

## БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ИЗ ТОЧКИ МИНИМУМА С РЕЗОНАНСОМ 1 : 1 : 1

Е. В. Бухонова, Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 14.12.2015 г.

**Аннотация.** Статья продолжает серию статей Е. В. Бухоновой, Б. М. Даринского, Е. В. Деруновой, А. П. Карповой, И. В. Колесниковой, Н. А. Копытина и Ю. И. Сапронова по многомодовым бифуркациям циклов динамических систем. В этой серии приведены, в частности, списки систем образующих алгебраических инвариантов для ортогонального действия окружности на  $\mathbb{R}^6$  и, как следствие, указаны нормальные формы главных частей ключевых уравнений и ключевых функций в случае двойных резонансов (в особых точках функционалов с круговой симметрией).

Периодические экстремали функционалов действия служат прототипами периодических колебаний динамических систем, сегнетоэлектрических фаз кристаллов, нелинейных периодических волн и т.д. В настоящей статье рассмотрен мало изученный случай резонанса 1:1:1. Предложена исследовательская схема, опирающаяся на вариационную версию метода Ляпунова-Шмидта, в соответствии с которой численное и качественное описание бифуркаций циклов сводится к анализу ветвления критических точек ключевой функции на (конечномерном) пространстве ключевых переменных. Использована также вторичная редукция (по угловым переменным) ключевой функции и ее нормализованная форма. В качестве демонстрационной модели использован функционал действия для обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка. Приведены примеры раскладов ветвей критических точек и описан подход к их классификации, основанный на разбиении бифурцирующих ветвей экстремалей на подмножества с фиксированными значениями индекса Морса и на описании взаимных примыканий бифурцирующих критических точек.

**Ключевые слова:** гладкий функционал; экстремаль; круговая симметрия; резонанс; моделирование ветвления; метод Ляпунова-Шмидта.

## BIFURCATIONS OF PERIODIC EXTREMALS FROM MINIMUM POINTS WITH THE RESONANCE 1 : 1 : 1

E. V. Bukhonova, B. M. Darinsky, Yu. I. Sapronov

**Abstract.** This series provides, in particular lists of generating systems of algebraic invariants for orthogonal actions from circle to  $\mathbb{R}^6$ . Normal forms of major key parts of the equations and the key functions in the case of double resonances (the singular points of functionals with circular symmetry) is given.

Periodic extremals of functionalities of action serve as prototypes of periodic oscillations of dynamic systems, ferroelectric phases in crystals, nonlinear periodic waves, etc. In this article a little studied case of a resonance 1:1:1 is considered. The research scheme is proposed that is based on the variation version of a Lyapunov-Schmidt method, according to which numerical and qualitative the description of bifurcations of cycles is consolidated to the analysis of branching of the critical points of key function. The second reduction is used (on

angular variables) of the normalized key function (corresponding to a resonance 1:1:1). As the demonstration models the functionality of action for the ordinary differential equation of the sixth order is used. Examples are given of branches of critical points. Approach to classifications of branches is described. It is based on splitting extremals in subsets having the fixed values of the Morse index and on the description of adjunctions of critical points.

**Keywords:** smooth functionality; extremal; the circular symmetry; resonance; branching modeling; Lyapunov-Schmidt method.

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей статье дано описание методики приближенного вычисления нормализованных ключевых функций и их использования в задаче о моделировании ветвления периодических экстремалей гладкого функционала (действия) вблизи точки минимума. Периодические экстремали такого функционала служат прототипами периодических колебаний динамических систем, сегнетоэлектрических фаз кристаллов, нелинейных периодических волн и т.д. Изучение бифуркации циклов ряда динамических систем посредством ключевых уравнений и ключевых функций было недавно проведено в работах Б.М.Даринского, Е.В. Деруновой, А.П. Карповой, Н.А. Копытина и Ю.И. Сапронова в случаях двойных резонансов  $p_1 : p_2 : p_3$ ,  $p_1 < p_2 < p_3$  (см. [1]–[4]).

Основное внимание уделено мало изученному случаю  $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ . В качестве демонстрационной модели рассмотрено ОДУ шестого порядка

$$\frac{d^6 w}{dt^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dt^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dt^2} + a_1 w + U \left( w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2 w}{dt^2}, \dots, \frac{d^6 w}{dt^6} \right) = 0, \quad (1)$$

$U(w, w_1, w_2, \dots, w_6) = O(w^2 + w_1^2 + \dots + w_6^2)$ . Под двойным резонансом (типа  $p_1 : p_2 : p_3$ ) уравнения (1) подразумевается существование (для соответствующего линеаризованного ОДУ) трех периодических решений  $\exp\left(\frac{2\pi i p_k}{T} t\right)$ ,  $T > 0$ ,  $p_k \in \mathbb{Z}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3$ ,  $HOD(p_1, p_2, p_3) = 1$ . Резонанс  $p_1 : p_2 : p_3$  называется сильным, если существует такой ненулевой набор целых чисел  $n_1, n_2, n_3$ , что  $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0$  и  $|n_1| + |n_2| + |n_3| \leq 4$ . Число  $|n_1| + |n_2| + |n_3|$  называется порядком резонансного соотношения  $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0$ . Число, наименьшее из порядков резонансных соотношений, называется порядком данного резонанса. Резонансные соотношения порядка  $\geq 5$  называются слабыми. Резонанс, для которого существует сильное резонансное соотношение, называется сильным, и слабым — в противном случае.

Ниже предполагается, что  $T = 2\pi$  и  $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ . Базовое предположение — условие потенциальности: уравнение (1) служит уравнением Эйлера-Пуассона экстремалей функционала действия  $V(w, a) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{d^3 w}{dt^3} \right)^2 - a_3 \left( \frac{d^2 w}{dt^2} \right)^2 + a_2 \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 - a_1 w^2 \right) + \mathcal{U} \right) dt, \quad (2)$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U} \left( w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2 w}{dt^2}, \frac{d^3 w}{dt^3} \right),$$

$\mathcal{U}(w, w_1, w_2, w_3) = o(w^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$ . Функционал  $V$  рассмотрен на пространстве  $E$ , состоящем из  $2\pi$ -периодических функций класса  $C^6$  со значениями в области вещественных чисел.

В [2]–[4] были приведены списки систем образующих алгебраических инвариантов для ортогонального действия окружности на  $\mathbb{R}^6$  и, как следствие, нормальные формы главных частот ключевых функций в случае двойных резонансов порядков. В данной работе рассмотрен

случай наиболее сильного двойного резонанса  $1 : 1 : 1$ . Предложенная схема опирается на работы [3]-[5] и на вариационную версию метода Ляпунова-Шмидта, в соответствии с которой численное и качественное описание бифуркации циклов сводится к анализу ветвления критических точек ключевой функции

$$W(\xi, a) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, a) = V \left( \sum_{i=1}^6 \xi_i e_i + \Phi(\xi) \right) \quad (3)$$

от шести ключевых переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$  ( $e_1, e_2, \dots, e_6$  — моды бифуркации).

Некоторые бифуркационные эффекты в случае резонанса  $1:1$  были ранее изучены В.В. Стрыгиным и его учениками методами теории усреднений в рамках задачи синхронизации динамических систем [6].

Представленные в данной статье нормальные формы трехмерных особенностей не входят в известные списки особенностей [7].

## 2. КЛЮЧЕВЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСРЕДСТВОМ НЕЛИНЕЙНОЙ РИТЦЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Опишем кратко практическую схему (локальной) редукции к функции (3). Будем рассматривать  $2\pi$ -периодические экстремали. Пусть  $f(x, a)$  — правая часть уравнения (1), рассмотренного в паре банаховых пространств  $E, F$ ,  $E := \Pi_{2\pi}^6, F := \Pi_{2\pi}^0$  — пространства  $2\pi$ -периодических функций классов  $C^6$  и, соответственно,  $C^0$ . Пусть  $H := L_2[0, 2\pi]$  — (гильбертово) пространство функций на отрезке  $[0, 2\pi]$  с суммируемым квадратом (со скалярным произведением  $\langle u, v \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} uv dt$ ). Очевидно, что  $E$  непрерывно вложено в  $F$ ,  $F$  непрерывно и плотно вложено в  $H$  и  $E$  плотно в  $H$ . В приложениях достаточно вычислить лишь несколько первых членов разложения  $W$  в ряд Тейлора. В локальных задачах для этого используется специальным образом подобранная ритцевская аппроксимация функционала  $V$  по модам  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — функция

$$W_R(\xi) = V \left( \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Экстремалиам  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$  функции  $W$  соответствуют точки  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i$ , называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей  $V$ . Точность ритцевских аппроксимаций повышается за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» ритцевские аппроксимации вида  $W(\xi) = V \left( \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi) \right)$ , где  $\Phi$  — гладкое отображение из  $N := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$  в  $N^\perp$  (ортогональное дополнение к  $N$  в  $H$ ), то можно достигнуть любой точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы [1].

Ниже рассмотрен случай локализации параметров:  $a_k = \bar{a}_k + \delta_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , где

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = (p_1^2 p_2^2 p_3^2, p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2, p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

(для резонанса  $p_1 : p_2 : p_3$ ),  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  — малые параметры. После пересечения точкой  $(a_1, a_2, a_3)$  характеристической плоскости (в пространстве параметров  $\mathbb{R}^3$ ) происходит смена значения индекс Морса в начале координат. Характеристические плоскости задаются посредством линейного уравнения

$$\frac{d^6 h}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 h}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 h}{dx^2} + a_1 h = 0 \quad (4)$$

и состоят из тех и только тех точек  $a = (a_1, a_2, a_3)$ , для которых уравнение (4) имеет ненулевое  $2\pi$ -периодическое решение. Поиск таких точек приводит к характеристическому уравнению  $-\lambda^6 + a_3\lambda^4 - a_2\lambda^2 + a_1 = 0$ . Если найдены три линейно независимых  $2\pi$ -периодических решения линеаризованного уравнения, то из последнего уравнения получаем  $\lambda^2 = n^2$ ,  $n \in \{p_1, p_2, p_3\}$ ,  $p_j \in \mathbb{N}$ ,  $p_1 < p_2 < p_3$ . Соотношение  $a_0 = a_2n^2 - a_1n^4 + n^6$  задает характеристическую плоскость  $L_n$ . Огибающая поверхность  $L$  семейства характеристических плоскостей  $L_n$  ограничивает область изменения параметров, для которой функционал действия имеет в нуле точку минимума. При пересечении точкой  $a = (a_1, a_2, a_3)$  поверхности  $L_n$  происходит бифуркация рождения (уничтожения) экстремалей в нуле. Пересечение поверхности  $L$  приводит либо к одномерной бифуркации из нуля с парой двойственных мод  $e_{2n-1} = \sqrt{2}\cos(nt)$ ,  $e_{2n} = \sqrt{2}\sin(nt)$ , либо к двумерной бифуркации с модами  $e_{2n-1}, e_{2n}, e_{2m-1}, e_{2m}$ , либо к трехмерной бифуркации с модами  $e_{2n-1}, e_{2n}, e_{2m-1}, e_{2m}, e_{2l-1}, e_{2l}$ . Характеристические плоскости  $L_m, L_n, L_l$ , отвечающие произвольной тройке попарно различных натуральных чисел  $m, n, l$ , пересекаются по единственной точке  $(a_1, a_2, a_3) = (n^2 + m^2 + l^2, n^2m^2 + m^2l^2 + n^2l^2, n^2m^2l^2)$ . Для иллюстрации рассмотрим важный для приложений случай:  $\mathcal{U}\left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}, \frac{d^3w}{dt^3}\right) = \frac{w^4}{4}$ ,  $m = 1, n = 2, l = 3$ . После подстановки функции  $u = \sum_{k=1}^6 \xi_k e_k$  в интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{d^3w}{dx^3} \right)^2 - a_3 \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + a_2 \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 - a_1 w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dt$$

получим следующее выражение для ключевой функции (3)

$$W = \widetilde{W}^{(4)} + \frac{1}{2} (\lambda_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \lambda_2 (\xi_3^2 + \xi_4^2) + \lambda_3 (\xi_5^2 + \xi_6^2)) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где  $\lambda_1 = c(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3)$ ,  $\lambda_2 = c(\delta_1 - 16\delta_2 + 4\delta_3)$ ,  $\lambda_3 = c(\delta_1 - 81\delta_2 + 9\delta_3)$ ,  $c - \text{const}$ .

Проверка основана на прямом вычислении главной части ключевой функции (вычисление проведено в среде Maple). Если в трех плоскостях  $\{\xi_1, \xi_2\}$ ,  $\{\xi_3, \xi_4\}$ , и  $\{\xi_5, \xi_6\}$  ввести полярные координаты:  $\xi_{2k-1} = r_k \cos(\varphi_k)$ ,  $\xi_{2k} = r_k \sin(\varphi_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , и провести редукцию по угловым переменным  $\varphi_k$ :  $\widehat{W}(r) := \text{extr}_{\varphi} W(\xi)$ , то получим редуцированную ключевую функцию:

$$\widehat{W}(r) = \sum_{j=1}^3 r_j^4 + 4(r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2) - \frac{4}{3} r_1^3 r_3 + 4r_1 r_2^2 r_3 + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^3 \lambda_j r_j^2 \right) + o(|r|^4) + O(|r|^4)O(\delta).$$

Мономиальное слагаемое  $\frac{4}{3} r_1^3 r_3$  в этом полиноме можно уничтожить нормализующей линейной заменой координат [7].

### 3. ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ ТРЕХМОДОВОЙ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ

В общем случае ключевая функция имеет следующий вид

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^3 \delta_k I_k \right) + \frac{1}{4} \left( \sum_{k=1}^3 A_k I_k^2 + 2 \sum_{k,j=1}^3 B_{k,j} I_k^2 I_j^2 \right) + J + o(\|\xi\|^4),$$

где  $I_k = \xi_{2k-1}^2 + \xi_{2k}^2$  — стандартные инварианты, а  $J$  — линейная комбинация всех дополнительных (кроме стандартных  $I_k$ ) образующих инвариантов степени  $\leq 4$  — для рассматриваемого действия окружности на  $\mathbb{R}^6 \cong \mathbb{C}^3$ :

$$\{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(i p_1 \varphi) z_1, \exp(i p_2 \varphi) z_2, \exp(i p_3 \varphi) z_3). \tag{5}$$

Если обратиться к комплексной форме многочленов от переменных  $z_k := \xi_{2k-1} + \xi_{2k} i$ , то инвариантами действия окружности будут многочлены  $I_k = |z_k|^2$ ,  $k = 1, 2, 3$ , (стандартные инварианты степени 2). Кроме того, имеются (см. [3]) следующие инварианты степеней 3 и 4 (в левой колонке указаны типы резонансов):

Таблица 1.

1 : 2 : 3	$\bar{z}_1^2 z_2, \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3, \bar{z}_1 \bar{z}_3 z_2^2, \bar{z}_1^3 z_3$
1 : 2 : 4	$\bar{z}_1^2 z_2, \bar{z}_2^2 z_3, \bar{z}_1^2 \bar{z}_2 z_3$
1 : 2 : 5	$\bar{z}_1^2 z_2, \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 z_3$
1 : 2 : 6	$\bar{z}_1^2 z_2, \bar{z}_2^3 z_3$
1 : 3 : 4	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3$
1 : 3 : 5	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_1^2 \bar{z}_2 z_3$
1 : 3 : 6	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_2^2 z_3$
1 : 3 : 7	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 z_3$
1 : 3 : 9	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_2^3 z_3$
$p : q : p + q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3$
$p : q : 2p + q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\bar{z}_1^2 \bar{z}_2 z_3$
$p : q : p + 2q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\bar{z}_1 \bar{z}_2^2 z_3$
$p : 2p : q, p + q \geq 8, p, q \geq 1$	$\bar{z}_1^2 z_2$
$p : q : 2q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\bar{z}_2^2 z_3$
$p : 3p : q, p + q \geq 9, p, q \geq 1$	$\bar{z}_1^3 z_2$
$p : q : 3q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\bar{z}_2^3 z_3$

В случае  $p : q : r, p + q \geq 5, p + r \geq 5, q + r \geq 5$  дополнительных инвариантов степеней 3 и 4 нет.

Перейдя к полярным координатам  $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$ , получим ключевую функцию в виде  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{P} + o(\|r\|^4)$ , где  $\mathcal{W}_0 = \sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2$ ,  $\{a_{j,k}\}$  — структурные параметры,  $\mathcal{P}$  — некоторый полином четвертой степени от  $r$  с коэффициентами, зависящими от  $\varphi$ ,  $\delta_j$  — малый параметр. От угловых переменных можно избавиться посредством вторичной редукции к функции  $\mathcal{U}(r)$ :

$$\mathcal{U}(r) := \text{extr}_{\varphi} \mathcal{W}(r, \varphi) = \mathcal{W}_0 + \mathcal{P}_0 + O(\|r\|^4)O(\delta) + o(\|r\|^4). \quad (6)$$

После исключения угловых переменных  $\varphi_k$  получается функция  $\mathcal{U}(r)$ , инвариантная относительно действия в  $\mathbb{R}^3$  группы «остаточной» симметрии  $G$ , порожденной исходным действием окружности в  $\mathbb{C}^3$ . Точнее, группа  $G$  порождена теми действиями (5), которые переводят стационарные (по  $\varphi$ ) подмногообразия (для  $\mathcal{W}(r, \varphi)$ ) в точно такие же подмногообразия.

Если функция  $\mathcal{U}(r)$  конечнократна <sup>1)</sup> (в точке минимума), то она приводится (см. [3]) посредством  $G$ -эквивариантной параметрической замены координат и переопределения параметров к следующей нормальной до четвертого порядка форме:

$$\sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + \mathcal{P}_0 + \frac{1}{2} (\delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2) + O(\|r\|^4)O(\delta) + o(\|r\|^4), \quad (7)$$

в которой слагаемое  $\mathcal{P}_0$  представлено следующей таблицей:

<sup>1)</sup> Условие конечнократности означает, что  $\dim \left( \mathbb{R}[[x_1, x_2, x_3]] / \left\langle \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_3} \right\rangle \right) < \infty$ , [1] — с. 8, [7].

Табл. 2.

$p_1 : p_2 : p_3$	$\mathcal{P}_0$
1 : 2 : 3	$br_1r_2^2r_3 + \varepsilon_1r_1r_2r_3 + \varepsilon_2r_1^2r_2$
1 : 2 : 4	$br_1^2r_2r_3 + \varepsilon_1r_1^2r_2 + \varepsilon_2r_2^2r_3$
1 : 2 : 5	$\varepsilon_1r_1^2r_2 + \varepsilon_2r_1r_2^2r_3$
1 : 2 : 6	$\varepsilon r_1^2r_2$
1 : 3 : 4	$\varepsilon r_1r_2r_3$
1 : 3 : 5	$\varepsilon r_1^2r_2r_3$
1 : 3 : 6	$\varepsilon r_2^2r_3$
1 : 3 : 7	$br_1r_2^2r_3$
1 : 3 : 9	0
$p : q : p + q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\varepsilon r_1r_2r_3$
$p : q : 2p + q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\varepsilon r_1^2r_2r_3$
$p : q : p + 2q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\varepsilon r_1r_2^2r_3$
$p : 2p : q, p + q \geq 8, p, q \geq 1$	$\varepsilon r_1^2r_2$
$p : q : 2q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\varepsilon r_2^2r_3$
$p : 3p : q, p + q \geq 9, p, q \geq 1$	0
$p : q : 3q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	0

(параметры  $\varepsilon_j$  являются малыми),  $G$  — группа остаточной симметрии.

Здесь учтено, что каждый моном  $r_j^3r_k, j \neq k$ , после проецирования в фактор

$$\mathbb{R}[[x_1, x_2, x_3]] / \left\langle \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \frac{\partial W}{\partial x_3} \right\rangle$$

(локальное кольцо  $min$ -особенности [7]) попадает в линейную оболочку мономов  $r_j^2r_k^2, j \neq k$ , и  $r_j^2r_kr_l, j \neq k \neq l \neq j$ .

#### 4. ПРИМЕРЫ

Примеры нормализованных ключевых функций приведены в [1], [3]. Остановимся на некоторых из них.

В случае резонанса 1:2:4 ключевая функция, редуцированная по угловым переменным, приводится форме  $\sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + b r_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_2^2 r_3 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2 + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta)$ . Вычисление коэффициентов проводится по стандартному алгоритму. Сначала вычисляется тейлоровское приближение  $\widetilde{W}$  к ключевой функции до четвертого порядка (на пространстве ключевых переменных  $\mathbb{R}^6$ ). Затем в трех плоскостях парных мод бифуркации вводятся полярные координаты и у записанной в этих координатах тейлоровской аппроксимации  $\widetilde{W}$  ключевой функции определяются критические значения угловых переменных. После фиксирования этих значений угловых переменных получаем редуцированную главную часть в виде полинома  $\mathcal{W}$  четвертой степени от трех радиальных переменных. Процесс нормализации полученной функции  $\mathcal{W}$  опирается на теорему Дж. Мазера [7] об эквивалентности функции своей главной части (с учетом остаточной симметрии).

Для получения первых асимптотик (по  $\delta$ ) ветвей бифурцирующих экстремалей достаточно рассмотрения огрубленной ключевой функции  $\sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + b r_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_2^2 r_3 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2$ , (см. [1], с. 30-31).

В случае резонанса 1:2:3 ключевая функция  $\mathcal{W}$  приводится к форме  $\sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + b r_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1 r_1 r_2 r_3 + \varepsilon_2 r_1^2 r_2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2$ .

В случае резонанса  $p : 2p : q$ ,  $p + q \geq 8$ , после замены  $r_1^2 = y_1$ ,  $r_2 = y_2$ ,  $r_3^2 = y_3$  получим функцию (с угловой особенностью [8])  $\tilde{U} = y_1^2 + y_2^4 + y_3^2 + a_{1,2}y_1y_2^2 + a_{1,3}y_1y_3 + a_{2,3}y_2^2y_3 + \varepsilon y_1y_2 + \delta_1y_1 + \delta_2y_2^2 + \delta_3y_3$ . Ее анализ проведен в [1].

В случае слабого резонанса  $p : q : r$ , после замены  $r_1^2 = y_1$ ,  $r_2^2 = y_2$ ,  $r_3^2 = y_3$  (для редуцированной и нормализованной ключевой функции), получим функцию с главной частью  $\widehat{U}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + ay_1y_2 + by_1y_3 + cy_2y_3 + \delta_1y_1 + \delta_2y_2 + \delta_3y_3$  в положительном октанте  $\{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\}$  (с угловой особенностью [1], [8]). Анализ этой функции проведен в [9].

## 5. СЛУЧАЙ РЕЗОНАНСА 1:1:1

В случае резонанса 1:1:1 получим полином  $W(\xi)$  (отрезок ряда Тейлора ключевой функции порядка 4), эквивариантный относительно стандартного действия окружности на  $\mathbb{R}^6$ . Если отождествить вектор  $\xi \in \mathbb{R}^6$  с комплексным вектором  $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ ,  $z_1 = \xi_1 + i\xi_2$ ,  $z_2 = \xi_3 + i\xi_4$ ,  $z_3 = \xi_5 + i\xi_6$ , то это действие окружности задается соответствием  $\mathcal{T} : \{\exp(i\varphi), z\} \mapsto \exp(i\varphi)z$ . Инвариантность означает выполнение соотношения  $W(\mathcal{T}_\varphi(\xi)) = W(\xi) \forall \{\xi, \varphi\}$ . Если положить  $\mathcal{U}(z) := W(\xi)$ , то будем иметь соотношение  $\mathcal{U}(\exp(it)z) = \mathcal{U}(z) \forall t, z$ . Отсюда получаем следующее представление для квадратичной части:  $\mathcal{U}(z)^{(2)} = \sum_{j,k} a_{j,k}z_j\bar{z}_k$ ,  $a_{j,k} = \bar{a}_{k,j} \in \mathbb{C}$ . Для квартичной части  $\mathcal{U}(z)^{(4)}$  имеем  $\sum_{j,k} \beta_{j,k}|z_j|^2|z_k|^2 + \mathcal{R}(z) + \overline{\mathcal{R}(z)}$ ,  $\mathcal{R}(z) := c_1\bar{z}_1^2z_2z_3 + c_2z_1\bar{z}_2^2z_3 + c_3z_1z_2\bar{z}_3^2$ ,  $\beta_{j,k} \in \mathbb{R}$ ,  $c_j \in \mathbb{C}$ . Нетрудно проверить, что каждая стационарная по угловым переменным  $\varphi_j$  точка регулярна по этим переменным. После их исключения (см. (6)) получим редуцированный вещественный полином

$$\widehat{U}(r) := \text{extr}_\varphi \mathcal{U}(z), \tag{8}$$

для которого верно следующее утверждение:

**Теорема.** Для главной части вторично редуцированной ключевой функции (8) имеет место следующее представление:

$$\widehat{U}(r) = \sum_{j,k} \alpha_{j,k}r_jr_k + \sum_{j,k} \beta_{j,k}r_j^2r_k^2 + \gamma_1r_1^2r_2r_3 + \gamma_2r_1r_2^2r_3 + \gamma_3r_1r_2r_3^2.$$

где  $\alpha_{j,k}$ ,  $\beta_{j,k}$ ,  $\gamma_j$  — некоторые вещественные константы.

Из нуля рождается не более 26 ветвей ненулевых критических точек полинома  $\widehat{U}(r)$  (так как кратность нулевой критической точки «общего» квартичного полинома равна 27) и не менее 6 ветвей. Возможные расклады бифурцирующих критических точек можно классифицировать, разбивая их на подгруппы с одинаковыми индексами Морса <sup>2)</sup> [1].

Важнейший для приложений случай связан с условием положительной определенности квадратичной части. Посредством масштабирующих преобразований переменных этот случай сводится к ситуации, в которой  $\sum_{j,k} \alpha_{j,k}r_jr_k = \lambda \sum_j r_j^2$ . Поиск и анализ критических точек

функции  $\widehat{U}(r)$  сводится в этом случае к анализу критических точек сужения  $\widehat{U}(r) \Big|_{S^2}$  на сферу  $S^2 = \{r \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1\}$ .

Из теории Морса известно (см. [10]), что каждую гладкую функцию  $W$  на гладком многообразии  $M$ , имеющую лишь морсовские критические точки, можно «закодировать» клеточным комплексом, каждая клетка размерности  $k$  которого взаимно однозначно соответствует критической точке индекса Морса  $k$  функции  $W$ . Взаимные примыкания клеток в комплексе соответствуют взаимным примыканиям критических точек (как особых точек динамической

<sup>2)</sup> Индекс Морса равен количеству собственных значений матрицы Гессе (якобиана градиента) функции в критической точке, имеющих отрицательные вещественные части.

системы  $\dot{\xi} = -grad W(\xi)$ . Гомотопический тип кодирующего комплекса совпадает с гомотопическим типом многообразия  $M$ . Из этого факта вытекает, что наборы стационарных точек функций на плоскости и на двумерных поверхностях изображаются графами (одномерными остовами клеточных комплексов). Если функция  $W$  коэрцитивна, то кодирующий комплекс гомотопически тривиален (гомотопен точке) и, следовательно, связан.

Кодирующий клеточный комплекс определяется своим одномерным остовом (кодирующим графом). Вершины графа взаимно однозначно соответствуют точкам минимумов, а ребра — седлам. При этом две вершины соединяются ребром тогда и только тогда, когда существует кривая, соединяющая соответствующую им пару точек минимумов, составленная из пары линий кратчайшего спуска (интегральных кривых поля градиентов), связывающих пары «седло — минимум» (малым шевелением функции (или метрики) можно добиться того, чтобы каждая интегральная кривая, вытекающая из седла, втекала в точку локального минимума). Двумерные грани соответствуют точкам максимума. За счет изменения метрики в областях вида  $\{c_1 < W < c_2\}$ , не содержащих критических точек, можно переносить финальные точки сепаратрис из одних локальных минимумов на другие (то есть сепаратрисы будут втекать в иные точки локальных минимумов). За счет таких переключений можно получать разнообразные соединения ребрами вершин в пределах одного расклада стационарных точек (примеры приведены в [1]). Можно переносить финальные точки сепаратрис из одних локальных минимумов на другие (то есть сепаратрисы будут втекать в другие точки локальных минимумов). За счет таких переключений можно получать разнообразные соединения ребрами вершин в пределах одного расклада стационарных точек. Переключениям сепаратрис соответствуют гомологические преобразования графа. Если граф  $\hat{\Gamma}$  получен из графа  $\Gamma$  через последовательность следующих трех операций: 1) удаление любого ребра, соединяющего пару внутренних (некраевых) вершин  $A, B$ , 2) склеивание оставшихся (после удаления ребра) частей графа по вершинам  $A, B$  (за точкой стыка сохраним обозначение  $A$ ) и 3) приклеивание к точке стыка  $A$  нового «висячего» ребра (вторая вершина приклеенного ребра — краевая точка), то будем говорить, что граф  $\hat{\Gamma}$  получен из графа  $\Gamma$  прямым гомологическим преобразованием, а граф  $\Gamma$  получен из  $\hat{\Gamma}$  обратным гомологическим преобразованием. Если граф  $\tilde{\Gamma}$  получен из графа  $\Gamma$  через конечную последовательность прямых и обратных гомологических преобразований, то графы  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$  называются гомологически эквивалентными (или, более кратко, гомологичными). Гомологические преобразования сохраняют количества вершин и ребер графа.

Ниже кодирующие графы указаны с точностью до гомологической эквивалентности.

Пусть  $l_0, l_1$  и  $l_2$  — количества минимумов, седел и максимумов. Тогда, в силу известной формулы Эйлера (см. [10]), имеем соотношением  $l_0 - l_1 + l_2 = 2$ . Из четности квартичного полинома получаем четность чисел  $l_j$ :  $l_j = 2m_j$ ,  $m_j \in \mathbb{Z}$ . Для чисел  $m_j$  имеем соотношения  $m_0 - m_1 + m_2 = 1$  (формула Эйлера) и  $m_0 + m_1 + m_2 = m$ , где  $l = 2m$  — количество всех критических точек. Следовательно,  $m$  нечетно:  $m = 2m_1 + 1$ . Таким образом, возможные значения  $m$  суть следующие числа: 3, 5, 7, 9, 11, 13. Соответственно, общее количество критических точек квартичной формы на сфере исчерпывается значениями 6, 10, 14, 18, 22, 26.

Так как полином  $\hat{U}(r)$  четен, то для изображения его линий уровней и критических точек достаточно рассмотреть соответствующим образом подобранную полусферу, которую можно естественно отождествить с кругом на плоскости.

Большинство реализаций линий уровней (соответствующим различным раскладам) можно получить через рассмотрение полинома

$$U(r_1, r_2, r_3) = r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 + a_1 r_2^2 r_3^2 + a_1 r_2^2 r_3^2 + a_2 r_1^2 r_3^2 + a_3 r_1^2 r_2^2 + b r_1 r_2 r_3^2.$$

Критические точки  $U$  на экваторе  $\{r_3 = 0\}$  сферы  $S^2$  и их характер определяются (в силу четности  $U$  по третьей переменной) полиномом  $U(r_1, r_2, 0) = r_1^4 + r_2^4 + a_3 r_1^2 r_2^2 + a_3 r_1^2 r_2^2 -$

сужением полинома  $U$  на экватор. На полусфере  $\{r_3 > 0\}$  критические точки  $U$  определяются сужением  $U$  на полусферу или, что эквивалентно, полиномом четвертой степени от двух переменных  $W(r_1, r_2) := U(r_1, r_2, \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2})$ . Описание критических точек и линий уровня такого полинома можно найти в [1], [11] (см. рис. 1).

Часть бифуркационных примыканий фазовых портретов полинома  $W(r_1, r_2)$ , вызванные

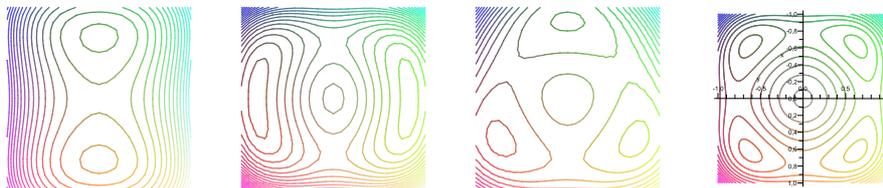


Рис. 1. Линии уровней полинома  $W(r_1, r_2)$ .

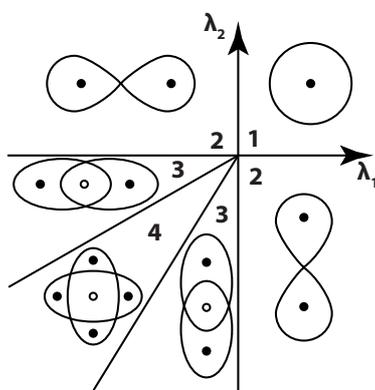


Рис. 2. Диаграмма примыканий фазовых портретов полинома  $W(r_1, r_2)$ .

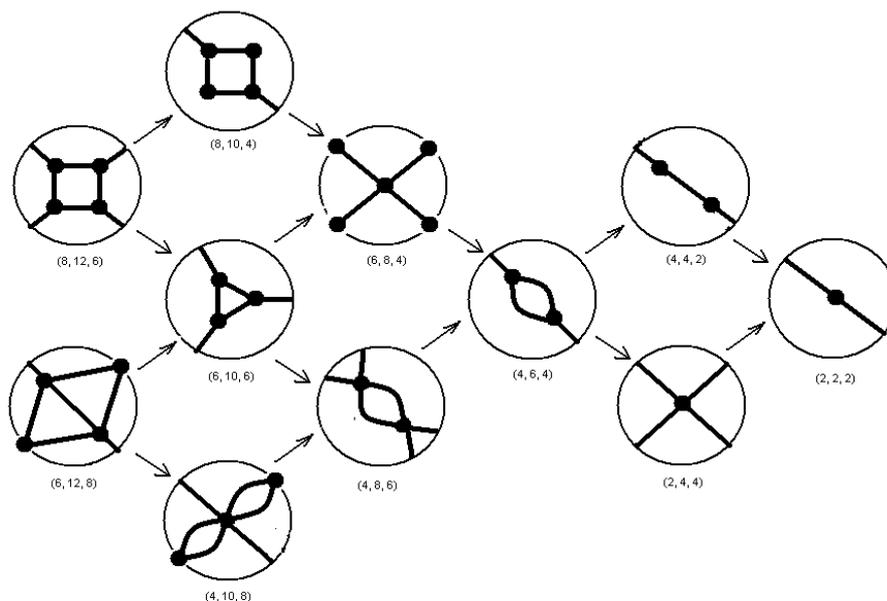


Рис. 3. Диаграмма примыканий кодирующих графов (на полусфере).

изменением коэффициентов  $\lambda_1, \lambda_2$  в квадратичной части, можно проследить по следующей диаграмме примыканий.

Аналогичным образом можно проследить и другие примыкания. На основе таких диаграмм можно получить полное изображение кодирующих графов (комплексов), отвечающих типовым раскладам  $l = \{l_0, l_1, l_2\}$ . На рисунке 3 приведена диаграмма примыканий кодирующих графов. Стрелками на ней отмечены те примыкания, которым соответствуют бифуркации исчезновения или рождения критических точек.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.
2. Карпова, А. П. Резонансные бифуркации решений фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и нелинейная динамика / А. П. Карпова, Ю. И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 184–194.
3. Дерунова, Е. В. Трехмодовые бифуркации экстремалей из точки минимума фредгольмова функционала в условиях круговой симметрии / Е. В. Дерунова, Ю. И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 64–77.
4. Даринский, Б. М. Ветвление сегнетоэлектрических фаз неоднородного кристалла вблизи критической фазы с трехмерной особенностью шестого порядка / Б. М. Даринский, И. В. Колесникова, Ю. И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 1. — С. 101–107.
5. Зачепа, А. В. О бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из вырожденной точки минимума с особенностью 3–мерной сборки / А. В. Зачепа, Ю. И. Сапронов // Труды математического факультета (новая серия). — 2005. — вып. 9. — С. 57–71.
6. Стрыгин, В. В. Бифуркация малых синхронных автоколебаний двух динамических систем с близкими частотами / В. В. Стрыгин, Г. Ю. Северин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2006. — № 2. — С. 36–45.
7. Арнольд, В.И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде // М.: МЦНМО. 2004. - 672 с.
8. Siersma, D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc. / D. Siersma // Quart. J. Oxford Ser. V. 32, №125, 1981. - pp. 119-127.
9. Гнездилов, А. В. Бифуркации критических торков для функционалов с 3–круговой симметрией / А. В. Гнездилов // Функци. анализ. — 2000. — Т. 34, вып. 1. — С. 83–86.
10. Введение в топологию / Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко. — М. : Наука. Физматлит, 1995. — 416 с.
11. Костин, Д. В. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем / Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2012. — 207 с.

## REFERENCES

1. Darinskiy B.M., Saprionov Yu. I., Zarev S.L. Bifurcation of extremals of Fredholm functionals. [Darinskiy B.M., Saprionov Yu.I., Carev S.L. Bifurkacii e'kstremalej fredgol'movykh funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 12, pp. 3–140.
2. Karpova A.P., Saprionov Yu.I. Resonance bifurkation of solutions of Fredholm equations in terms of circular symmetric and nonlinear dinamic. [Karpova A.P., Saprionov Yu.I. Rezonansnye bifurkacii reshenij fredgol'movykh uravnenij s krugovoj simmetriiej i nelinejnaya dinamika]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of*

*Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, 2008, pp. 184–194.

3. Derunova E.V., Sapronov Yu.I. Three-mode extremals' bifurcations from the minimum point of Fredholm functional in terms of circular symmetric. [Derunova E.V., Sapronov Yu.I. Trexmodovye bifurkacii e'kstremalej iz točki minimuma fredgol'mova funkcionala v usloviyax krugovoj simmetrii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 64–77.

4. Darinskiy B.M., Kolesnikova I.V., Sapronov Yu. I. Branching of crystal phases crystal. [Darinskiy B.M., Kolesnikova I.V., Sapronov Yu.I. Vetvlenie segnetoe'lektricheskix faz neodnorodnogo kristalla vblizi kriticheskoj fazy s trexmernoj osobennost'yu shestogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 1, pp. 101–107.

5. Zacheпа A.V., Sapronov Yu.I. The bifurcation of extremals Fredholm functional from a degenerate minimum point with feature 3–dimensional assembly. [Zacheпа A.V., Sapronov Yu.I. O bifurkacii e'kstremalej fredgol'mova funkcionala iz vyrozhdennoj točki minimuma s osobennost'yu 3–mernoj sborki]. *Trudy matematicheskogo fakul'teta (novaya seriya) — Proceedings of the Faculty of Mathematics (new series)*, 2005, iss. 9, pp. 57–71.

6. Strygin V.V., Severin G.Yu. Bifurcation of self-oscillations of small synchronous two dynamical systems with similar frequencies. [Strygin V.V., Severin G.Yu. Bifurkaciya malyx sinxronnyx avtokolebanij dvux dinamicheskix sistem s blizkimi chastotami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii — Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems analysis and information technologies*, 2006, no. 2, pp. 36–45.

7. Arnold V.I., Varchenko A.N., Husein-Zade S.M. Features differentiable maps. Classification of critical points caustics and wave fronts. [Arnol'd V.I., Varchenko A.N., Gusejn-Zade S.M. Osobennosti differenciruemyx otobrazhenij]. Moscow, 2004, 672 p.

8. Siersma D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc. *Quart. J. Oxford Ser.*, 1981, vol. 32, no. 125, pp. 119–127.

9. Gnezdilov A.V. Bifurcation of critical tori for functionals with 3–circular symmetry. [Gnezdilov A.V. Bifurkacii kriticheskix torov dlya funkcionalov s 3–krugovoj simmetriej]. *Funkc. analiz — Function analysis*, 2000, vol. 34, no. 1, pp. 83–86.

10. Borisovich Yu.G., Bliznaykov N.M., Izreleevich Ya.A., Fomenko T.N. Introduction to Topology. [Borisovich Yu.G., Bliznyakov N.M., Izrailevich Ya.A., Fomenko T.N. Vvedenie v topologiyu]. Moscow, 1995, 416 p.

11. Kostin D.V., Sapronov Yu.I. Function analysis and poli-mode bifurcations of elastic systems. [Kostin D.V., Sapronov Yu.I. Funkcional'nyj analiz i mnogomodovye progiby uprugix sistem]. Voronezh: VSU, 2012, 207 p.

*Бухонова Екатерина Владимировна, аспирант, кафедра математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация*  
*E-mail: ekaterina.vladimirova@atos.net*

*Bukhonova E.V., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*  
*E-mail: ekaterina.vladimirova@atos.net*

*Даринский Борис Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры материаловедения и индустрии наносистем, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация*  
*E-mail: darinskii@mail.ru*

*Darinskii B.M., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*  
*E-mail: darinskii@mail.ru*

*Сапронов Юрий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация*  
*E-mail: yusapr@mail.ru*

*Sapronov Yu.I., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*  
*E-mail: yusapr@mail.ru*