X(\Gamma_k Y)\| \leqslant \|\Gamma_k\|\|X\|\|Y\| = \gamma_k\|X\|\|Y\|$, то условие 3) определения 1 выполнено.

Условие 4) выполняется автоматически ввиду того, что $\|X\|$ конечна, а $\|(\widetilde{A} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|$ можно сделать малой за счёт подходящего выбора числа $\lambda_\varepsilon \in \rho(\widetilde{A})$, а именно, λ_ε берём такое, что $\rho(\lambda_\varepsilon, \sigma(\widetilde{A})) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon\|X\|}$. Здесь через $\rho(\lambda_\varepsilon, \sigma(\widetilde{A}))$ обозначено расстояние от точки λ_ε до спектра оператора $\widetilde{A}$.

Лемма 1 доказана.

Теорема 4. *Существует такое $k > 0$, что оператор $\widetilde{A} - \widetilde{B}$ подобен оператору блочно-диагонального вида $\widetilde{A} - J_k X$, то есть*

$$(\widetilde{A} - \widetilde{B})(I + \Gamma_k X) = (I + \Gamma_k X)(\widetilde{A} - J_k X),$$

где оператор X есть решение уравнения (12) с Γ_k и J_k, и возмущением $\widetilde{B}$.

Доказательство. Так как по условию $d_n \to \infty$, при $n \to \infty$, то выполнено условие (11) теоремы 2 для некоторого достаточно большого k. Поэтому теорема 3 вытекает из леммы 1 и теоремы 2.

Сделаем несколько замечаний, касающихся структуры матриц операторов из теоремы 3.

Замечание 2. Оператор $\widetilde{B}$ таков, что $J\widetilde{B} = 0$, $J_k\widetilde{B} \neq 0$. Матрица оператора $\widetilde{B}\Gamma\widetilde{B}$ имеет пяти диагональную структуру, у неё являются ненулевыми -2, 0, 2 диагонали, остальные диагонали равны нулю. Кроме того, непосредственно из определения операторов J_k и Γ_k следует, что $J_k((\Gamma_k X)J_k\widetilde{B}) = 0$ и $J_k((\Gamma_k X)J_k(\widetilde{B}\Gamma_k X)) = 0$.

Элементами матрицы оператора $\widetilde{B}\Gamma_k X = Z$, если $X = (x_{ij})$, являются числа (при $i,j > k$, $j \neq i \pm 1$)

$$z_{ij} = \frac{x_{(i-1)j}}{a(i-1) - a(j)} + \frac{x_{(i+1)j}}{a(i+1) - a(j)},$$

поэтому

$$|z_{ij}| = cd_j^{-1}, |z_{ii}| = cd_i^{-1}, i,j > k,\ j \neq i \pm 1.$$

Замечание 3. Рассмотрим решение X уравнения (12) из теоремы 3. Первым приближением к нему выступает оператор $\widetilde{B}$, у него матрица трёхдиагональная. На каждой итерации добавляется 2 новых ненулевых диагонали и для элементов этих диагоналей имеет место оценка $|x_{ij}| < q^k$, где k - номер итерации, $q < 1$ константа сжатия отображения $\Phi(X)$ из теоремы 3, поэтому диагонали матрицы решения X имеют экспоненциальное убывание.

Доказательство теоремы 1. Из подобия операторов $A - B$ и $\widetilde{A} - J_k X$ следует, что спектр оператора $A - B$ (и $\widetilde{A} - J_k X$) допускает представление (4), где $\sigma_i = \sigma(A_i)$ и $A_i = (a(i) + 2)I - P_i X|_{H_i}$, $|i| > k$, $H_i = Im P_i$. Таким образом, для асимптотической оценки собственных значений оператора $\widetilde{A} - \widetilde{B}$ нам нужен оператор $P_i X|_{H_i}$, но нам известен не сам оператор X, а последовательные приближения к нему, причём первым приближением является оператор $\widetilde{B}$. Второе приближение имеет вид $\widetilde{B}\Gamma_k\widetilde{B} - \Gamma_k\widetilde{B}J_k\widetilde{B} - \Gamma_k\widetilde{B}J_k(\widetilde{B}\Gamma_k\widetilde{B})$ (и так далее).

Представим оператор $P_i X|_{H_i}$ в виде $(P_i\widetilde{B} + P_i(X - \widetilde{B}))|_{H_i}$ при этом $P_i\widetilde{B}|_{H_i} = 0, |i| > k$. Из уравнения (12) следует, что

$$X - \widetilde{B} = \widetilde{B}\Gamma_k X - (\Gamma_k X)J_k(\widetilde{B}\Gamma_k X),$$

при этом $P_i(X-\widetilde{B})|_{H_i}= P_i(\widetilde{B}\Gamma_k X)|_{H_i}$, здесь учтено замечание 2, следовательно,

$$\|P_i(\widetilde{B}\Gamma_k X)|_{H_i}\| = \|\sum_l \widetilde{B}_{il}(\Gamma_k X)_{li}\| \leqslant \|\widetilde{B}\|\,\|X\| d_i^{-1}.$$

Таким образом, оценка (5) имеет место. Оценка (6) устанавливается аналогично, но в качестве X берём второе приближение к нему и учитываем, что $P_i(\widetilde{B}\Gamma_k\widetilde{B})|_{H_i} = (\frac{1}{a(i-1)-a(i)} + \frac{1}{a(i+1)-a(i)})I$, $|i|>k$.

Перейдём к оценке отклонений собственных векторов. Опять же из подобия операторов следует равенство

$$\widetilde{e}_i = (I+\Gamma_k X)e_i = e_i + \Gamma_k\widetilde{B}e_i + \Gamma_k(X-\widetilde{B})e_i = \widetilde{y}_i + \Gamma_k(X-\widetilde{B})e_i,\ |i|>k,$$

$$\|\widetilde{e}_i - \widetilde{y}_i\| \leqslant \|\Gamma_k(X-\widetilde{B})e_i\| = \|(\Gamma_k(B\Gamma_k X - (\Gamma_k X)J_k B - \Gamma_k X J_k(B\Gamma_k X)))e_i\| \leqslant O(d_i^{-2}),$$

где $\widetilde{e}_i$ — собственный вектор оператора $A-B$, отвечающий собственному значению μ_i, определенному формулой (5), а e_i - собственный вектор оператора $\widetilde{A}$, отвечающий собственному значению $a(i)+2$, $|i|>k$, e_i также является вектором стандартного базиса пространства $l_2(\mathbb{Z})$. Так как $\Gamma_k\widetilde{B}e_i$ есть i- столбец матрицы $\Gamma_k\widetilde{B}$, то $\Gamma_k\widetilde{B}e_i = \{0,...,0,\frac{1}{a(i-1)-a(i)},0,\frac{1}{a(i+1)-a(i)},0,...\}^T$, и вектор $\widetilde{y}_i = e_i + \Gamma_k\widetilde{B}e_i$ определяется формулой

$$\widetilde{y}_i(k) = \begin{cases} 1,\ i=k, \\ (a(i\pm 1)-a(i))^{-1},\ k=i\pm 1, \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

при этом $\|\widetilde{e}_i - \widetilde{y}_i\| = O(d_i^{-2})$.

Теорема 5. *Пусть имеет место теорема 1. Для спектральных проекторов* $\widetilde{P}_i = P(\{\mu_i\},A-B))$, $|i|>k$, *и* $\widetilde{Q}_k = \sum_{|i|\leqslant k}\widetilde{P}_i$ *имеют место формулы*

$$\widetilde{P}_i = P_i U^{-1} + \Gamma X P_i U^{-1},\ |i|>k,\ U = I+\Gamma X, \tag{17}$$

$$\widetilde{Q}_k = Q_k U^{-1} + \Gamma X Q_k U^{-1}, \tag{18}$$

$$\widetilde{P}_i - P_i = (\Gamma_k X P_i - P_i \Gamma_k X)U^{-1},\ |i|>k, \tag{19}$$

$$\widetilde{Q}_k - Q_k = (\Gamma_k X Q_k - Q_k\Gamma_k X)U^{-1}, \tag{20}$$

причём

$$\|\widetilde{P}_i - P_i\| = O(d_i^{-1}),\ |i|>k, \tag{21}$$

и

$$\|\sum_{|i|\geqslant m}^N \widetilde{P}_i - \sum_{|i|\geqslant m}^N P_i\| \leqslant M(\min_{\substack{|p|,|l|\geqslant m \\ p\neq l}} |a(p)-a(l)|^{-1}), \textit{где } m>k, N>m, N\in\mathbb{N}, \tag{22}$$

для некоторой постоянной $M>0$.

Доказательство. Из подобия операторов $\widetilde{A}-\widetilde{B}$ и $\widetilde{A}-J_k X$ следует, что спектральные проекторы P_i, $|i|>k$ оператора $\widetilde{A}$ (или оператора A) и спектральные проекторы $\widetilde{P}_i = P(\widetilde{\sigma}_i, \widetilde{A}-\widetilde{B})$ связаны равенством

$$\widetilde{P}_i = (I+\Gamma_k X)P_i(I+\Gamma_k X)^{-1},$$

откуда и следуют формулы (17), (19). Аналогично получаются формулы (18), (20) для проектора Q_k. Далее

$$\|\widetilde{P}_i - P_i\| \leqslant c(\|\Gamma_k X P_i\| + \|P_i \Gamma_k X\|)\|U^{-1}\|,$$

и $\|P_i\Gamma_k X\| = O(d_i^{-1})$, $\|\Gamma_k X P_i\| = O(d_i^{-1})$, поэтому верно (21).

Перейдем к доказательству равенства (22). Обозначим $P_{(m)} = \sum_{|i|\geqslant m}^{N} P_i$, $\widetilde{P}_{(m)} = \sum_{|i|\geqslant m}^{N} \widetilde{P}_i$, тогда из подобия операторов $\widetilde{A} - \widetilde{B}$ и $\widetilde{A} - J_k X$ следует равенство

$$\widetilde{P}_{(m)} = (I + \Gamma_k X) P_{(m)} (I + \Gamma_k X)^{-1},$$

или, аналогично (19)

$$\widetilde{P}_{(m)} - P_{(m)} = (\Gamma_k X P_{(m)} - P_{(m)}\Gamma_k X) U^{-1},\ U = I + \Gamma X,$$

поэтому

$$\|\widetilde{P}_{(m)} - P_{(m)}\| \leqslant \|U^{-1}\|(\|\Gamma_k X P_{(m)}\| + \|P_{(m)}\Gamma_k X\|).$$

Так, как оператор U^{-1} ограничен, а каждое из слагаемых в правой части последнего равенства оценивается величиной $(\min_{\substack{|p|,|l|\geqslant m \\ p\neq l}} |a(p) - a(l)|)^{-1}$, то имеет место оценка (22). Теорема 4 доказана.

Следствие 1. Имеет место оценка $||\widetilde{P}_i - P_i - \Gamma B P_i + P_i \Gamma B|| = O(d_i^{-2})$ при $|i| > m$.

Доказательство. Из формулы (19) следует

$$\widetilde{P}_i - P_i = (\Gamma_k \widetilde{B} P_i - P_i \Gamma_k \widetilde{B}) U^{-1} + (\Gamma_k (X - \widetilde{B}) P_i - P_i \Gamma_k (X - \widetilde{B})) U^{-1} =$$

$$= \Gamma_k \widetilde{B} P_i - P_i \Gamma_k \widetilde{B} + (\Gamma_k \widetilde{B} P_i - P_i \Gamma_k \widetilde{B})(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\Gamma_k X)^n) + (\Gamma_k (X - \widetilde{B}) P_i - P_i \Gamma_k (X - \widetilde{B})) U^{-1} =$$

$$= \Gamma_k \widetilde{B} P_i - P_i \Gamma_k \widetilde{B} + V,$$

$$\|\widetilde{P}_i - P_i - \Gamma_k \widetilde{B} P_i - P_i \Gamma_k \widetilde{B}\| = \|V\|,$$

при этом норма оператора V имеет порядок d_i^{-2}.

Определение 2. [14] Пусть $C : D(C) \subset H \to H$ - линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения

$$\sigma(C) = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k \tag{23}$$

взаимно непересекающихся компактных подмножеств из σ_k, $k \in \mathbb{Z}$ и P_k - проектор Рисса, построенный по множеству σ_k. Оператор C называется спектральным относительно разложения (23) или обобщенно спектральным, если ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k x$ сходится для любого вектора $x \in H$.

Отметим, что если $\sigma_k = \{\lambda_k\}$ - одноточечные множества, а проекторы P_k обладают свойством $CP_k = \lambda_k P_k$, $k \in \mathbb{Z}$, исключая конечное число, то оператор C является спектральным по Данфорду, причём C - спектральный оператор скалярного типа, если $CP_k = \lambda_k P_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Следствие 2. Оператор $A - B$ является спектральным относительно разложения (4).

Пример. Пусть числа $a(n), n \in \mathbb{Z}$ таковы, что $a(n) = c_1 \cdot sign(n)|n|^\alpha + c_2$, $\alpha > 1$ и оператор B определен равенством (3). Тогда имеют место теоремы 1 и 4 для асимптотической оценки собственных векторов, собственных значений и спектральных проекторов оператора $A - B$. Заметим, что в этом случае $d_i = c_3|i|^{\alpha-1}$, $\alpha > 1$, $d_i \to \infty$ при $|i| \to \infty$.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания, существенно улучшившие качество статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М. : Мир, 1975. — 449 с.

2. Мусилимов, Б. Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующих разностному уравнению Штурма-Лиувилля / Б. Мусилимов, М. Отелбаев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1981. — Т. 21, № 6. — С. 1430–1434.

3. Отелбаев, М. О. О коэрцитивных оценках решений разностных уравнений. Исследование по теории дифференцируемых функций многих переменных и её приложениям. Часть 12. / М. О. Отелбаев// Труды МИАН СССР. — 1988. — Т. 181. — С. 241–249.

4. Костюченко, А. Г. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы) / А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян. — М. : Наука, 1979. — 400 с.

5. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

6. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Учебное пособие / А. Г. Баскаков. — Воронеж : Изд–во ВГУ, 1987. — 165 с.

7. Баскаков, А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов / А. Г. Баскаков // Сибирский математический журнал. — 1983. — Т. 24, № 1. — С. 21–39.

8. Баскаков, А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Известия АН СССР. Сер. Матем. — 1986. — Т. 50, № 3. — С. 435–457.

9. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1994. — Т. 54, № 4. — С. 3–32.

10. Баскаков, А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 3–28.

11. Ускова, Н. Б. О спектральных свойствах оператора Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом / Н. Б. Ускова // Уфимск. матем. журн. — 2015. — Т. 7, № 3. — С. 88–99.

12. Баскаков А.Г. Оценка элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1997. — Т. 61, № 6. — С. 3–26.

13. Bhatia, R. How and why to solve the operator equation AX-XB=Y / R. Bhatia, P. Rosenthal // Bull. London. Math. Soc. — 1997. — № 29. — P. 1–21.

14. Данфорд, Н. Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М. : Мир, 1974. — 664 с.

REFERENCES

1. Rudin W. Functional Analysis. [Rudin U. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1975, 449 p.

2. Musilimov B., Otelbaev M. Estimate the smallest eigenvalues of a class of matrices corresponding difference equation of Sturm-Liouville. [Musilimov B., Otelbaev M. Ocenka naimen'shego sobstvennogo znacheniya odnogo klassa matric, sootvetstvuyushhix raznostnomu uravneniyu Shturma-Liuvillya]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1981, vol. 21, iss. 6, pp. 68–73.

3. Otelbaev M.O. Coercive estimates for the solutions of difference equations. [Otelbaev, M. O. O koe'rcitivnyx ocenkax reshenij raznostnyx uravnenij. Issledovanie po teorii differenciruemyx

funkcij mnogix peremennyx i eyo prilozheniyam. Chast' 12.]. *Trudy MIAN SSSR — Trudy Math. Inst. Steclov*, 1988, vol. 181, pp. 241–249.

4. Kostyuchenko A.G., Sargsyan I.S. Distribution of eigenvalues (self-adjoint ordinary differential operators). [Kostyuchenko A. G., Sargsyan I. S. Raspredelenie sobstvennyx znachenij (samosopryazhennye obyknovennye differencial'nye operatory)]. Moscow: Nauka, 1979, 400 p.

5. Naimark M.A. Linear differential operators. [Najmark M. A. Linejnye differencial'nye operatory]. Moscow: Science, 1969, 528 p.

6. Baskakov A.G. Garmonicheskij analiz linejnyh operatorov. [Baskakov A. G. Garmonicheskij analiz linejnyx operatorov. Uchebnoe posobie]. Voronezh, 1987, 165 p.

7. Baskakov A.G. Method of abstract harmonic analysis in the theory of perturbation of linear operators. [Baskakov A. G. Metody abstraktnogo garmonicheskogo analiza v teorii vozmushhenij linejnyx operatorov]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1983, vol. 24, no. 1, pp. 21–39.

8. Baskakov A.G. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. [Baskakov A.G. Teorema o rasshhiplenii operatora i nekotorye smezhnye voprosy analiticheskoj teorii vozmushhenij]. *Izvestiya AN SSSR. Ser. Matem — Math. USSR Izv*, 1986, vol. 50, iss. 3, pp. 435–457.

9. Baskakov A.G. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. [Baskakov A.G. Spektral'nyj analiz vozmushhennyx nekvazianaliticheskix i spektral'nyx operatorov]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 1994, vol. 54, iss. 4, pp. 3–32.

10. Baskakov A.G., Derbushev A.V., Shcherbakov A.O. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. [Baskakov A.G., Derbushev A.V., Shcherbakov A.O. Metod podobnyx operatorov v spektral'nom analize nesamosopryazhennogo operatora Diraka s negladkim potencialom]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, iss. 3, pp. 3–28.

11. Uskova N.B. On spectral properties of Shturm-Liouville operator with matrix potential. [Uskova N.B. O spektral'nyx svojstvax operatora Shturma-Liuvillya s matrichnym potencialom]. *Ufimskij matematicheskij zhurnal — Ufa Mathematical Journal*, 2015, vol. 7, iss. 3, pp. 88–99.

12. Baskakov A.G. Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators. [Baskakov A.G. Ocenka e'lementov obratnyx matric i spektral'nyj analiz linejnyx operatorov]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 1997, vol. 61, iss. 6. pp. 3–26.

13. Bhatia R., Rosenthal P. How and why to solve the operator equation AX-XB=Y. Bull. London Math. Soc., 1997, no. 29, pp. 1–21.

14. Danford N., Schwartz J. T. Linear Operators, Part III: Spectral Operators. [Danford N., Shvarc Dzh.T. Linejnye operatory. T. 3: Spektral'nye operatory]. Moscow: Mir, 1974, 664 c.

Гаркавенко Галина Валериевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и методики преподавания математики физико-математического факультета ФГБОУ ВПО Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Garkavenko G. V., candidate of physicomathematical sciences, associate professor of computer science and mathematics teaching methods, Faculty of Physics and Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Ускова Наталья Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и физико–математического моделирования ФГБОУ ВПО Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: nat-uskova@mail.ru
Тел.: Uskova N. B.

candidate of physicomathematical sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Physics - Mathematical modeling of Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia,
E-mail: nat-uskova@mail.ru
Tel.: Uskova N. B.