УДК 517.95; 517.984

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ДВУХТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ*

М. Ш. Бурлуцкая, С. А. Чередникова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.03.2015 г.

Аннотация. В работе получено классическое решение смешанной задачи для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией в случае двухточечных краевых условий общего вида. В случае симметричного потенциала решение найдено в явном виде. В случае произвольного потенциала получены уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи, на базе которых проводится обоснование применения метода Фурье. Использованы приемы, позволяющие преобразовать ряд, представляющий формальное решение по методу Фурье, и доказать возможность его почленного дифференцирования. При этом на начальные данные задачи накладываются минимальные требования.

Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение.

THE CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE EQUATION WITH INVOLUTION AND TWO-POINT BOUNDARY CONDITIONS

M. Sh. Burlutskaya, S. A. Cherednikova

Abstract. In this paper a classical solution of the mixed problem for a first order differential equation with involution in the case of two-point boundary conditions of general form is obtained. In the case of symmetric potential solution is found explicitly. For the case arbitrary potential using the received refined asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding spectral problem, the application of the Fourier method is substantiated. We used techniques, which allow to transform a series representing the formal solution on Fourier method, and to prove the possibility of his term by term differentiation. At the same time on the initial data of the problem minimum requirements are imposed.

Keywords: mixed problem, involution, Fourier method, classical solution.

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \quad t \in (-\infty,+\infty),\ x \in [0,1], \tag{1}$$

$$u(0,t) = \gamma u(1,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14–01–00867).

где β — вещественное число, $q(x) \in C^1[0,1]$ — вещественная функция, γ — комплексное число.

Уравнение (1) представляет собой простейшее уравнение в частных производных, содержащее инволюцию $\vartheta(x) = 1 - x$ (то есть такое отображение, что $\vartheta(\vartheta(x)) = x$).

Будем искать классическое решение этой задачи, то есть функцию, непрерывно дифференцируемую по обеим переменным и удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2) – (3).

При решении задачи методом Фурье используются методы из [1]–[3] с привлечением идей по ускорению сходимости рядов Фурье [4]–[5]. При этом к функции $\varphi(x)$ предъявляются минимальные требования для существования классического решения: $\varphi(x) \in C^1[0,1]$,

$$\varphi(0) = \gamma\varphi(1), \qquad \varphi'(1) = \gamma\varphi'(0). \tag{4}$$

Отметим, что соотношения (4) необходимо следуют из постановки задачи.

В данной работе результаты, полученные в [1]–[3] для краевых условий частного вида, обобщаются на случай двухточечного краевого условия самого общего вида.

Согласно методу Фурье, положив в уравнении (1) $u(x,t) = y(x)T(t)$, получим следующую спектральную задачу для $y(x)$:

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{5}$$

$$y(0) = \gamma y(1), \tag{6}$$

а для $T(t)$ имеем $T(t) = e^{\lambda\beta it}$.

Введем оператор L, порожденный задачей (5)–(6):

$$Ly(x) = y'(1-x) + q(x)y(x), \quad y(0) = \gamma y(1).$$

Всюду далее в работе считаем выполненным условие регулярности по Биркгофу для оператора L:

$$\gamma^2 + 1 \neq 0. \tag{7}$$

Следуя [3], эталонной будем называть задачу, в которой $q(x)$ заменяется на $q_0(x) = \frac{1}{2}[q(x) + q(1-x)]$. Соответствующий оператор будем обозначать L_0.

Также как в [1, лемма 12] получим

Лемма 1. *Число λ является собственным значением, а $y(x)$ собственной функцией краевой задачи (5)-(6) тогда и только тогда, когда $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T = (y(x), y(1-x))^T$ является ненулевым решением матричного уравнения*

$$Bz'(x) + Q(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{8}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1-x) \end{pmatrix},$
удовлетворяющего условиям

$$z_1(0) = \gamma z_1(1), \quad z_1(1/2) = z_2(1/2). \tag{9}$$

Лемма 2. *Замена $z(x) = \Gamma v(x)$, где $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ приводит уравнение (8) к виду:*

$$v'(x) + Q_1(x)v(x) = \lambda Dv(x), \tag{10}$$

где $D = \Gamma^{-1}B^{-1}\Gamma = \operatorname{diag}(-i, i)$, $Q_1(x) = \Gamma^{-1}B^{-1}Q(x)\Gamma$.

1. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С СИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Сначала исследуем эталонную задачу, когда в (1) $q(x)$ заменяется на $q_0(x)$. В этом случае потенциал обладает свойством симметрии $q_0(x) = q_0(1-x)$, что позволяет получить явную формулу для решения задачи. Отметим, что здесь достаточно требовать всего лишь непрерывности $q(x)$.

Соответствующая матрица $Q_1(x)$ в (10) диагональна, и (10) распадается на систему двух уравнений. Решая ее, получим [1, Лемма 2], что общее решение уравнения (5) (с $q_0(x)$) имеет вид

$$y(x) = (u(1-x)e^{\lambda i(1-x)} - iu(x)e^{\lambda ix})C,$$

где $u(x) = e^{-i\int_0^x q_0(t)dt}$, C — произвольная постоянная. Подчиняя его условию (6), получим

Лемма 3. *Собственные значения λ_n^0 оператора L_0 простые и имеют вид $\lambda_n^0{=}2\pi n{+}a$, $n \in \mathbb{Z}$, где $a = \int\limits_0^1 q_0(t)dt - i\ln\frac{i+\gamma}{1+i\gamma}$ (под $\ln z$ понимается главное значение $\mathrm{Ln} z$, при $\arg z \in [-\pi;\pi]$), а собственными функциями являются*

$$y_n^0(x) = p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix},$$

где $p(x) = e^{i(ax-\int_0^x q_0(\tau)\,d\tau)} = u(x)e^{iax}$.

Оператор L_0 не является самосопряженным. Сопряженный оператор имеет вид $L_0^* z = z'(1-x) + q_0(x)z(x)$, $z(0) = \overline{\gamma}z(1)$, его собственные значения есть $\overline{\lambda_n^0}$, а собственные функции $z_n^0(x)$ получаются из $y_n^0(x)$ заменой $p(x)$ на $\widetilde{p}(x) = u(x)e^{\overline{a}ix}$.

Также как в [2, Лемма 4] доказывается

Лемма 4. *Системы $y_n^0(x)$, $z_n^0(x)$ являются полными в $L_2[0,1]$, и $(y_n^0(x), z_n^0(x)) = N$, где $N = \frac{1-e^{-2\mathrm{Im}a}}{2\mathrm{Im}a}$.*

Лемма 5. *Функция $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = \gamma\varphi(1)$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на отрезке $[0,1]$ ряд Фурье:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\varphi, z_n^0\right) y_n^0(x).$$

Доказательство. Пусть вещественное число μ_0 не является собственным значением. Тогда существует резольвента $R_{\mu_0}^{0*} = (L_0^* - \mu_0 E)^{-1}$ оператора L_0^*. Из соотношения $L_0{}^* z_n^0 = \overline{\lambda_n^0} z_n^0$ имеем:

$$R_{\mu_0}^{0*} z_n^0 = \frac{z_n^0}{(\overline{\lambda_n^0} - \mu_0)}.$$

Обозначим $(L_0 - \mu_0)\varphi = g$, откуда $\varphi = R_{\mu_0}^0 g$. Тогда

$$(\varphi, z_n^0) = (R_{\mu_0}^0 g, z_n^0) = (g, R_{\mu_0}^{0*} z_n^0) = \frac{1}{\lambda_n^0 - \mu_0}(g, z_n^0), \tag{11}$$

где $g(x)$ — непрерывная функция.

В силу равномерной ограниченности $y_n^0(x)$, из (11) и неравенства Коши-Буняковского получаем:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}\left|(\varphi, z_n^0)y_n^0(x)\right| \leqslant C\sum_{n_1}^{n_2}\frac{|(g, z_n^0)|}{|\lambda_n^0 - \mu_0|} \leqslant C\sqrt{\sum_{n_1}^{n_2}\frac{1}{|\lambda_n^0 - \mu_0|^2}}\sqrt{\sum_{n_1}^{n_2}|(g, z_n^0)|^2}. \tag{12}$$

Так как $\frac{1}{\lambda_n^0-\mu_0} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, а $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |(g, z_n^0)|^2 < \infty$, то отсюда из (12) получаем абсолютную и равномерную сходимость ряда. $\square$

Лемма 6. *Положим* $f_0(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi nix}$, *где* $c_n = \frac{1}{N}(\varphi, z_n^0)$. *Тогда* $f_0(x)$ *— непрерывно дифференцируема на всей оси, периодическая с периодом 1, причем*

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\right], \quad \textit{при } x \in [0,1]. \tag{13}$$

Доказательство. Согласно лемме 5, ряд $\sum |c_n|$ сходится. Поэтому ряд, представляющий $f_0(x)$ равномерно сходится, откуда следует непрерывность функции $f_0(x)$ при $x \in (-\infty, \infty)$.

Преобразуем ряд, представляющий $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum c_n y_n(x) = \sum c_n(p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}) =$$

$$= p(1-x)\sum c_n e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)\sum c_n e^{2\pi nix}.$$

Отсюда

$$\varphi(x) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x), \tag{14}$$

где $x \in [0,1]$.

Выполнив в (14) замену x на $(1-x)$, и разрешив полученную систему относительно $f_0(x)$, получим:

$$i\varphi(x) + \varphi(1-x) = 2p(x)f_0(x). \tag{15}$$

откуда

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}[\varphi(1-x) + i\varphi(x)]. \tag{16}$$

Таким образом, формула (16) дает явное представление суммы ряда при $x \in [0,1]$ и однозначно определяет функцию $f_0(x)$ на всей числовой оси за счет периодичности.

Теперь докажем дифференцируемость. Так как $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция на $[0,1]$ и в крайних точках существуют односторонние производные, то и $f_0(x)$ тоже дифференцируема на $[0,1]$, а в силу периодичности, и на всей числовой прямой, за исключением точек $x = k$, $k \in Z$. Для доказательства дифференцируемости в этих точках достаточно показать, что

$$f_0'(0+0) = f_0'(0-0). \tag{17}$$

Дифференцируя (15), при $x \in [0,1]$ получим:

$$i\varphi'(x) - \varphi'(1-x) = 2(p'(x)f_0(x) + p(x)f_0'(x)).$$

Рассмотрим полученное равенство при $x \to 0+0$, $x \to 1-0$:

$$i\varphi'(0) - \varphi'(1) = 2(p'(0)f_0(0+0) + p(0)f_0'(0+0)),$$

$$i\varphi'(1) - \varphi'(0) = 2(p'(1)f_0(1-0) + p(1)f_0'(1-0)).$$

Вычисляя $p(0) = 1$; $p(1) = u(1)e^{ai} = \frac{i+\gamma}{1+\gamma i}$;
$p'(x) = u'(x)e^{aix} + u(x)(ai)e^{aix} = iu(x)e^{aix}(a - q_0(x)) = ip(x)(a - q_0(x))$,
$p'(0) = (a - q_0(0))ip(0) = (a - q_0(0))i$;
$p'(1) = (a - q_0(1))ip(1) = (a - q_0(0))ip(1)$ (так как $q_0(0) = q_1(1)$), и учитывая непрерывность и периодичность $f_0(x)$, получим:

$$i\varphi'(0) - \varphi'(1) = 2i(a - q_0(0))f_0(0) + 2f_0'(0+0)),$$

$$i\varphi'(1) - \varphi'(0) = 2(a - q_0(0))ip(1)f_0(0) + 2p(1)f_0'(0-0)).$$

Отсюда

$$-[1 + ip(1)]\varphi'(0) + [i + p(1)]\varphi'(1) = 2p(1)[-f_0'(0+0) + f_0'(0-0)]. \tag{18}$$

Учитывая соотношение $\gamma\varphi'(0) = \varphi'(1)$, получим в левой части (18) равенство нулю, откуда следует (17). $\square$

Формальное решение задачи (1)–(3) есть

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n y_n^0(x) e^{\lambda_n \beta i t}, \qquad c_n = N^{-1}\left(\varphi_n, z_n^0\right). \tag{19}$$

Преобразуя этот ряд также как в [3], получим:

Теорема 1. *Пусть*

1) $q_0(x)$ *— вещественная и непрерывная функция и* $q_0(x) = q_0(1-x)$*;*

2) $\varphi(x) \in C^1[0,1]$ *и удовлетворяет условиям* (4).

Тогда решение задачи (1) − (3) *существует и имеет вид:*

$$u(x,t) = \Big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\Big]e^{ai\beta t}, \tag{20}$$

где $f_0(x)$ *— непрерывная, дифференцируемая, периодичная, с периодом* $T = 1$*, функция, которая при* $x \in [0,1]$ *определена по формуле:*

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}[\varphi(1-x) - i\varphi(x)].$$

2. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА. ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Вернемся к рассмотрению нашей задачи, когда $q(x) \in C^1[0,1]$ — произвольная несимметричная функция.

Также, как в [6], на базе уточненной асимптотики общего решения уравнения (10), и учитывая, что $\int\limits_0^1 q(t)\,dt = \int\limits_0^1 q_0(t)\,dt$, получим:

1) Собственные значения λ_n оператора L, достаточно большие по модулю, простые, причем имеют следующую уточненную асимптотику

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots$$

где λ_n^0 определяется также как в лемме 3, через α обозначаются различные константы, не зависящие от n (из конечного набора констант), через α_n такие константы, что $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$, n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число.

2) Соответствующие собственные функции имеют асимптотику

$$y_n(x) = y_n^0(x) + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $y_n^0(x)$ определяется также как в лемме 3, и

$$\Omega_{1n}(x) = \frac{1}{n}\left[b(x)e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)e^{\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{\lambda_n^0 ix}\right],$$

$$\Omega_{2n}(x) = \frac{1}{n}\Big[b(x)\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_1'\left(\tfrac{x+t}{2}\right)dt + b(x)\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_1'\left(\tfrac{x-t}{2}\right)dt +$$
$$+ b(x)\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_2'\left(\tfrac{x+t}{2}\right)dt + b(x)\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_2'\left(\tfrac{x-t}{2}\right)dt\Big],$$

(через $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора). Здесь $q_k(x)$ определяются через элементы матрицы $Q(x)$ (см. [6]).

Аналогичные асимптотические формулы справедливы и для собственных функций оператора L^*.

В силу [7, Теорема 3] следует

Теорема 2. *Для любой функции $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, удовлетворяющей условиям (4), при выполнении (7) имеем*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |\varphi(x) - S_r(\varphi, x)| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $\varphi(x)$ по собственным функциям оператора L.

3. РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Согласно методу Фурье формальное решение задачи представим в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi(x))e^{\lambda\beta it}d\lambda + \sum_{|n|>n_0} c_n y_n(x) e^{\lambda_n \beta it},$$

где r таково, что все собственные значения, для которых $|n| \leqslant n_0$ попадают в контур $|\lambda| = r$, R_λ — резольвента оператора L. Коэффициенты в $\sum\limits_{|n|>n_0} c_n y_n(x) e^{\lambda_n \beta it}$ имеют недостаточную оценку для того, чтобы ряд можно было почленно дифференцировать. Поэтому, согласно [3] преобразуем ряд следующим образом.

Пусть $q_0(x) = \frac{q(x)+q(1-x)}{2}$. Тогда $q_0(x) = q_0(1-x)$. Для такой $q_0(x)$ решение задачи (1) – (3) получено в п. 1. Соответствующий ряд формального решения обозначим через Σ_0, а полученное в теореме 1 решение обозначим $u_0(x,t)$. Представим $u(x,t)$ в виде $u(x,t) = u_0(x,t) + u(x,t) - \Sigma_0$, или

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \left(\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)\varphi(x)\right)e^{\lambda\beta it}d\lambda, \tag{21}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[c_n y_n(x) e^{\lambda_n\beta it} - c_n^0 y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta it}\right], \tag{22}$$

R_λ^0 — резольвента оператора L_0.

Также как, например, в [3, Лемма 12] устанавливается, что для $u_2(x,t)$ справедлива формула

$$u_2(x,t)=\sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(g,z_n)\,y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}}{(y_n,z_n)\lambda_n}-\frac{(g,z_n^0)\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{(y_n^0,z_n^0)\lambda_n^0}\right]+\sum_{|\lambda_n|>r}\frac{(g_2,z_n^0)\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{(y_n^0,z_n^0)\,(\lambda_n^0)^2},\qquad(23)$$

где $g=L\varphi$, $g_1=g-L_0\varphi$, $g_2=L_0g_1$ (здесь g_1 из области определения оператора L_0, так как $q(x)\in C^1[0,1]$).

Лемма 7. *Ряды в (23) и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по x и t, равномерно сходятся по $x\in[0,1]$ и $t\in[-A,A]$, где $A>0$ и любое.*

Теорема 3. *Если $q(x)$ вещественна, $q(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi(0)=\gamma\varphi(1)$, $\varphi'(1)=\gamma\varphi'(0)$, то классическое решение задачи (1)-(3) существует и имеет вид:*

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_0(x,t),$$

где $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ определены по формулам (21), (22), а $u_0(x,t)$ по формуле (20).

Доказательство. По доказанному из вышеизложенного $u(x,t)$ дифференцируема по обеим переменным. Легко проверяется, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (2)–(3). Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет (1). Обозначим составляющие в (21), (22) через u_{kj}, т.е. $u_1=u_{11}-u_{12}$, $u_2=u_{21}-u_{22}$. Тогда очевидно, что

$$u_{11}+u_{21}=u,\qquad u_{12}+u_{22}=\Sigma_0.\qquad(24)$$

Обозначим через Du следующее дифференциальное выражение

$$Du=\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial\xi}\right|_{\xi=1-x}.$$

Тогда имеем

$$Du=Du_1+Du_2+Du_0=Du_{11}-Du_{12}+Du_2+Du_0.\qquad(25)$$

Но $Du_0=q_0(x)u_0$, $Du_1=Du_{11}-Du_{12}=q(x)u_{11}-q_0(x)u_{12}$,

$$Du_2=\sum_{|\lambda_n|>r}\left[q(x)c_ny_n(x)e^{\lambda_n\beta it}-q_0(x)c_n^0y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}\right].$$

Поэтому из (24) и (25) получаем $Du_1+Du_2=q(x)u-q_0(x)\Sigma_0$, а значит

$$Du=q(x)u-q_0(x)\Sigma_0+q_0(x)u_0=q(x)u.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлуцкая, М. Ш. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Докл. РАН. — 2010. — Т. 435, № 2. — С. 151–154.

2. Бурлуцкая, М. Ш. О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 2.26–33

3. Бурлуцкая, М. Ш. О смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями / М. Ш. Бурлуцкая // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 1. — С. 3–12.

4. Крылов, А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах / А. Н. Крылов. — Л. : ГИТТЛ, 1950. — 368 с.

5. Чернятин, В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В. А. Чернятин. — М. : Изд–во МГУ, 1991. — 112 с.

6. Бурлуцкая, М. Ш. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 2. — С. 64–72.

7. Бурлуцкая, М. Ш. Теорема Жордана-Дирихле для функционально-дифференциального оператора с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, вып. 3. — С. 9–14.

8. Баев, А. Д. Теоремы о "следах" для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 63–75.

9. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

REFERENCES

1. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Classical solution of a mixed problem with involution. [Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Klassicheskoe reshenie dlya smeshannoy zadachi s involyutsiey]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2010, vol. 82. no. 3, pp. 865–868.

2. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. On the classical solution of the mixed problem for a first-order equation with involution. [Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. O klassicheskom reshenii smeshannoy zadachi dlya uravneniya pervogo poryadka s involyutsiey]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 26–33.

3. Burlutskaya M.S. Mixed problem for a first-order partial differential equation with involution and periodic boundary conditions. [Burlutskaya M.Sh. O smeshannoy zadache dlya uravneniya pervogo poryadka s involyutsiey i s periodicheskimi kraevyimi usloviyami]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 3–12.

4. Krylov A.N. On some differential equations of mathematical physics with applications in technical matters. [Krylov A.N. O nekotorykh differentsial'nykh uravneniiakh matematicheskoi fiziki, imeiushchikh prilozheniia v tekhnicheskikh voprosakh]. Leningrad, GITTL, 1950, 368 p. .

5. Chernyatin V.A. Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations. [Chernyatin V.A. Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991, 112 p.

6. Burlutskaya M.Sh. Asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions of a functional differential operator with involution. [Burlutskaya M.Sh. Asimptoticheskie formulyi dlya sobstvennyih znacheniy i sobstvennyih funktsiy funktsionalno-differentsialnogo operatora s involyutsiey]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 2, pp. 64–72.

7. Burlutskaya M.Sh. Jordan-Dirichlet theorem for a functional-differential operator with involution. [Burlutskaya M. Sh. Teorema Zhordana-Dirihle dlya funktsionalno-differentsialnogo operatora s involyutsiey]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, iss. 3, pp. 9–14.

8. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Davidova M.B. Theorems about the «trecas» for a class of pseudodifferential operators with degeneracy. [Baev A.D., Kovalevskij R.A., Davydova M.B.

Teoremy o "sledax" dlya odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 63–75.

9. Baev A.D., Kobylinskii P.A., Davidova M.B. On the Properties of Switching a Class of Degenerate Pseudo-Differential Operators with the Operators Of Differentiation. [Baev A.D., Kobylinskij P.A., Davydova M.B. O svojstvax kommutacii odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov s operatorami differencirovaniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 102–108.

Бурлуцкая Мария Шаукатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Воронежского госуниверситета, Воронеж, Россия
E-mail: bmsh2001@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Burlutskaya Maria Shaukatovna, candidate of science, Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: bmsh2001@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Чередникова Светлана Алексеевна, магистрант кафедры математического анализа Воронежского госуниверситета, Воронеж, Россия
E-mail: chsa06@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Cherednikova Svetlana Alekseevna, undergraduate, Chair of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: chsa06@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90