УДК 511

О ВЫБОРЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТОВ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.06.2015 г.

Аннотация. В работе получена теорема об одном выборе приближения числа элементов в конечной последовательности специального вида. Рассмотрена конечная последовательность значений неприводимого полинома от простого аргумента. Значения не обязательно различны. Они делятся на некоторое натуральное число, свободное от квадратов. Для последовательности выполнены условия, накладываемые в случае одномерного решета. Доказано, что существует мультипликативная функция, такая, что некоторая величина является достаточно точным приближением для числа элементов в последовательности. При этом остаточный член мал "в среднем" в смысле теоремы Бомбьери–Виноградова. Для оценки одной из возникающих сумм применяется результат А. И. Виноградова.

Ключевые слова: приближение, число, последовательность, полином.

ON THE CHOICE OF THE APPROXIMATION FOR THE NUMBER OF ELEMENTS IN THE SEQUENCE OF A SPECIAL KIND

E. V. Vakhitova, S. R. Vakhitova

Abstract. In this paper we obtain a theorem on the approximation of one choice of the number of elements in a finite sequence of a special kind. Consider a finite sequence of irreducible polynomial values of the simple argument. Value are not necessarily different. They fall into a natural number, a square-free. To sequence the conditions imposed in the case of one-dimensional sieve. It is proved that there is a multiplicative function such that a certain quantity is sufficiently accurate approximation for the number of elements in a sequence. This small residual term "on average" in the sense of Theorem Bombieri–Vinogradov. To evaluate one of the emerging sums applied result of A. I. Vinogradov.

Keywords: approximation, number, sequence, polynomial.

ВВЕДЕНИЕ

При оценке количества элементов последовательности целых чисел

$$A = \{a_n \in \mathbf{Z} | a_n \leqslant x\}$$

($n \in \mathbf{N}, x$ – достаточно большое положительное число), которые не делятся ни на одно простое число из данного множества простых чисел, применяют метод решета. Метод решета сводит эту задачу к оценке числа элементов последовательности вида

$$A_d = \{a_n \in A, a_n \equiv 0 (\operatorname{mod} d)\}$$

для различных d, где $d \in \mathbf{N}$ и свободно от квадратов.

Для оценки числа элементов последовательности A_d надо найти достаточно точное приближение числа элементов этого множества в виде

$$\frac{\omega(d)}{d}X,$$

где $\omega(d)$ – некоторая мультипликативная функция, а X – некоторая положительная функция, $X = X(x), X > 1$.

Отметим, что функция $f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, называется мультипликативной, если для любых $a,b \in \mathbf{N}$, $(a,b) = 1$, выполнено равенство $f(ab) = f(a)f(b)$.

Так как x – достаточно большое положительное число, то для достаточно точного приближения выбор функций $\omega(d)$ и $X = X(x)$ определяется условием минимизации модуля остаточного члена $R(X,d)$:

$$R(X,d) = |A_d| - \frac{\omega(d)}{d}X.$$

Выбор достаточно точного приближения можно осуществить различными способами, но чем меньше $|R(X,d)|$ (по крайней мере "в среднем"), тем лучше будет результат. Будем подбирать функции $\omega(d)$ и $X = X(x)$ так, чтобы остаточный член $R(X,d)$ был мал "в среднем"в смысле теоремы Бомбьери–Виноградова (см. [1], [2]).

ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Будем применять сведения по теории сравнений из [3] и [4] и функцию Мебиуса, которая определяется следующим равенством:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \ n = 1, \\ (-1)^S, \ n = p_1 p_2 \dots p_S, \\ 0, \ p^2 | n, \end{cases}$$

где $n,s \in \mathbf{N}, p_1, p_2, \dots, p_s$ — попарно различные положительные простые числа.

Пусть $F(n)$ – неприводимый полином натуральной степени g с целыми коэффициентами ($n \in \mathbf{N}$) и $n = p$, где p – положительное простое число, $F(n) \neq n, F(n) \neq -n$.

Обозначим через $\rho(d)$ число различных по модулю d решений сравнения $F(n) \equiv 0 (\bmod d)$, где $d \in \mathbf{N}$, и число d свободно от квадратов, то есть $\mu(d) \neq 0$. Предположим, что $\rho(p) < p$ для всех простых чисел p, причем $\rho(p) < p - 1$, если $p \nmid F(0)$.

Рассмотрим конечную последовательность A,

$$A = \{F(p) | p \leqslant x\}, \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}$, x – достаточно большое положительное число и элементы из A не делятся ни на одно простое число $\leqslant x^{1/a}$. Наименьший положительный простой делитель p_n числа $F(p)$ удовлетворяет неравенству $p_n > x^{1/a}$, где a – параметр решета, $a \in \mathbf{R}$.

Обозначим через A_d последовательность

$$A_d = \{F(p) \in A | F(p) \equiv 0 (\bmod d)\}$$

и через $|A_d|$ – число элементов в A_d, включая и одинаковые значения.

Пусть $\omega(d)$ – мультипликативная функция, такая, что $\frac{\omega(d)}{d}X$ является достаточно точным приближением числа $|A_d|$, где $X = X(x)$.

Введем следующие условия на последовательность A:

1) существует постоянная $C_1' \geqslant 1$, такая, что для любого простого числа p,

$$1 \leqslant \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \leqslant C_1',$$

где $\omega(p)$ – мультипликативная функция, такая, что $(\omega(d)/d)X$ является достаточно точным приближением $|A_d|$ и $\mu(d) \neq 0$ ($\mu(n)$ – функция Мебиуса);

2) существуют постоянная $C_2' \geqslant 1$ и параметр L, такие, что

$$-L \leqslant \sum_{u \leqslant p < v} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln \frac{v}{u} \leqslant C_2',$$

где $L \geqslant 1$ и не зависит от u и v $(2 \leqslant u \leqslant v)$;

3) существуют постоянные α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, $C_3' \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \leqslant C_3' \frac{X}{\ln^C X},$$

где $X \geqslant 2$, $C_3' = C_3'(C)$, $R(X,d) = |A_d| - \dfrac{\omega(d)}{d} X$, $\nu(d)$ – число простых делителей натурального числа d.

Условие 3) позволяет говорить о достаточной малости остаточного члена $R(X,d)$.

Отметим, что если известна оценка суммы, содержащейся в остаточном члене, то можно выбрать в одномерном решете Сельберга (в неравенстве $d < \xi^2$) ξ^2 подходящим образом. Это можно обеспечить условием 3), так как можно выбрать $\xi^2 = \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}$.

Усредненные оценки числа простых чисел в арифметических прогрессиях основаны на использовании идей большого решета Ю. В. Линника. Обычно пользуются оценкой при $d \leqslant X^C$, которую М. Б. Барбан (1965) доказал при $C = 3/8 - \varepsilon$, А. Бомбьери и А. И. Виноградов (1965) – при $C = 1/2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – произвольная постоянная. Несколько более слабую форму этой оценки при $d \leqslant \frac{X^{1/2}}{\ln^C X}$ доказал А. И. Виноградов [5].

Поставим задачу: осуществить выбор достаточно точного приближения числа элементов в конечной последовательности A_d.

Задачу о выборе достаточно точного приближения числа элементов в последовательности неприводимого полинома от простого аргумента рассматривал ранее Х.–Э. Рихерт [6].

Авторами для остаточного члена

$$R(x,d) = ||A_d| - \frac{\rho_1(d)}{\varphi(d)} \mathrm{li}\, x|,$$

где $\rho_1(d)$ – число решений сравнения $F(m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d)$ при $(m,d) = 1$, $\mathrm{li}\, x$ – интегральный логарифм $\left(\mathrm{li}\, x = \int\limits_2^x \frac{du}{\ln u}\right)$, показано, что остаточный член достаточно мал в том смысле, что выполнено условие на последовательность:

$$\sum_{d < \frac{x^{1/2}}{\ln^{C_0} x}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(x,d)| \leqslant C_3' \frac{x}{\ln^3 x}.$$

Таким образом, функция

$$\frac{\rho_1(d)}{d} \mathrm{li}\, x,$$

где $\rho_1(d)$ – число решений сравнения $F(m) \equiv 0(\text{mod } d)$ для $(m,d) = 1$, является приближением для

$$|A_d| = |\{F(p)|\ F(p) \equiv 0(\text{mod } d), p \leqslant x\}|.$$

Теорема. *Пусть последовательность A определена равенством (1), выполнены условия 1)–3), $d \in \boldsymbol{N}, d < \frac{x^{1/2}}{\ln^{C_0} x}$, d свободно от квадратов, x – достаточно большое положительное число. Тогда существует мультипликативная функция $\omega(d)$ такая, что $\frac{\omega(d)}{d}\text{li } x$ является достаточно точным приближением в смысле условия 3) для числа элементов в последовательности A, которые делятся на d.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Для числа $|A_d|$ получим следующее равенство:

$$|A_d| = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ F(p) \equiv 0\,(\text{mod } d)}} 1 = \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ F(m) \equiv 0\,(\text{mod } d)}} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv m\,(\text{mod } d)}} 1.$$

Сумма по m имеет $\rho(d)$ членов. Если $(m,d) > 1$, то такой член не превосходит 1.
Рассмотрим отдельно суммы для $(m,d) = 1$ и $(m,d) > 1$:

$$|A_d| = \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ F(m) \equiv 0\,(\text{mod } d) \\ (m,d)=1}} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv m\,(\text{mod } d)}} 1 + \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ F(m) \equiv 0\,(\text{mod } d) \\ (m,d)>1}} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv m\,(\text{mod } d)}} 1.$$

При $(m,d) = 1$ для первой суммы S_1, где

$$S_1 = \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ F(m) \equiv 0\,(\text{mod } d) \\ (m,d)=1}} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv m\,(\text{mod } d)}} 1,$$

обозначим через $\pi(x; d,m)$ внутреннюю сумму при $(m,d) = 1$:

$$\pi(x; d,m) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv m\,(\text{mod } d)}} 1, \quad (m,d) = 1.$$

Тогда получим, что

$$S_1 = \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ F(m) \equiv 0\,(\text{mod } d) \\ (m,d)=1}} \pi(x; d,m),$$

$$|A_d| = S_1 + \Theta\rho(d) = \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ F(m) \equiv 0 \quad (\text{mod } d) \\ (m,d)=1}} \pi(x; d,m) + \Theta\rho(d),$$

где $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$.

Обозначим через $\rho_1(d)$ число решений сравнения $F(m) \equiv 0(\text{mod } d)$ для $(m,d) = 1$.

Сравним функции ρ_1 и ρ. Имеем:

$$\rho_1(d) = \prod_{p|d} \rho_1(p), \quad \mu(d) \neq 0,$$

а $\rho_1(p)$ – число решений сравнения $F(m) \equiv 0 \pmod p$ при $p \not| m$.

Тогда если $m = 0$ не является решением указанного сравнения, то $\rho_1(p) = \rho(p)$, если $m = 0$ является решением, то в $\rho_1(p)$ оно не учитывается, поэтому $\rho_1(p) = \rho(p) - 1$. Так как $m = 0$ является решением тогда и только тогда, когда $p|F(0)$, то

$$\rho_1(p) = \begin{cases} \rho(p), & p \not| F(0), \\ \rho(p) - 1, & p|F(0). \end{cases}$$

Кроме того, известно (см. [3], гл. 15, §1, теорема 148, с. 128), что $\rho(p) \leqslant g$, если $\rho(p) < p$, поэтому

$$\rho_1(d) \leqslant \rho(d) \leqslant g^{\nu(d)}, \quad \mu(d) \neq 0,$$

если $\rho(p) < p$ для всех $p|d$.

Таким образом, для числа $|A_d|$ получим:

$$|A_d| = \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ F(m) \equiv 0 \pmod d \\ (m,d)=1}} \left(\frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(d)} + \pi(x; d,m) - \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(d)} \right) + \Theta\rho(d) =$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ F(m) \equiv 0 \pmod d \\ (m,d)=1}} \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(d)} + \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ F(m) \equiv 0 \pmod d \\ (m,d)=1}} \left(\pi(x; d,m) - \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(d)} \right) + \Theta\rho(d),$$

где $\varphi(n)$ – функция Эйлера (которая определяется как число натуральных чисел, не превосходящих натурального числа n, и взаимно простых с n).

Обозначим через $R(x,d)$ сумму:

$$R(x,d) = \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ F(m) \equiv 0 \pmod d \\ (m,d)=1}} \left(\pi(x; d,m) - \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(d)} \right) + \Theta\rho(d).$$

Тогда число $|A_d|$ можно записать в виде:

$$|A_d| = \frac{1}{\varphi(d)} \rho_1(d)\, \mathrm{li}\, x + R(x,d).$$

Введем обозначение:

$$E(x,d) = \max_{2 \leqslant d \leqslant x} \max_{\substack{1 \leqslant m \leqslant d \\ (m,d)=1}} \left| \pi(x; d,m) - \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(d)} \right|.$$

Тогда

$$|R(x,d)| \leqslant \rho(d)(E(x,d) + 1).$$

Так как $\rho(d) \leqslant g^{\nu(d)}$, если $\mu(d) \neq 0$, то получим

$$|R(x,d)| \leqslant g^{\nu(d)}(E(x,d) + 1).$$

Поэтому можно выбрать

$$X = \mathrm{li}\, x, \quad \omega(d) = \frac{\rho_1(d)}{\varphi(d)} d, \tag{2}$$

так что функция $\omega(d)$ является мультипликативной и

$$\frac{\omega(d)}{d}X = \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(d)}\rho_1(d).$$

О достаточной малости остаточного члена $R(X,\, d)$ позволяет говорить выполнимость условия 3) на последовательность. Сформулируем это условие: существуют постоянные α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, $C_3' \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \leqslant C_3' \frac{X}{\ln^C X}. \tag{3}$$

Здесь $X \geqslant 2$, $C_3' = C_3'(C)$, $R(X,d) = |A_d| - \dfrac{\omega(d)}{d}X$, $\nu(d)$ – число простых делителей натурального числа d.

Проверим выполнимость условия 3).

Рассмотрим сумму (3) из условия 3) с некоторыми постоянными α и C_0, которые выберем в дальнейшем. При достаточно большом X имеем:

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} g^{\nu(d)} (E(X,d) + 1) =$$

$$= \sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) (3g)^{\nu(d)} (E(X,d) + 1).$$

Поэтому получим

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) (3g)^{\nu(d)} E(X,d) + \sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) (3g)^{\nu(d)}. \tag{4}$$

Оценим отдельно каждую из полученных сумм в равенстве (4).

1. Так как $d \leqslant X$, то $E(X,d) << \dfrac{X}{d}$, поэтому, обозначая первую сумму через Y_1, получим:

$$Y_1 = \sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) (3g)^{\nu(d)} E(X,d) <<$$

$$<< \sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \frac{\mu^2(d)}{d^{1/2}} (3g)^{\nu(d)} E^{\frac{1}{2}}(X,d) <<$$

$$<< X^{\frac{1}{2}} \Bigg(\sum_{d < X^\alpha} \frac{1}{d} \mu^2(d) (3g)^{2\nu(d)} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\sum_{q < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} E(X,q) \Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Для первой из полученных сумм получим

$$\Big(\sum_{d<X^\alpha}\frac{1}{d}\mu^2(d)(3g)^{2\nu(d)}\Big)^{\frac12}=\Big(\sum_{d_1\dots d_{(3g)^2}<X^\alpha}\frac{\mu^2(d_1\dots d_{(3g)^2})}{d_1\dots d_{(3g)^2}}\Big)^{\frac12}\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\Big(\sum_{n<X^\alpha}\frac1n\Big)^{(3g)^2}\Big)^{\frac12}\leqslant\Big(\alpha\ln X+1\Big)^{\frac12(3g)^2}.$$

Для оценки второй суммы применим результат А. И. Виноградова [5], согласно которому для любой положительной постоянной v существует положительная постоянная $C, C=C(v)$, такая, что

$$\sum_{d<\frac{X^{1/2}}{\ln^C X}}E(X,d)=O_v(\frac{X}{\ln^v X}).$$

Отметим, что здесь запись O_v означает, что постоянная, входящая в определение символа O, может зависеть от v.

Для получения необходимой оценки можно самое большее выбрать $\alpha=1/2$. Тогда при $v=8+(3g)^2$ получим, что существует постоянная C_0 такая, что

$$\Big(\sum_{q<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}E(X,q)\Big)^{\frac12}=\Big(O_v\Big(\frac{X}{\ln^v X}\Big)\Big)^{\frac12}=O_g\Big(\frac{X^{\frac12}}{\ln^{4+\frac12(3g)^2}X}\Big).$$

Таким образом, для первой суммы Y_1 получим

$$Y_1=\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)(3g)^{\nu(d)}E(X,d)<<$$

$$<<X^{\frac12}(\alpha\ln X+1)^{\frac12(3g)^2}\frac{X^{\frac12}}{\ln^{4+\frac12(3g)^2}X}<<\frac{X}{\ln^4 X},$$

причем постоянная в символе $<<$ может зависеть только от g.

2. Оценим теперь вторую сумму из (4), обозначив ее через Y_2. При $\alpha=\frac12$ получим

$$Y_2=\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)(3g)^{\nu(d)}\leqslant\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}\sum_{d<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\frac{\mu^2(d)(3g)^{\nu(d)}}{d}=$$

$$=\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}\sum_{d_1\dots d_{3g}<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\frac{\mu^2(d_1\dots d_{3g})}{d_1\dots d_{3g}}\leqslant\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}\Big(\sum_{n<\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}}\frac1n\Big)^{3g}\leqslant\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}\Big(\ln\frac{X^\alpha}{\ln^{C_0}X}+1\Big)^{3g}\leqslant$$

$$\leqslant X^{1/2}(\frac12\ln X+1)^{3g}<<\frac{X}{\ln^3 X}.$$

Итак, при $\alpha=1/2$ существуют постоянные $C_3'\geqslant 1$ и $C_0\geqslant 1$ такие, что

$$\sum_{d<\frac{X^{\frac12}}{\ln^{C_0}X}}\mu^2(d)3^{\nu(d)}|R(X,d)|\leqslant C_3'\frac{X}{\ln^3 X},$$

следовательно, условие (3) выполнено с $\alpha=1/2$.

Таким образом, учитывая (2), получим, что существует мультипликативная функция $\omega(d)$, такая, что $\frac{\omega(d)}{d}X(x)$, где $X(x) = \mathrm{li}\ x$, является достаточно точным приближением числа элементов в последовательности A, которые делятся на d.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Задачу о выборе достаточно точного приближения числа элементов в последовательности значений неприводимого полинома от простого аргумента рассматривал ранее Х.–Э. Рихерт [6]. В примере 1.2 работы [6] достаточно точное приближение $\frac{\rho_1(d)}{d}\mathrm{li}\ x$ получено для

$$|A_d| = |\{F(p)|F(p) \equiv 0(\mathrm{mod}\ d), p \leqslant x\}|$$

и остаточный член мал "в среднем"в смысле теоремы Бомбьери – Виноградова.

Авторами получено достаточно точное приближение $\frac{\rho_1(d)}{d}\mathrm{li}\ x$. При этом остаточный член достаточно мал в том смысле, что выполнено условие на последовательность:

$$\sum_{d<\frac{x^{1/2}}{\ln^{C_0} x}} \mu^2(d)3^{\nu(d)}|R(x,d)| \leqslant C_3'\frac{x}{\ln^3 x}.$$

2. Отметим, что метод одномерного решета Сельберга с весами Бухштаба позволяет получить преимущества при выборе параметров весового решета. О сравнении методов решета см. работу [7], а более подробно о методах решета с весами Бухштаба можно узнать из монографии [8].

3. Аналогичная задача, а именно, задача о выборе приближения числа элементов в последовательности значений неприводимого полинома от аргумента pq с ограничениями на p и q, была рассмотрена ранее авторами в работе [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин, Б. В. Распределение "почти простых" чисел в целозначных полиномиальных последовательностях / Б. В. Левин // ДАН Узб. ССР. — 1962. — Т. 11. — С. 7–9.

2. Бухштаб, А. А. Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета / А. А. Бухштаб // Успехи математических наук. — 1967. — Т. 22, № 3 (135). — С. 199–226.

3. Бухштаб, А. А. Теория чисел / А. А. Бухштаб. — М. : Просвещение, 1966. — 384 с.

4. Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. — М. : Наука, 1981. — 176 с.

5. Виноградов, А. И. Плотностная гипотеза для L–рядов Дирихле / А. И. Виноградов // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1965. — Т. 29. — С. 903–934. Исправление там же. — 1966. — Т. 30. — С. 719–720.

6. Рихерт, Х.–Э. Решето Сельберга / Х.–Э. Рихерт // Вып. Проблемы аналитической теории чисел. Перевод с англ. Б. В. Левина. — М. : Мир, 1975. — С. 7–42.

7. Вахитова, Е. В. Сравнение весовых функций в методе весового решета / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова // Ученые записки Орловского государственного университета. Труды X Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел : современные проблемы и приложения", Волгоград, 10–16 сентября 2012 г., — Орел : Изд-во ОрлГУ, 2012. — № 6, Ч. 2. — С. 51–59.

8. Вахитова, Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 332 с.

9. Вахитова, Е. В. О выборе приближения числа элементов в последовательности значений неприводимого полинома от аргумента pq с ограничениями на p и q / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13. — Вып. 1. — Ч. 1. — С. 3–8.

REFERENCES

1. Levin B.V. Distribution of "almost simple" number in whole polynomial sequence. [Levin B. V. Raspredelenie "pochti prostyx" chisel v celoznachnyx polinomial'nyx posledovatel'nostyax]. *DAN Uzb. SSR — DAN Uzb. SSR*, 1962, vol. 11, pp. 7–9.

2. Bukhstab A.A. Combinatorial intensification method of Eratosthenes sieve. [Buxshtab A.A. Kombinatornoe usilenie metoda e'ratosfenova resheta]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1967, vol. 22, no. 3 (135), pp. 199–226.

3. Bukhstab A.A. Number theory. [Buxshtab A.A. Teoriya chisel]. Moscow: Prosveschenie, 1966, 384 p.

4. Vinogradov I.M. Base of number theory. [Vinogradov I.M. Osnovy teorii chisel]. Moscow: Nauka, 1981, 176 p.

5. Vinogradov A.I. Density hypothesis for the L-series of Dirichlet. [Vinogradov A.I. Plotnostnaya gipoteza dlya L–ryadov Dirixle]. *Izv. AN SSSR, ser. matem — Izv. AN SSSR, ser. Mathem.*, 1965, vol. 29, pp. 903–934. Correction there, 1966, vol. 30, pp. 719–720.

6. Richert H.–E. Selberg sieve. [Rixert X.–E'. Resheto Sel'berga]. *Vyp. Problemy analiticheskoj teorii chisel — The problems of analytic number theory*, Moscow: Mir, 1975, pp. 7–42.

7. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Comparison the weight functions in the method of the sieve with weights. [Vaxitova E.V., Vaxitova S.R. Sravnenie vesovyx funkcij v metode vesovogo resheta]. *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. Trudy X Mezhdunar. konf. "Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya", Volgograd, 10–16 sentyabrya 2012 g., Orel: Izd-vo OrlGU, 2012, no. 6, Ch. 2, pp. 51–59 — Scientific notes of Orel State University. Work of the X International Conf. "Algebra and Number Theory: modern problems and apply", Volgograd, 10–16 September 2012, Orel: Publishing House of the OrlGU*, 2012, no. 6, Part 2, pp. 51–59.

8. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Method sieve with weights Buchstab and then applications. [Vaxitova E.V., Vaxitova S.R. Metody resheta s vesami Buxshtaba i ix prilozheniya]. Voronezh: Publishing House VGU, 2014, 332 p.

9. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. On the choice of approximation of elements in the sequence of values of the irreducible polynomial of the argument pq to restrictions on p and q. [Vaxitova E.V., Vaxitova S.R. O vybore priblizheniya chisla e'lementov v posledovatel'nosti znachenij neprivodimogo polinoma ot argumenta pq s ogranicheniyami na p и q]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, iss. 1, part 1, pp. 3–8.

Вахитова Екатерина Васильевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: algebraist@yandex.ru
Тел.: 8–920–459–20–94

Vakhitova Ekaterina Vasilevna, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Departament digital technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: algebraist@yandex.ru
Tel.: 8–920–459–20–94

Вахитова Светлана Рифовна,
E-mail: algebraist@yandex.ru
Тел.: 8–920–459–20–94

Vakhitova Svetlana Rifovna,
E-mail: algebraist@yandex.ru
Tel.: 8–920–459–20–94