УДК 517.956

О КОМПОЗИЦИИ И ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

А. Д. Баев, Н. И. Работинская

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 30.04.2016 г.

Аннотация. Статья посвящена исследованию свойств нового класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом. Псевдодифференциальные операторы, рассмотренные в статье, построены по специальному интегральному преобразованию, переводящему производные с весом в операцию умножения. Потребность в таких псевдодифференциальных операторах возникла при исследовании краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений. В статье доказана теорема об ограниченности рассмотренных псевдодифференциальных уравнений в специальных функциональных пространствах типа пространств С. Л. Соболева. Также доказана теорема о композиции этих псевдодифференциальных операторов.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, преобразование Фурье, композиция операторов, пространство С. Л. Соболева.

ON THE COMPOSITION AND LIMITATION OF A CLASS OF DEGENERATE PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS

A. D. Baev, N. I. Rabotinsky

Abstract. The article investigates the properties of a new class of weighted pseudo-differential operators with variable symbol. Pseudo-differential operators, discussed in the article, is built on a special integral transformation carrying the weight of the derivatives in the operation of multiplication. The need for such pseudo-operators emerged in the study of boundary value problems for degenerate differential equations. In this article we prove a theorem on boundedness considered pseudo-differential equations in functional spaces of special types of spaces of S. L. Sobolev. Also a theorem on the composition of the pseudo-differential operators.

Keywords: Pseudodifferential operator, transformation of Fourier, composition of operators, space of S. L. Sobolev.

---

* Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 16–11–10125, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений одна из главных трудностей связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу и О. А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [3] и М. И. Вишика [4]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при “степенном” характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [5] [6]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [7], [8], Х. Леопольдом [9], С. З. Левендорским [10]. Отметим, что существенным условием работы [10] является условие принадлежности основной весовой функции $\alpha(t)$ пространству $C^{\infty}(R^1)$.

Дальнейшее развитие теории коэрцитивной разрешимости вырождающихся уравнений потребовало развития теории псевдодифференциальных операторов. Одним из направлений развития этой теории стало исследование весовых псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [11]. Исследование весовых псевдодифференциальных операторов с постоянным символом позволило доказать коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании решений общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (см. [11]). Изучение новых классов весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом позволило исследовать новые классы вырождающихся уравнений высокого порядка (см. [12], [13]).

В настоящей статье получены теоремы об ограниченности и композиции нового класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМ

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Следуя [11] введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1.1}$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Преобразование (1.1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{1.2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\, \|u\|_{L_2(R^1_+)}. \tag{1.3}$$

Это равенство позволяет расширить преобразование (1.1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1, 2, ...,\ \text{где} \quad D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s – действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha,p} = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta. \tag{1.4}$$

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0, 1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где

$$N \geqslant \max_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \frac{l}{2}\},\ l = 1,\ 2...,$$

σ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1.1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{1.5}$$

Определение 2. Будем говорить, что символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+,\ \sigma \in \mathrm{R}^1, 0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, если функция $\lambda(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2, ...,\ \ l = 0,\ 1,\ 2, ...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^l_\eta\lambda(t,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-\rho l+\delta j} \tag{1.6}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1},\ \ \eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ - произвольный отрезок.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $K(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ и $Q(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda(t,\xi,\eta)$ и $q(t,\xi,\eta)$, принадлежащими соответственно классам*

$S^{m_1}_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$ и $S^{m_2}_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$ (m_1 и m_2 — действительные числа), $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = \max\{m_1, m_2\}$. Тогда для любого $N \geqslant 0$ существует такое $N_1 > 0$ и такой символ $T_{N_1}(t,\xi,\eta) \in S^{-N}_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, что справедливо равенство

$$K(t,D_x,D_{\alpha,t})Q(p,t,D_x,D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1-1} R_j(t,D_x,D_{\alpha,t}) = T_{N_1}(t,D_x,D_{\alpha,t}), \tag{1.7}$$

где $T_{N_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $T_{N_1}(t,\xi,\eta)$; $R_j(t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(t,\xi,\eta) = \frac{1}{j!}\partial^j_\eta \lambda(t,\xi,\eta)\cdot(\alpha(t)\partial_t)^j q(t,\xi,\eta). \tag{1.8}$$

Теорема 2. *Пусть $\lambda(t,\xi,\eta) \in S^m_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega), m$ — действительное число. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = m$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $K(t,D_x,D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(R^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.*

2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ О КОМПОЗИЦИИ ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим весовые псевдодифференциальные операторы вида

$$K(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = F^{-1}_\alpha[\lambda(t,\xi,\eta)F_\alpha[u]], \tag{2.1}$$

$$Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = F^{-1}_\alpha[q(t,\xi,\eta)F_\alpha[u]] \tag{2.2}$$

и рассмотрим композицию этих операторов.

Учитывая определение преобразования F_α, запишем оператор $Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)$ в виде

$$Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\sqrt{\alpha(t)}\; u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}]]_{\tau=\varphi(t)}.$$

Тогда справедливо равенство

$$K(t,\xi,D_{\alpha,t})Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]]]_{\tau=\varphi(t)}.$$

Из этого равенства выводим равенство

$$K(t,\xi,D_{\alpha,t})Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} K(\tau,\xi,D_\tau)Q(\tau,\xi,D_\tau)[u_\alpha(\tau)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}, \tag{2.3}$$

где

$$K(\tau,\xi,D_\tau)u(\tau) = F^{-1}_{\eta\to\tau}[\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u(\tau)]], \tag{2.4}$$

$t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Определение 2.1. Будем говорить, что символ $\lambda(\tau,\xi,\eta)$ принадлежит при всех $\xi \in R^{n-1}$ классу символов $S^m_{\rho,\delta}(\Omega_1)$, где $\sigma \in \mathrm{R}^1, 0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, m — действительное число, $\Omega_1 \subset R^1$, если функция $\lambda(\tau,\xi,\eta)$ принадлежит пространству $C^\infty(\Omega_1)$ по переменной τ и пространству $C^\infty(R^1)$ по переменной η. При этом для всех $j,l = 0,1,2,...$ справедливы оценки

$$\left|\partial^j_\tau \partial^l_\eta \lambda(\tau,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{jl}(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(m-\rho l+\delta j)} \tag{2.5}$$

при всех $\tau \in R^1$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$ с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от τ, ξ, η.

Заметим, что справедливо равенство

$$(-\alpha(t)\partial_t)^j \lambda(t,\xi,\eta\,)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)} = \partial_\tau^j \lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta). \tag{2.6}$$

Из этого равенства и условия $\lambda(t,\xi,\eta) \in S^{m_1}_{\alpha,\rho,\delta}$ выводим оценки

$$\left|\partial_\tau^j \partial_\eta^l \lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\right| \leqslant c_j(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(m_1-\rho l+\delta j)} \tag{2.7}$$

с константами $c_j > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1$.

Из (2.6) и (2.7) следует, что если $\lambda(t,\xi,\eta) \in S^{m_1}_{\alpha,\rho,\delta}$, то

$$\widetilde{\lambda}(\tau,\xi,\eta) = \lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \in S^{m_1}_{\rho,\delta}. \tag{2.8}$$

Обозначим через B^∞ совокупность таких бесконечно дифференцируемых функций $f(\tau)$ на R^1, что $f(\tau)$и все её производные ограничены на R^1.

Назовем ядром оператора $K(\tau,\xi,D_\tau)$ функцию

$$k(\tau,\xi,z) = F^{-1}_{\eta\to z}[\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]. \tag{2.9}$$

По аналогии с работой [14] докажем следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \in S^m_{\rho,\delta}$ (m — действительное число), $f(\tau) \in B^\infty$. Тогда функция*

$$h(\tau,\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau,\xi,\tau-y)e^{-i(y-\tau)\xi} f(y)dy \tag{2.10}$$

при $\eta \to \infty$ допускает асимптотическое разложение

$$h(\tau,\xi,\eta) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i)^j}{j!}\partial_\eta^j \lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\cdot f^{(j)}(\tau).$$

Здесь $f^{(j)}(\tau)$ — производная порядка j от функции $f(\tau)$. При этом для любых $N > 0$ найдется $N_1 > 0$, что функция

$$T_{N_1}(\tau,\xi,\eta) = h(\tau,\xi,\eta) - \sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{(i)^j}{j!}\partial_\eta^j \lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\cdot f^{(j)}(\tau) \tag{2.11}$$

принадлежит классу $S^{-N}_{\rho,\delta}$.

Доказательство. Заметим, что равенство (2.10) можно записать в виде

$$h(\tau,\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau,\xi,z)f(\tau-z)e^{iz\eta}dz. \tag{2.12}$$

Разложив функцию $f(\tau-z)$ по формуле Тейлора в окрестности точки τ, получим равенство

$$f(\tau-z) = \sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\tau)(-z)^j + g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}, \tag{2.13}$$

где

$$g_{N_1}(\tau,z) = \frac{(-1)^{N_1}}{(N_1-1)!}\int_0^1 f^{(N_1)}(\tau-\theta z)(1-\theta)^{N_1-1}d\theta.$$

Из (2.13) и (2.12), выводим равенство

$$h(\tau,\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{N_1-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\tau,\xi,z)\cdot\frac{1}{j!}(-z)^j f^{(j)}(\tau)e^{iz\eta}dz+\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\tau,\xi,z)\cdot g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz. \quad (2.14)$$

Так как

$$(-z)^j k(\tau,\xi,\eta)=(i)^j F^{-1}_{\eta\to z}[\partial^j_\eta\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)],$$

то из (2.14) получим равенство

$$h(p,\tau,\xi,z)=\sum_{j=0}^{N_1-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(i)^j\cdot\frac{1}{j!}F^{-1}_{\eta\to z}[\partial^j_\eta\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]f^{(j)}(\tau)e^{iz\eta}dz+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(p,\tau,\xi,z)g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz=\sum_{j=0}^{N_1-1}\frac{(i)^j}{j!}\partial^j_\eta\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)f^{(j)}(\tau)+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k(p,\tau,\xi,z)g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz.$$

Отсюда следует, что

$$T_{N_1}(p,\tau,\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(p,\tau,\xi,z)g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz. \quad (2.15)$$

Обозначим $k_{N_1}(\tau,\xi,z)=k(\tau,\xi,z)\cdot z^{N_1}$. Тогда справедливо равенство

$$k_{N_1}(\tau,\xi,z)=z^{N_1}F^{-1}_{\eta\to z}[\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]=F^{-1}_{\eta\to z}[(\frac{1}{i}\partial_\eta)^{N_1}\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]. \quad (2.16)$$

Из (2.8), (2.15) и (2.16) при $N_1\geqslant N+m$ выводим утверждение леммы 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть $K(t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $Q(t,\xi,D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda(t,\xi,\eta)$ и $q(t,\xi,\eta)$, принадлежащими соответственно классам $S^{m_1}_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$ и $S^{m_2}_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)(m_1,m_2$ — действительные числа). $\Omega\in\bar{R}^1_+$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma=\max\{m_1,m_2\}$. Тогда для любого $N\geqslant 0$ существует такое $N_1>0$ и такой символ $T_{N_1}(t,\xi,\eta)\in S^{-N}_\alpha$, что справедливо равенство*

$$K(t,\xi,D_{\alpha,t})Q(t,\xi,D_{\alpha,t})-\sum_{j=1}^{N_1-1}R_j(t,\xi,D_{\alpha,t})=T_{N_1}(t,\xi,D_{\alpha,t}), \quad (2.17)$$

где $T_{N_1}(t,\xi,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор вида (2.1) с символом $T_{N_1}(t,\xi,\eta).R_j(t,\xi,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(t,\xi,\eta)=\frac{1}{j!}\partial^j_\eta\lambda(t,\xi,\eta)\cdot(\alpha(t)\partial_t)^j q(t,\xi,\eta). \quad (2.18)$$

Доказательство. Пусть $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$, из определения весового псевдодифференциального оператора выводим равенство

$$K(t,\xi,D_{\alpha,t})Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}K(\tau,\xi,D_\tau)Q(\tau,\xi,D_\tau)[u_\alpha(\tau)]=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}K(\tau,\xi,D_\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}\widetilde{u}(\eta)d\eta, \quad (2.19)$$

где $\widetilde{u}(\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$.

Из этого равенства выводим равенство

$$K(t,\xi,D_{\alpha,t})Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[e^{i\tau\xi}K(\tau,\xi,D_\tau)[q(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}]]e^{-i\tau\xi}\cdot\widetilde{u}(\tau)d\tau.$$

Из этого равенства следует, что символом оператора $K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ является функция $e^{i\tau\xi}K(p,\tau,\xi,D_\tau)[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}]$, которую можно представить, как $r(p,\tau,\xi,\eta,\eta)$, где $r(p,\tau,\xi,\eta,y) = \int k(p,\tau,\xi,\tau-y)q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i(y-\tau)\xi}dy$.

Утверждение теоремы 2.1 следует теперь из леммы 2.1.

Утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает теперь из теоремы 2.1.

3. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Заметим, что справедливо равенство

$$\|K(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)\|^2_{L_2(R^1_+)} = \\ = \left\|F^{-1}_{\eta\to\tau}[\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]\right\|^2_{L_2(R^1)} = \|K(\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\|^2_{L_2(R^1)}. \quad (3.1)$$

Таким образом, норма оператора $K(t,\xi,D_{\alpha,t})$ в пространстве $L_2(R^1_+)$ равна норме оператора $K(\tau,\xi,D_\tau)$, определённого в (2.4), в пространстве $L_2(R^1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $\lambda(t,\xi,\eta)\in S^0_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+$. *Пусть выполнено условие 1 при* $\sigma=0$. *Тогда существует такая константа* $c>0$, *не зависящая от* t,ξ,u, *что для любой функции* $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ *справедлива оценка*

$$\|K(t,\xi,D_{\alpha,t})u\|_{L_2(R^1_+)} \leqslant c\,\|u\|_{L_2(R^1_+)} \quad (3.2)$$

Доказательство. Докажем вначале теорему 3.1 при следующем дополнительном предположении. Будем считать, что $\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)=0$ при $|\tau-a|>A$, где $A>0$ — некоторое число, $a\in R^1$.

Рассмотрим равенство

$$f(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\eta}\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]d\eta.$$

Перейдем в этом равенстве к преобразованию Фурье, получим равенство

$$\widetilde{f}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\lambda}_1(z-\eta,\xi,\eta)\widetilde{u}_\alpha(\eta)d\eta, \quad (3.3)$$

где $\lambda_1(\tau,\xi,\eta)=\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)$, $\widetilde{\lambda}_1(z,\xi,\eta)=F_{\tau\to z}[\lambda_1(\tau,\xi,\eta)]$, $\widetilde{u}_\alpha(\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$.

С помощью интегрирования по частям в интеграле

$$\widetilde{\lambda}_1(z,\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z}\lambda_1(\tau,\xi,\eta)d\tau$$

легко устанавливается, что с некоторыми константами $c > 0$ выполняются неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widetilde{\lambda}_1(z-\eta,\xi,\eta)\right| d\eta \leqslant c \int \frac{d\eta}{(1+|\eta|)^2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widetilde{\lambda}_1(z-\eta,\xi,\eta)\right| dz \leqslant c \int \frac{dz}{(1+|z|)^2}.$$

Отсюда и из (3.3) получаем оценку

$$\left\|\widetilde{f}(z)\right\|_{L_2(R^1)} \leqslant c \left\|u_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)}. \tag{3.4}$$

Заметив, что

$$\left\|u_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)} = \left\|u(t)\right\|_{L_2(R^1_+)}, \tag{3.5}$$

получаем из (3.4) утверждение теоремы 3.1 при дополнительном предположении.

Докажем теорему 3.1 в общем случае. Выберем некоторое $A > 0$ и установим, что для любого $a \in R^1$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{|\tau-a|\leqslant A} |K(\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)|^2 d\tau \leqslant c\{ \int\limits_{|\tau-a|\leqslant 3A} |u_\alpha(\tau)|^2 \, d\tau + \int\limits_{|\tau-a|\leqslant A} (\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau-y)\,|u(y)|\, dy)^2 d\tau\}, \tag{3.6}$$

где $g(z) = (1+|z|)^{-2}$. Константа c не зависит от выбора функции $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ и $a \in R^1$. Пусть $\varphi(\tau)$ — такая основная функция с носителем в шаре $|\tau| \leqslant 3A$, что $\varphi(\tau) = 1$ в шаре $|\tau| \leqslant 2A$, причём, $|\varphi(\tau)| \leqslant 1$. Тогда для оператора $\varphi(\tau-a)K(\tau,\xi,D_\tau)$ символ равен нулю при $|\tau-a| > 3A$ и мы можем воспользоваться доказанной выше оценкой:

$$\left\|\varphi(\tau-a)K(\tau,\xi,D_\tau)v_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)} \leqslant c \left\|v_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)} = c \left\|v(t)\right\|_{L_2(R^1_+)}, \tag{3.7}$$

причём из предыдущих рассуждений видно, что c не зависит от $v(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$и $a \in R^1$.

Обозначим $f(\tau) = K(\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)$ и заметим, что при $|\tau-a| \leqslant 2A$ справедливо равенство

$$f(\tau) = \varphi(\tau-a)K(\tau,\xi,D_\tau)[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)] + K(\tau,\xi,D_\tau)[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)].$$

Из неравенства (3.7) выводим неравенство

$$\left\|\varphi(\tau-a)K(\tau,\xi,D_\tau)[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)]\right\|_{L_2(R^1)} \leqslant c \left\|\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)},$$

следовательно

$$\int\limits_{|\tau-a|\leqslant A} |\lambda(\tau,\xi,D_\tau)[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)]|^2 d\tau \leqslant c \int\limits_{|\tau-a|\leqslant 3A} |u_\alpha(\tau)|^2 \, d\tau. \tag{3.8}$$

Так как $1-\varphi(\tau-a)$=0 в шаре $|\tau-a| \leqslant 2A$, то

$$K(\tau,\xi,D_\tau)[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)] = \int\limits_{|y-a|>2A} k(\tau,\xi,\tau-y)(1-\varphi(y-a))u_\alpha(y)dy,$$

где $k(\tau,\xi,z)$ — ядро псевдодифференциального оператора $K(\tau,\xi,D_\tau)$, определенное в (2.9).

Из условия $\lambda(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \in S^m_{\rho,\delta}$ выводим

$$|K(\tau,\xi,D_\tau)[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)]| \leqslant c \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\tau-y|)^{-2}\,|u(y)|\, dy. \tag{3.9}$$

Неравенство (3.6) получается теперь из неравенств (3.8) и (3.9).

Чтобы закончить теперь доказательство теоремы, достаточно в неравенстве (3.6) выбрать $A = 1$ и просуммировать неравенства (3.6) по всем a, принадлежащим множеству целых чисел. Так как отрезки $|\tau - a| \leqslant 1$ покрывают все R^1, причем, каждая точка $\tau \in R^1$ принадлежит не более чем двум таким отрезкам, то получим, что с некоторой константой выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |P(\tau, \xi, D_\tau) u_\alpha(\tau)|^2 \, d\tau \leqslant c(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_\alpha(\tau)|^2 d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - y|)^{-2} \, |u_\alpha(y)| \, dy)^2 d\tau).$$

Остается заметить, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - y|)^{-2} \, |u_\alpha(y)| \, dy)^2 d\tau) \leqslant c \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_\alpha(\tau)|^2 \, d\tau = c \int\limits_{0}^{\infty} |u(t)|^2 \, dt. \tag{3.10}$$

Теорема 3.2. *Пусть* $\lambda(t, \xi, \eta) \in S^m_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$ *(m — действительное число),* $\Omega \subset \bar{R}^1_+$. *Пусть выполнено условие 1 при* $\sigma = m$. *Тогда весовой псевдодифференциальный оператор* $K(t, \xi, D_{\alpha,t})$ *для любого действительного* s *есть ограниченный оператор из* $H_{s+m,\alpha}(R^1_+)$ *в* $H_{s,\alpha}(R^1_+)$.

Доказательство. Из (3.1) вытекает, что для доказательства теоремы достаточно доказать, что оператор $K(\tau, \xi, D_\tau)$, определённый в (2.4), является ограниченным оператором из $H_{s+m}(R^1)$ в $H_s(R^1)$.

Обозначим через $\Lambda^s(D_\tau)$ псевдодифференциальный оператор вида

$$\Lambda^s(D_\tau) u_\alpha(\tau) = F^{-1}_{\eta \to \tau} [(1 + \eta^2)^{\frac{s}{2}} F_{\tau \to \eta} [u_\alpha(\tau)]]. \tag{3.11}$$

Заметим, что для функции $u(t) \in C^\infty_0(R^1_+)$ справедливо равенство

$$\|K(\tau, \xi, D_\tau) u_\alpha(\tau)\|_s = \left\| \Lambda^s(D_\tau) K(\tau, \xi, D_\tau) \Lambda^{-m-s}(D_\tau) v(\tau) \right\|_{L_2(R^1)}, \tag{3.12}$$

где $v(\tau) = \Lambda^{s+m}(D_\tau) u_\alpha(\tau)$, $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве $H_s(R^1)$, зависящая от параметра p.

Из теоремы 2.1 следует, что $\Lambda^s(D_\tau) K(\tau, \xi, D_\tau) \Lambda^{-m-s}(D_\tau)$ есть псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S^0_{\rho,\delta}$. Таким образом, из (3.12) в силу теоремы 3.1 получим

$$\|P(\tau, \xi, D_{\alpha,t}) u\|_{s,\alpha} = \|P(\tau, \xi, D_\tau) u_\alpha(\tau)\|_s \leqslant c \, \|v(\tau)\|_{L_2(R^1)} \leqslant c \, \|u(t)\|_{s+m,\alpha}.$$

Теорема 3.2 доказана.

Теорема 2 вытекает теперь из теоремы 3.2, если воспользоваться равенством Парсеваля и равенством (1.3).

Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, для весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом из класса $S^\sigma_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$ в случае $\rho = 1$, $\delta = 0$ доказаны в [12], [13], в случае $\rho = 1$, $\delta \in [0; 1)$ доказаны [15], а в случае переменного символа, зависящего еще от комплексного параметра доказаны в [16]. [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш, М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Олейник, О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885–887.

3. Михлин, С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун–та. — 1954. — № 8. — С. 19–48.

4. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сб. — 1954. — Т. 35 (77), вып. 33. — С. 513–568.

5. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сб. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

6. Вишик, М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. – Т. 25, вып. 4. — С. 29–56.

7. Глушко, В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. — 1978. — № 2. — С. 49–68.

8. Глушко, В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

9. Леопольд, Х. Г. Априорные оценки для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с невырождающейся второй производной / Х. Г. Леопольд. — Новосибирск, 1981. — 33 с. — Деп. в ВИНИТИ 29.08.81, № 4269–81.

10. Левендорский, С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С. З. Левендорский // Математический сборник. — 1980. — Т. 111 (153), № 4. — С. 483–501.

11. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

12. Баев, А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. — 240 с.

13. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

14. Грушин, В. В. Псевдодифференциальные операторы / В. В. Грушин. — М. : Моск. ин-т электронного машиностроения, 1975. — 107 с.

15. Баев, А. Д. Об одном классе весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 2. — С. 16–20.

16. Баев А.Д. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с вырождением / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 1–4.

17. Баев, А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

REFERENCES

1. Keldysh M.V. On certain cases of degeneration of equations of elliptic type on the boundary. [Keldysh M.V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravnenij e'llipticheskogo tipa na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

2. Oleinik O.A. On equations of elliptic type degenerating on the boundary. [Olejnik O.A. Ob uravneniyax e'llipticheskogo tipa, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1952, vol. 87, no. 6, pp. 885–887.

3. Mikhlin S.G. Degenerate elliptic equations. [Mixlin S.G. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie uravneniya]. *Vestn. Leningradskogo gos. un-ta — Vestn. Leningrad State. Univ*, 1954, no. 8, pp. 19–

48.

4. Vishik M.I. Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of the domain. [Vishik M.I. Kraevye zadachi dlya e'llipticheskix uravnenij, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1954, vol. 35 (77), iss. 33, pp. 513–568.

5. Vishik M.I., Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of the domain. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya e'llipticheskix uravnenij, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1969, vol. 80 (112), iss. 4, pp. 455–491.

6. Vishik M.I., Grushin V.V. degenerate elliptic differential and pseudodifferential operators. [Vishik M.I., Grushin V.V. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, iss. 4, pp. 29–56.

7. Glushko V.P. Theorems of solvability of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi: tr. seminara akad. S.L. Soboleva — Differential equations with partial derivatives: mp. Workshop Acad. Sobolev*, 1978, no. 2, pp. 49–68.

8. Glushko V.P. A priori estimates of solutions of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Apriornye ocenki reshenij kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Voronezh. gos. un-t., Voronezh, 1979, 47 s, Dep. v VINITI 27.03.79, № 1048–79 — Voronezh State University, Voronezh, 1979, 47 p, Department. in VINITI 27.03.79, no. 1048–79.*

9. Leopold H. G. Priori estimates for degenerate elliptic equations of higher order with noverojamas second derivative. [Leopol'd X.G. Apriornye ocenki dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka s nevyrozhdayushhejsya vtoroj proizvodnoj]. *Novosibirsk, 1981, 33 s., Dep. v VINITI 29.08.81, № 4269–81 — Novosibirsk, 1981, 33 p., Dept. in VINITI 29.08.81, no. 4269–81.*

10. Levendorskii S.Z. Boundary value problems in the half space for quasi-elliptic pseudodifferential operators degenerate on the boundary. [Levendorskij S.Z. Kraevye zadachi v poluprostranstve dlya kvazie'llipticheskix psevdodifferencial'nyx operatorov, vyrozhdayushhixsya na granice]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1980, vol. 111 (153), no. 4, pp. 483–501.

11. Baev A.D. Degenerate elliptic equations of higher order and their associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

12. Baev A.D. Qualitative methods of the theory of boundary value problems for degenerate elliptic equations. [Baev A.D. Kachestvennye metody teorii kraevyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij]. Voronezh: Voronezh State University, 2008, 240 p.

13. Baev A.D. On General boundary value problems in the half space for degenerate elliptic equations of high order. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

14. Grushin V.V. Pseudodifferential operators. [Grushin V.V. Psevdodifferencial'nye operatory]. Moscow: Moskow Institute of electronic engineering, 1975, 107 p.

15. Baev A.D., Sadchikov P.V. About the same weight class of pseudodifferential operators with variable symbol. [Baev A.D., Sadchikov P.V. Ob odnom klasse vesovyx psevdodifferencial'nyx operatorov s peremennym simvolom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta.*

Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2009, no. 2, pp. 16–20.

16. Baev A.D., Kowalewski R.A. On a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A.D., Kovalevskij R.A. Ob odnom klasse psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, no. 1, pp. 1–4.

17. Baev A.D., Kovalevsky R.A. Theorem on boundedness and compositions for one weight class of pseudodifferential operators. [Baev A.D., Kovalevskij R.A. Teoremy ob ogranichennosti i kompozicii dlya odnogo klassa vesovyx psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 39–49.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Работинская Н. И., аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
Тел.: +7(473)220–86–90

Rabotinsky N. I., Post-graduate student of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
Tel.: +7(473)220–86–90