

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ИСТОЧНИКА ЗВУКА В ОКЕАНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ЕГО ПОЛЯ

В. М. Кузькин¹, С. А. Пересёлков², Д. Ю. Просовецкий², И. В. Казначеев²

¹ — Институт Общей Физики РАН,

² — Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.06.2016 г.

Аннотация. Изложен подход по определению радиальной составляющей скорости источника, основанный на двукратном преобразовании Фурье интерференционной картины, формируемой движущимся источником звука. Получаемая спектrogramма содержит локализованные области спектральной плотности однотипных мод. Оценены размеры области локализации и распределение спектральной плотности. Обсужден вопрос о разрешении движущихся источников звука. Приведены результаты натурного эксперимента и рассмотрена помехоустойчивость решения задачи локализации источника звука на основе использования спектrogramмы.

Ключевые слова: гидроакустика, звуковое поле, широкополосный движущийся источник, интерференционная структура, гидролокация, преобразование Фурье.

ESTIMATION OF VELOCITY OF THE SOURCE OF THE SOUND IN THE OCEANIC WAVE GUIDE ON THE BASIS OF THE SPECTRAL ANALYSIS OF INTERFERENTIAL STRUCTURE OF ITS FIELD

V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, D. Y. Prosovetskiy, I. V. Kaznacheev

Abstract. The method of estimation of radial velocity of the moving source based on the double Fourier transform of the interference structure generated by a moving source of sound is presented. The received spectrogram contains the localized areas of spectral density of the same acoustic mode. The sizes of area of localization and distribution of spectral density are estimated. The question of resolution of moving sources of a sound is discussed. Results of natural experiment are given and the noise stability of the solution of a problem of localization of a source of a sound on the basis of use of the spectrogram is considered.

Keywords: hydroacoustics, sound field, moving broadband source, the interference structure, hydrolocation, Fourier transform.

1. ВВЕДЕНИЕ

В океанических волноводах акустические поля эффективно формируются группами однотипных мод [1], что обусловлено отсутствием корреляции между ними, вследствие чего их спектральные вклады аддитивны. В тесной связи с проблемой анализа интерференционной картины, базирующейся на понятии интерференционного инварианта [2], находится и вопрос о выделении таких групп мод. Это позволяет, с одной стороны, повысить контрастность интерференционной картины, формируемой каждой из них, а с другой стороны — усилить (или ослабить) доминирующее влияние океанических неоднородностей на вариации характеристик поля, формируемых однотипными модами [3], [4].

Под однотипными понимаются моды, интерференционная картина (интерферограмма) которых на плоскости расстояние — частота (r, f) или время — частота (t, f) представляет собой параллельные полосы. Полосы локализованы в окрестности кривой, определяемой уравнением сохранения фазы для опорной моды, в окрестности которой моды синфазны. Данная особенность обусловлена волноводной дисперсией, т.е. частотной зависимостью постоянных распространения мод. Если их дисперсионные характеристики близки, то смещением частоты излучения возможно выравнивание вариаций фаз мод, вызванных изменением условий распространения, что приводит к локализации интерференционных полос. В приближении ВКБ однотипными можно считать моды, собственные значения которых удовлетворяют однотипным уравнениям квантования [5]. Оценки числа однотипных мод приведены в работе [6].

В настоящей работе дано аналитическое решение задачи о выделении групп однотипных мод, обсуждены вопросы локализации двумерной спектральной плотности (спектрограммы). Рассмотрены применения спектрограммы однотипных мод для задач: фокусировки поля, обнаружения и разрешения источников звука, оценки их скорости и удаленности от приемника. Приведены результаты натурного эксперимента.

2. ДВУМЕРНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ОДНОТИПНЫХ МОД

Волновод считается горизонтально-однородным. В качестве исходной модели спектра источника используется модель равномерного сплошного спектра, поскольку выбор иного вида спектра, характерный масштаб изменения которого на много превышает характерный масштаб фазы, для дальнейшего не принципиален. Интенсивность поля, ограничиваясь модами дискретного спектра, запишем в виде [5]

$$I(w, r) = \sum_i \sum_j A_i(w) A_j^*(w) \exp([ir(h_i(w) - h_j(w))]), \quad (1)$$

где $h_{ij}(w) = h_i(w) - h_j(w)$; $A_i(w)$ и $h_i(w)$ — амплитуда и постоянная распространения i -й моды, $w = 2\pi f$ — циклическая частота, r — расстояние между источником и приемником. Перед знаком суммы опущен постоянный множитель, определяющий спектр источника. В правой части (1) двойную сумму разобьем на суммы однотипных мод

$$I(w, r) = \sum_{k=1} I_k(w, r)$$

и ограничимся рассмотрением одной из них, $k = 1$. По отношению к другим составляющим анализ идентичен. Далее нижний индекс k опускается. Тогда имеем

$$I(w, r) = \sum_m \sum_n A_m(w) A_n^*(w) \exp[irh_{mn}(w)] = \sum_m \sum_n I_{mn}(w, r), \quad (2)$$

где

$$I(w, r) = A_m(w) A_n^*(w) \exp[i r h_{mn}(w)]. \quad (3)$$

Условимся, что число мод равно M , номер первой моды $m = 1$.

Считая, что спектр сигнала сосредоточен в полосе $-(\Delta w/2) + w_0 \leq w \leq w_0 + (\Delta w/2)$, а приращение расстояния за время наблюдения Δt есть Δr , применим к интерферограмме (2) двукратное преобразование Фурье

$$F(\kappa, \tilde{\tau}) = \sum_m \sum_n \int_{r_1}^{r_1 + \Delta r} \int_{w_0 - \frac{\Delta w}{2}}^{w_0 + \frac{\Delta w}{2}} I_{mn}(w, r) \exp[i(\kappa r - \omega \tilde{\tau})] dr dw = \sum_m \sum_n F_{mn}(\kappa, \tilde{\tau}), \quad (4)$$

Здесь r_1 — начальное расстояние в момент времени t_1 , $\tilde{\tau} = \tau/2\pi$ — величина, обратная циклической частоте. С точностью до квадратичного члена малости

$$\Delta r = v \Delta t (\cos \varphi + v \Delta t \sin^2 \varphi / 2r_1), \quad (5)$$

где v — скорость источника, φ — угол между направлениями на приемник и движением источника (рис. 1).

Спектральная плотность (4) трактуется как спектрограмма, понимая под параметром пространственную частоту. Квадратичным слагаемым в (5) можно пренебречь при выполнении условия $v \Delta t \sin^2 \varphi \ll \cos \varphi$ что накладывает ограничение на длительность наблюдения в зависимости от скорости, начального удаления и угла траектории, $\Delta t \ll 2r_1 \cos \varphi / v \sin^2 \varphi$.

Проанализируем слагаемое в правой части (4):

$$F_{mn}(\kappa, t) = \int_{r_1}^{r_1 + \Delta r} \int_{w_0 - \frac{\Delta w}{2}}^{w_0 + \frac{\Delta w}{2}} I_{mn}(w, r) \exp[i(\kappa r - \omega \tilde{\tau})] dr dw. \quad (6)$$

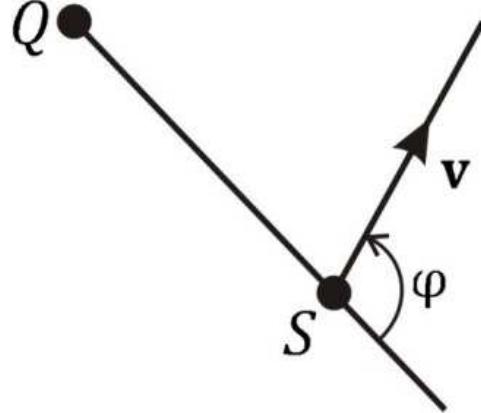


Рис. 1. Геометрия задачи: Q — приемник, S — начальное положение источника, $r_1 = QS$, v — вектор скорости источника.

Разложим постоянную распространения $h_{mn}(w)$ в окрестности опорной частоты w_0 и ограничимся двумя первыми членами разложения

$$h_m(w) = h_m(w_0) + \frac{\partial h_m(w_0)}{\partial w} (w - w_0), \quad (7)$$

так что ширина спектра Δw ограничена условием $\Delta w \ll 2 \left| \frac{(\partial h_m(w_0)/\partial w)}{\partial^2 h_m(w_0)/\partial w^2} \right|$. Положим, что в точке наблюдения конструктивно интерферируют моды с близкими номерами в окрестности l -го номера. Это позволяет, считая номер моды изменяющимся непрерывно, величину h_m разложить в ряд в этой окрестности, ограничившись линейным приближением

$$h_m(w) = h_l(w) + \frac{\partial h_l(w)}{\partial l} (m - l), \quad \frac{\partial h_l(w)}{\partial l} = h_{l+1}(w) - h_l(w). \quad (8)$$

Подставим (7), (8) в выражение (6), считая амплитуду A_m медленно меняющейся функцией по сравнению с фазой, что позволяет вынести ее за знак интеграла при значениях $w = w_0$,

$r = r_1$. Тогда при интегрировании по переменной w имеем

$$F_{mn}(\kappa, \tilde{\tau}) = A_m A_n^* \Delta w \exp(-i\tau w_0) \int_{r_1}^{r_1 + \Delta r} \frac{\sin \left\{ [r(m-n) \frac{\partial \alpha}{\partial w} - \tilde{\tau}] \frac{\Delta w}{2} \right\}}{[r(m-n) \frac{\partial \alpha}{\partial w} - \tilde{\tau}] \frac{\Delta w}{2}} \times \exp(ir[(m-n)\alpha + \kappa]) dr, \quad (9)$$

где $\alpha = \partial h_l(w_0)/\partial l$. Согласно (8) $(\partial \alpha / \partial w)(m-n) = (\partial h_{mn}(w_0) / \partial w)$, $\alpha(m-n) = h_{mn}(w_0)$. Здесь $\partial w / \partial h_m = u_m$ групповая скорость m -й моды.

Для того чтобы извлечь из формулы (9) простую и наглядную оценку $F_{mn}(\kappa, \tilde{\tau})$ поступим следующим образом. Пренебрежем вкладом спектральной плотности вне пределов главных максимумов (по нулевому уровню) функции $\sin x/x$ и воспользуемся теоремой о среднем значении [7]. В этом случае выражение (9) примет вид

$$F_{mn}(\kappa, \tilde{\tau}) = A_m A_n^* \Delta w \exp(-i\tau w_0) \frac{\sin \left\{ [r_{mn}(m-n) \frac{\partial \alpha}{\partial w} - \tilde{\tau}] \frac{\Delta w}{2} \right\}}{[r_{mn}(m-n) \frac{\partial \alpha}{\partial w} - \tilde{\tau}] \frac{\Delta w}{2}} \int_{r_1}^{r_1 + \Delta r} \exp(ir[(m-n)\alpha + \kappa]) dr, \quad (10)$$

где r_{mn} — некое расстояние на интервале $(r_1, r_1 + \Delta r)$ для интерферирующих m -й и n -й мод. К этому результату можно также прийти, считая фазу (9) меняющейся гораздо быстрее по сравнению с амплитудным множителем. В результате интегрирования (10) получаем

$$F_{mn}(\kappa, \tilde{\tau}) = \exp \{i[(r_1 + (\Delta r/2))\kappa - w_0 \tilde{\tau}]\} \Delta w \Delta r A_m A_n^* \exp \{i[(r_1 + (\Delta r/2))(m-n)\alpha]\} \times \frac{\sin \left\{ [r_{mn}(m-n) \frac{\partial \alpha}{\partial w} - \tilde{\tau}] \frac{\Delta w}{2} \right\} \sin \left\{ [\alpha(m-n) + \kappa] \frac{\Delta r}{2} \right\}}{[r_{mn}(m-n) \frac{\partial \alpha}{\partial w} - \tilde{\tau}] \frac{\Delta w}{2} [\alpha(m-n) + \kappa] \frac{\Delta r}{2}}. \quad (11)$$

Спектральная плотность $F(\kappa, \tilde{\tau})$ (4) локализована в двух областях, симметрично расположенных относительно начала координат плоскости $(\kappa, \tilde{\tau})$. Эта особенность обусловлена симметрией функции (11) относительно перестановки номеров интерферирующих мод: $F_{mn}(\kappa, \tilde{\tau}) = F_{nm}(-\kappa, -\tilde{\tau})$

Оценим размеры области спектrogramмы, положения главных максимумов которой приходятся на значения

$$\kappa_{mn} = -\alpha(m-n), \tilde{\tau}_{mn} = r_{mn}(m-n)(\partial \alpha / \partial \partial w) \quad (12)$$

Если $\Delta r \ll r_1$, то значения r_{mn} стягиваются в малую окрестность некоторой точки и можно положить $r_{mn} \approx r$. При этом с качественной и количественной стороны, как будет видно их дальнейшего, результаты остаются вполне осмысленными. Всего имеется $N(M-1)/2$ главных максимумов. Из них $(M-\mu)$ приходятся на значения $\tilde{\tau}_\mu = \mu r'(\partial \alpha / \partial w)$ и $\kappa_\mu = -\mu \alpha$, $\mu = 1, \dots, M-1$. Размеры области локализации $(\Delta \tilde{\tau}, \Delta \kappa)$ формируются из ширины интервала между крайними главными максимумами, и полуширины двух крайних главных максимумов. В качестве полуширины пиков примем интервал между главным максимумом и первым нулевым значением множителя $\sin x/x$, так как вне этого интервала спектральная плотность практически подавлена. Тогда для линейных размеров области локализации получаем

$$\Delta \tilde{\tau} = (M-2)r' |\partial \alpha / \partial w| + (4\pi / \Delta \omega), \quad \Delta \kappa = (M-2)|\alpha| + (4\pi / \Delta r). \quad (13)$$

Центр области локализации $(\tilde{\tau}_*, \kappa_*)$, как среднее значение между положениями $(\tilde{\tau}_\mu, \kappa_\mu)$ крайних главных максимумов, приходится на значения

$$\tilde{\tau}_* = (M/2)r'(\partial \alpha / \partial w), \quad \kappa_* = -(M/2)\alpha. \quad (14)$$

В области локализации (13) спектральная плотность (11) распределена крайне не равномерно. В точках с координатами $(\tilde{\tau}_\mu, \kappa_\mu)$ складываются $(M - \mu)$ главных пиков спектральной плотности. Она максимальна в точке $(\tilde{\tau}_1, \kappa_1)$, где формируются $(M - 1)$ пиков, далее, по мере приближения к границе области $(\tilde{\tau}_{M-1}, \kappa_{M-1})$, ее значение линейно уменьшается. Разность величин $h_{m(m+n)}(w)$ и $\partial h_{m(m+n)}(w)/\partial w$, как правило, различна для разных номеров мод m при номере $n = \text{const}$. Следовательно, главные максимумы спектрограммы, отвечающие положениям $\tilde{\tau}_{m(m+n)}(\partial h_{m(m+n)}(w)/\partial w)$ и $\kappa_{m(m+n)} = -h_{m(m+n)}(\omega)$, складываются не когерентно, что приводит к их наложению, т.е. размытию основного максимума.

При выполнении неравенств

$$\Delta w \gg 4\pi/(M-2)r'|\partial\alpha/\partial w|, \quad \Delta r \gg 4\pi/(M-2)|\alpha|, \quad M > 2 \quad (15)$$

вторыми слагаемыми в правых частях (13) можно пренебречь, считая, что спектральная плотность сосредоточена в интервалах

$$\Delta\tilde{\tau} = (M-2)r|\partial\alpha/\partial\omega|, \quad \Delta\kappa = (M-2)|\alpha|, \quad M > 2 \quad (16)$$

между крайними главными максимумами. Используя понятия частотного $\Lambda_{mn} = 2\pi/r'|\partial h_{mn}/\partial\omega|$ и пространственного $D_{mn} = 2\pi/|h_{mn}|$ периодов биений мод между модами с номерами m и n [5], размерам области (16) можно придать форму

$$\Delta\tilde{\tau} = 2\pi/\Lambda_{1(M-1)}, \quad \Delta\kappa = 2\pi/D_{1(M-1)}. \quad (17)$$

Главные максимумы спектральной плотности (4), как следует из (11), расположены на прямой $\kappa = \tilde{\gamma}\tilde{\tau}$ с угловым коэффициентом

$$\tilde{\gamma} = -\frac{\alpha}{r'(\partial\alpha/\partial w)} \quad (18)$$

и занимают полосу между значениями $\tilde{\tau} = \delta\tilde{\tau} = \pm 2\pi/\Delta w$ и $\kappa = \delta\kappa = \pm 2\pi/\Delta r$. Вне этих полос, как отмечалось выше, спектральная плотность практически подавлена. Таким образом, спектральная плотность сосредоточена в основном между прямыми

$$\kappa(\tilde{\tau}) = \tilde{\gamma}\tilde{\tau} + \delta\kappa \quad \text{и} \quad \kappa = \tilde{\gamma}\tilde{\tau} - \delta\kappa, \quad \tilde{\tau} \geq 0. \quad (19)$$

Отметим, что вследствие наложения зависимостей (11) и присутствия в них фазового множителя $\exp\{i[(r_1 + (\Delta r/z))(m - n)\alpha]\}$ изменение спектральной плотности (4) вдоль прямой $\kappa = \tilde{\gamma}\tilde{\tau}$ будет отличным от линейного спадания.

По определению [2] интерференционный инвариант

$$\beta = \frac{\delta\omega/\omega}{\delta r/r_1}, \quad (20)$$

где (ω_1, r_1) — начальное положение локального максимума поля; $\delta\omega = \omega - \omega_1$ и $\delta r = r - r_1$ — приращение частоты и расстояния, отвечающие сдвигу отслеживаемого максимума вдоль интерференционной полосы; $\delta\omega/\delta r$ — угловой коэффициент наклона интерференционной полосы. С другой стороны, если воспользоваться альтернативным определением [4],

$$\beta = -\frac{\alpha(\omega_0)}{\omega_0(\partial\alpha(\omega_0)/\partial\omega)}, \quad (21)$$

то, как следует из (18), (25) и (26),

$$\tilde{\gamma} = \delta\omega/\delta r, \quad (22)$$

так что угловые коэффициенты интерференционных полос интерферограммы и прямой расположения главных максимумов спектrogramмы совпадают между собой.

Таким образом, двукратное преобразование Фурье интерференционной картины, формируемой движущимся источником, приводит к локализации двумерной спектральной плотности в области, линейные размеры которой определяются наименьшими частотным и пространственным масштабами изменчивости поля.

Если в правой части (5) ограничиться линейным приближением и в интеграле (6) произвести замену переменной интегрирования r на t , то приходим к выражению для составляющей спектrogramмы в переменных времени — частота

$$F_{1mn}(\tilde{\nu}, \tilde{\tau}) = \exp \left[i \left(\frac{\tilde{\nu} \Delta t}{2} - \tilde{r} \omega_0 \right) \right] \Delta \omega \Delta t v_r A_m A_n^* \exp \left[i \frac{\Delta t}{2} v_r \alpha(m-n) \right] \times \\ \times \frac{\sin \left\{ [v_r t' (m-n) \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} - \tilde{\tau}] \frac{\Delta \omega}{2} \right\}}{[v_r t' (m-n) \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} - \tilde{\tau}] \frac{\Delta \omega}{2}} \frac{\sin \left\{ [v_r \alpha (m-n) + \tilde{\nu}] \frac{\Delta t}{2} \right\}}{[v_r \alpha (m-n) + \tilde{\nu}] \frac{\Delta t}{2}}, \quad (23)$$

где $\tilde{\nu} = 2\pi\nu = v_r \kappa$ — циклическая частота; $v_r = v \cos \varphi$ — радиальная составляющая скорости; $\Delta t = \Delta r/v_r$ — время наблюдения; t' — некий момент времени на интервале наблюдения Δt , $0 < t \leq \Delta t$. В разделе 6 показано, что можно принять $t \approx \Delta t$. Здесь принято, что момент времени t_1 , отвечающий начальному расстоянию r_1 , равен нулю. Спектrogramма (23) расположена в первом и третьем квадратах плоскости $(\tilde{\tau}, \tilde{\nu})$, если радиальная скорость $v_r < 0$, т.е. угол траектории $(\pi/2) < \varphi \leq \pi$ (рис. 1), и во втором и четвертом квадратах, если $v_r > 0$, когда $0 \leq \varphi < (\pi/2)$. Следовательно, по расположению спектrogramмы на плоскости $(\tilde{\tau}, \tilde{\nu})$ можно выяснить, удалается или приближается источник к приемнику.

На частотах $\tilde{\nu}_{mn} = 2\pi\nu_{mn} = -v_r \alpha(m-n)$ формируются главные максимумы спектральной плотности. Величину $t_{mn} = 1/\nu_{mn}$ можно представить как $t_{mn} = D_{mn}/v_r$ и, следовательно, ее можно интерпретировать как время, в течение которого источник пересекает пространственный период интерференции m -й и n -й мод. В новых переменных выражения для центра и границ области локализации имеют вид

$$\tilde{\tau}_* = (M/2)v_r t'(\partial \alpha / \partial \omega), \quad \tilde{\nu}_* = -(M/2)v_r \alpha, \quad (24)$$

$$\Delta \tilde{\tau} = (M-2)t' |v_r \partial \alpha / \partial \omega|, \quad \Delta \tilde{\nu} = (M-2)|v_r \alpha|, \quad M > 2. \quad (25)$$

Главные максимумы спектральной плотности (23) расположены на прямой $\tilde{\nu} = \tilde{\varepsilon} \tilde{\tau}$ с угловым коэффициентом

$$\tilde{\varepsilon} = -\frac{\alpha}{t'(\partial \alpha / \partial \omega)}, \quad (26)$$

связанным с угловым коэффициентом γ (18) зависимостью

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\varepsilon} \frac{t'}{r'} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{v_r}. \quad (27)$$

В переменных $(\tilde{w}, \tilde{\tau})$ спектральная плотность преимущественно содержится в полосе, ограниченной прямыми

$$\tilde{\nu} = \tilde{\varepsilon} \tilde{\tau} + \delta \tilde{\nu} \quad \text{и} \quad \tilde{\nu} = \tilde{\varepsilon} \tilde{\tau} - \delta \tilde{\nu}, \quad (28)$$

где $\delta \tilde{\nu} = 2\pi/\Delta t$. Угловые коэффициенты интерференционных полос интерферограммы и прямой расположения главных максимумов спектrogramмы связаны соотношением

$$\tilde{\varepsilon} = -\frac{\delta \omega}{\delta t}, \quad (29)$$

где $\delta\omega$ — частотный сдвиг максимума поля за время δt . Заметим, что на плоскости (τ, ν) угловой коэффициент ε прямой, на которой расположены главные максимумы спектральной плотности, связан с угловым коэффициентом $\tilde{\varepsilon}$ соотношением $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}/(2\pi)^2$.

Интересная особенность спектрограммы наблюдается в случае, когда она формируется источниками, движущимися с разными радиальными скоростями в акваториях с одинаковыми параметрами дна. Она заключается в том, что линейные размеры области локализации (25) и положения главных максимумов спектральной плотности (23) изменяются, однако угловой коэффициент (26) прямой, на котором они расположены, не изменяется. Другими словами, топология области локализации спектрограммы сохраняется. Однако если изменить ширину спектра $\Delta\omega$, то изменятся как линейные размеры области локализации (25), так и направление ее расположения (26). Это связано с изменением значений дисперсионных характеристик мод.

Локализацию спектральной плотности можно рассматривать как фокусировку поля движущегося источника. Ее эффективность оценим отношением (фактором фокусировки)

$$g = \frac{F_{\max}(\tilde{\nu}, \tilde{\tau})}{|F(\tilde{\nu}, \tilde{\tau})|}. \quad (30)$$

Здесь $F_{\max}(\tilde{\nu}, \tilde{\tau})$ и $|F(\tilde{\nu}, \tilde{\tau})|$ — главное максимальное значение и модуль среднего значения спектральных плотностей внутри и вне области локализации соответственно. Из (23) вытекает, что фактор фокусировки можно оценить, рассматривая поведение функции $|\sin x/x|$, где координаты положения главного максимума: $\tilde{\tau}_1 = v_r t' (\partial\alpha/\partial w)$. Так, принимая $F_{\max}(\tilde{\nu}, \tilde{\tau}) = 1$, $|F(\tilde{\nu}, \tilde{\tau})|$ — среднее значение функции $|\sin x/x|$ для аргументов $x > \pi$ и ограничиваясь областью двух первых побочных максимумов, имеем $|F(\tilde{\nu}, \tilde{\tau})| = 0,11$. В результате получаем $g = 9.1$, что превышает фактор фокусировки, реализуемом при обращении волнового фронта и временном обращении волны [9]. Величина g не зависит от модового состава поля. В отличие от классических методов фокусировки в точку расположения источника первичной волны, для реализации данного подхода не требуется первичного источника: двумерная спектральная плотность движущегося источника автоматически локализуется в точке приема в малой окрестности точки $(\tilde{\nu}_*, \tilde{\tau}_*)$ (24).

3. ПОГРЕШНОСТЬ УГЛОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА И РАЗРЕШЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ

В качестве области допустимых отклонений углового коэффициента $\tilde{\varepsilon}^*$ от $\tilde{\varepsilon}$ примем условие, при котором она ограничена прямыми, проходящими через начало координат и точки $(\tilde{\tau}', \tilde{\nu}')$ и $(\tilde{\tau}'', \tilde{\nu}'')$ (рис. 2), рассматриваемое как критерий приемлемой локализации. Здесь $\tilde{\tau}' = (M-1)v_r t' (\partial\alpha/\partial w)$ — положение главного максимума спектральной плоскости, обусловленное интерференцией крайних мод (23); $\tilde{\nu}'$ и $\tilde{\nu}''$ — координаты прямых (28) в точке $\tilde{\tau}'$. В результате получаем

$$-\delta\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}^* \leq \tilde{\varepsilon} + \delta\tilde{\varepsilon} \quad (31)$$

где погрешность

$$\delta\tilde{\varepsilon} = \left| \tilde{\varepsilon} \frac{2\pi}{v_r \Delta t h_{M1}} \right|. \quad (32)$$

Выражению (32) можно придать вид

$$\delta\tilde{\varepsilon} = \left| \tilde{\varepsilon} \frac{D_{M1}}{v_r \Delta t} \right|. \quad (33)$$

Изменение дисперсионных характеристик мод может существенно влиять на параметры спектрограммы (11), (23), что, естественно, сказывается на качестве предсказания оценок источника. Погрешность (32), (33) можно рассматривать как область допустимых изменений дисперсионных характеристик мод, когда метод остается устойчивым по отношению к вариациям параметров дна. Нетрудно сообразить, как это можно оценить. Обозначим верхним индексом “звездочка” допустимые значения дисперсионных характеристик мод

$$h_m^*(w) = h_m(w) + \delta_m^r, \quad (34)$$

$$\partial h_m^*(w)/\partial w = (\partial h_m(w)/\partial w) + \delta_m^{rr}, \quad (35)$$

Здесь $h_m(w), \partial h_m(w)/\partial w, \delta_m^r, \delta_m^{rr}$ — “истинные” характеристики и погрешности соответственно. Допустимые отклонения дисперсионных характеристик мод, согласно (26), (30) и (31), должны удовлетворять неравенствам

$$1 - \left| \frac{2\pi}{v_r \Delta t h_{1M}} \right| \leq \frac{1 + (\delta_m^r / h_{mn}(w))}{1 + [\delta_m^{rr} / (\partial h_{mn}(w)/\partial w)]} \leq 1 + \left| \frac{2\pi}{v_r \Delta t h_{1M}} \right|, \quad (36)$$

где $\delta_m'^{rr} = \delta_m^{rr} - \delta_m''^{rr}$. Если $\delta_m' \ll h_{mn}(w)$ и $\delta_m'' \ll (\partial h_{mn}(w)/\partial w)$, то условие (36) приводится к виду

$$\left| \frac{\delta_m'}{h_{mn}(w)} - \frac{\delta_m''}{(\partial h_{mn}(w)/\partial w)} \right| \leq \frac{D_{M1}}{v_r \Delta t}, \quad (37)$$

где $D_{M1} = 2\pi/|h_{1M}|$ — наименьший пространственный масштаб изменения интерференционной картины.

Два источника с радиальными скоростями v_r' и v_r'' , согласно (23), формируют два основных максимума спектральной плотности в точках $(\tilde{\tau}_1', \tilde{\nu}_1')$ и $(\tilde{\tau}_1'', \tilde{\nu}_1'')$, где $\tilde{\tau}_1'^{rr} = v_r'^{rr} t' (\partial \alpha / \partial \omega)$, $\tilde{\nu}_1'^{rr} = v_r'^{rr} \alpha$. Здесь для первого источника используется верхний индекс ('), а для второго источника — (''). Если для разрешения этих максимумов воспользоваться критерием Рэлея [12]

$$|\tilde{\tau}_1' - \tilde{\tau}_1''| \geq \frac{\pi}{\Delta \omega}, \quad |\tilde{\nu}_1' - \tilde{\nu}_1''| \geq \frac{\pi}{\Delta t}, \quad (38)$$

то приходим к неравенству

$$|\partial v_r| \geq \max \left\{ \frac{\pi}{\Delta t \Delta \omega |(\partial h_{mn}(\omega_0)/\partial \omega)|}, \frac{\pi}{\Delta t |h_{mn}(\omega_0)|} \right\}, \quad (39)$$

где $\Delta v_r = v_r' - v_r''$ — разность радиальных скоростей источников. Таким образом, разрешение двух движущихся источников повышается с увеличением их радиальных скоростей, времени наблюдения и ширины спектра принимаемого сигнала. Неравенству (39), воспользовавшись

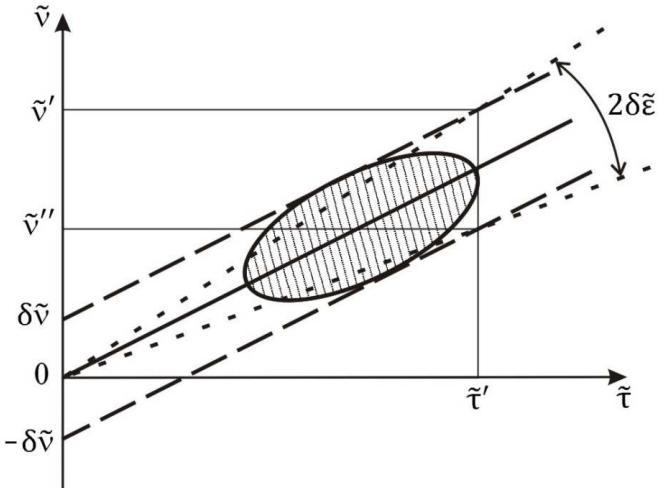


Рис. 2. Геометрия области локализации спектрограммы. Область локализации спектральной плотности сигнала показана штриховкой. Пунктир — прямые (28), ограничивающие полосу локализации; сплошная — прямая расположения главных максимумов спектральной плотности, малый пунктир — прямые, ограничивающие область приемлемой локализации спектрограммы.

определенением интерференционного инварианта (21), можно придать следующий физический смысл

$$\Delta v_r \Delta t \geq \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\beta \omega_0}{\Delta \omega} D_{m(m+1)}, \\ \frac{1}{2} D_{m(m+1)}, \end{array} \right. \quad (40)$$

которое накладывает ограничение на разность расстояний, проходимых источниками за время наблюдения в направлении на приемник. Напомним, что $D_{m(m+1)}$ — наибольший пространственный период, обусловленный интерференцией между соседними модами. Из (40) видно, что условие разрешения движущихся источников определяется верхней правой частью.

4. ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕРФЕРОГРАММЫ И СПЕКТРОГРАММЫ

Эксперимент проводился ООО “Акустические системы калибровки-Программирование” в 2004 г. в акватории Тихоокеанского шельфа: глубина $H \approx 53$ м, равномерный профиль скорости звука $c \approx 1474$ м/с. Источником звука являлся буксируемый на глубине $z_s \approx 15$ м пневматический излучатель, скалярный приемник располагался на глубине $z_q \approx 52$ м. Скорость буксировки $v \approx 1.7$ м/с, периодичность излучения $T = 30$ с. Излучаемый сигнал контролировался гидрофоном, расположенным на расстоянии 2 м от излучателя, нормированный спектр $\hat{p}(f)$ которого приведен на рис. 3.

Координаты источника относительно приемника регистрировались системой GPS

[8]. Начальное удаление $r_1 \approx 10$ км, пневмоисточник приближался к приемнику, т.е. угол $\varphi = \pi$ (рис. 1). Использовался фрагмент данных на начальном участке траектории длительностью $\Delta t = 10$ мин и полосой $\Delta f = 80 - 120$ Гц. Число точек отсчета $J = \Delta t/T$. На входе приемника отношение сигнал/помеха (по мощности) $q \approx 30.5$.

На рис. 4 приведены нормированные интерферограмма и модуль спектрограммы движущегося источника, полученные при обработке данных эксперимента.

На спектрограмме вдоль полосы, расположенной в окрестности начала координат плоскости (τ, ν) , вырезана спектральная плотность, соответствующая постоянной интенсивности для мод с номерами $m = n$. На рис. 4б пунктиром и квадратиками соответственно показаны прямая $\nu = \varepsilon\tau$ расположения главных максимумов спектральной плотности и прямых $\nu = \varepsilon\tau + \delta\nu$, $\nu = \varepsilon\tau - \delta\nu$, ограничивающих полосу, в которой она практически сосредоточена. Ширина полосы $2\delta\nu = 0.0028$ Гц, согласно теории $2\delta\nu = 2/\Delta t = 0.0033$ Гц. В области локализации спектральная плотность распределена неравномерно, концентрируясь у границы области вблизи начала координат, при этом наибольший главный максимум расположен в точке с координатами $\tau_1 = 0.1264$ с, $\nu_1 = 0.0035$ Гц. Наблюдаются два главных максимума (рис. 4в), что соответствует трем модам, формирующими волновое поле. Угловые коэффициенты интерференционных полос интерферограммы и прямой расположения главных максимумов спектрограммы, как следует из рис. 3а, 3б, равны $\delta f/\Delta t = -0.0283$ с⁻² и $\varepsilon = 0/0277$ с⁻² соответственно. Фактор фокусировки (30) оценивается как $g = 9.1$, что совпадает с теоретическим значением.

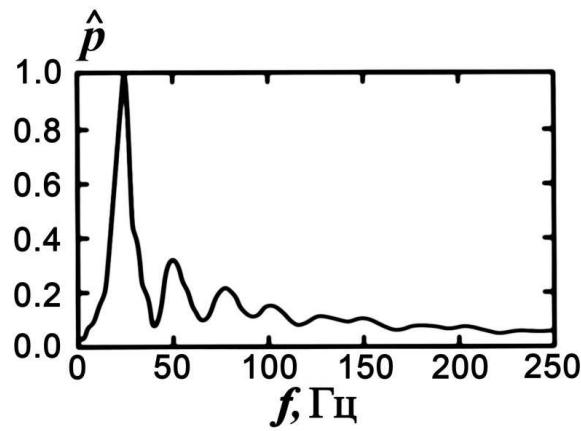


Рис. 3. Нормированный спектр $\hat{p}(f)$ пневмоисточника.

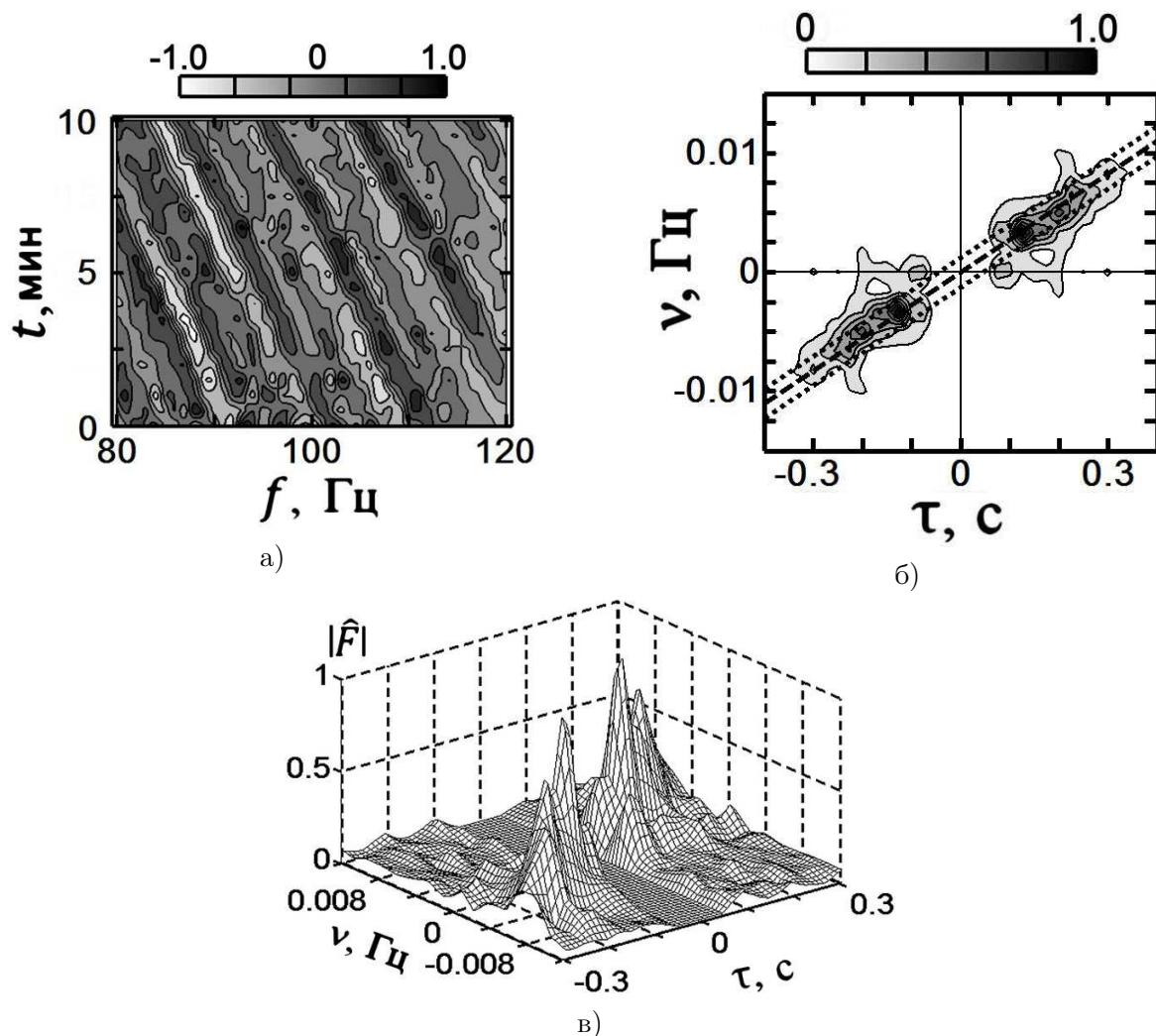


Рис. 4. Нормированные интерферограмма (а) и спектрограмма (б), (в), измеренные в натурном эксперименте.

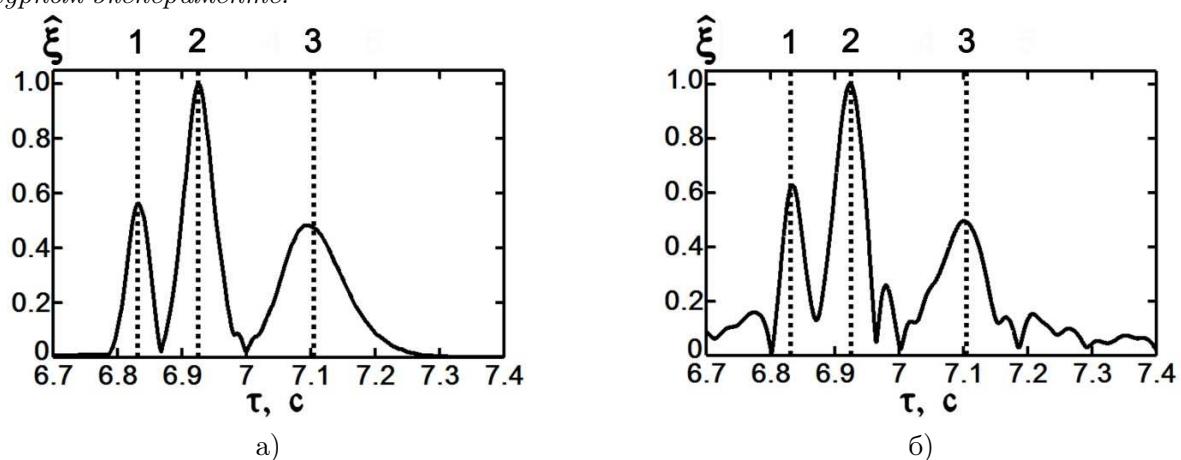


Рис. 5. Зависимость нормированной огибающей сигнала $\hat{\xi}$ от времени τ : (а) эксперимент; (б) моделирование. Вертикальным пунктиром показаны времена распространения m -й моды, $m = \overline{1, 3}$.

Определение постоянных распространения мод $h_m(w)$, которые определяют положение главных максимумов спектограммы, решалась стандартным способом. Была выбрана простейшая модель дна в виде однородного поглощающего жидкого полупространства. Модель дна выбиралась из условия, чтобы она передавала основные свойства измерений огибающей сигнала в выбранном диапазоне частот $\Delta f = 80 - 120$ Гц и не была сложной. Варьируя параметры дна: плотность ρ , скорость звука w и мнимую часть показателя преломления η , решалась задача Штурма-Лиувилля на нормированные собственные функции $\psi_m(z)$ и постоянные распространения $h_m(\omega)$ [5], которые обеспечивали сходство между измеренной и расчетной огибающими сигналами $\xi(t)$ (рис. 5), получаемые спектральным методом [10]. Минимизация невязки между экспериментальной (рис. 5а) и модельной (рис. 5б) огибающими сигналами не проводилась.

Вертикальными пунктирными линиями показаны времена распространения модовых импульсов $\tau_m = r/u_m, m = \overline{1,3}, r_1 = 10$ км. Как видно, волновое поле формируется тремя модами. Для параметров дна получены значения: $\rho = 1.8$ г/см³, $w = 1700$ м/с, $\eta = 0.009$. Значения постоянных распространения $h_m(w)$ и групповых скоростей $u_m(w)$ мод на частоте $f_0 = 100$ Гц приведены в табл. 1.

Таблица 1. Прогностические постоянные распространения $h_m(w)$ и групповые скорости $u_m(w)$ мод на частоте $f_0 = 100$ Гц

m	1	2	3
$h_m, \text{ м}^{-1}$	0.4243	0.4146	0.3995
$u_m, \text{ м/с}$	1462.1	1435.3	1395.6

В качестве иллюстрации разберем два примера применения двумерной спектральной плотности для решения задачи локализации источника звука.

5. СРАВНЕНИЕ ОЦЕНОК СКОРОСТИ ИСТОЧНИКА ЗВУКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРФЕРОГРАММЫ И СПЕКТРОГРАММЫ

Начальное положение спектрального максимума (r_1, f_1) в момент времени t_1 и значение интерференционного инварианта β [2] считаются известными. При такой постановке задачи сравним между собой помехоустойчивость оценок скорости источника, получаемые при траекторном накоплении интерференционных максимумов [11] и использовании спектральной плотности спектрограммы.

В данном случае интерференционный инвариант имеет вид

$$\beta = \frac{r_1 \varepsilon}{f_1 v_r} \quad (41)$$

Используя (41), алгоритмы, реализующие траекторное накопление интерференционных максимумов и распределение спектральной плотности спектрограммы, можно выразить как

$$\Pi(v_*) = \int_0^{\Delta t f(t) + \Delta f_1/2} \int_{f(t) - \Delta f_1/2}^{\Delta t f(t) + \Delta f_1/2} |\zeta(t, f)| dt df, \quad (42)$$

$$\Gamma(v_*) = \int_0^{\tau_{\max}} F[\tau, v(\tau)] \sqrt{1 + (\beta f_1 v_*/r_1)} d\tau. \quad (43)$$

Здесь $\zeta(t, f)$ — интерференционная поглощающая поля; $f(t) = f_1(1 + \beta v_* t / r_1)$, Δf_1 — ширина локализованной интерференционной полосы; v_* — варьируемое значение радиальной составляющей скорости v_r ; $\tau_{\max} = \tau_* + (\Delta\tau/2)$. За оценку \dot{v}_r радиальной составляющей скорости v_r

принимается положение главного максимума функционалов (42) и (43), т.е. $\max \Pi(v_*) = \Pi(\dot{v}_r)$ и $\max \Gamma(v_*) = \Gamma(\dot{v}_r)$. Главные максимумы достигаются при траекторном накоплении интерференционных максимумов вдоль интерференционных полос и прямой, на которой расположены главные максимумы спектральной плотности. Алгоритм (42) реализует траекторное накопление вдоль одной интерференционной полосы. Здесь и ниже оценка величины обозначается точкой сверху.

Нормированные интерферограммы и функции $\hat{\Pi}(v_*)$, и нормированные интерферограммы, спектрограммы и функции $\hat{\Gamma}(v_*)$ для различных отношений сигнал/помеха q представлены на рис. 6 и рис. 7 соответственно.

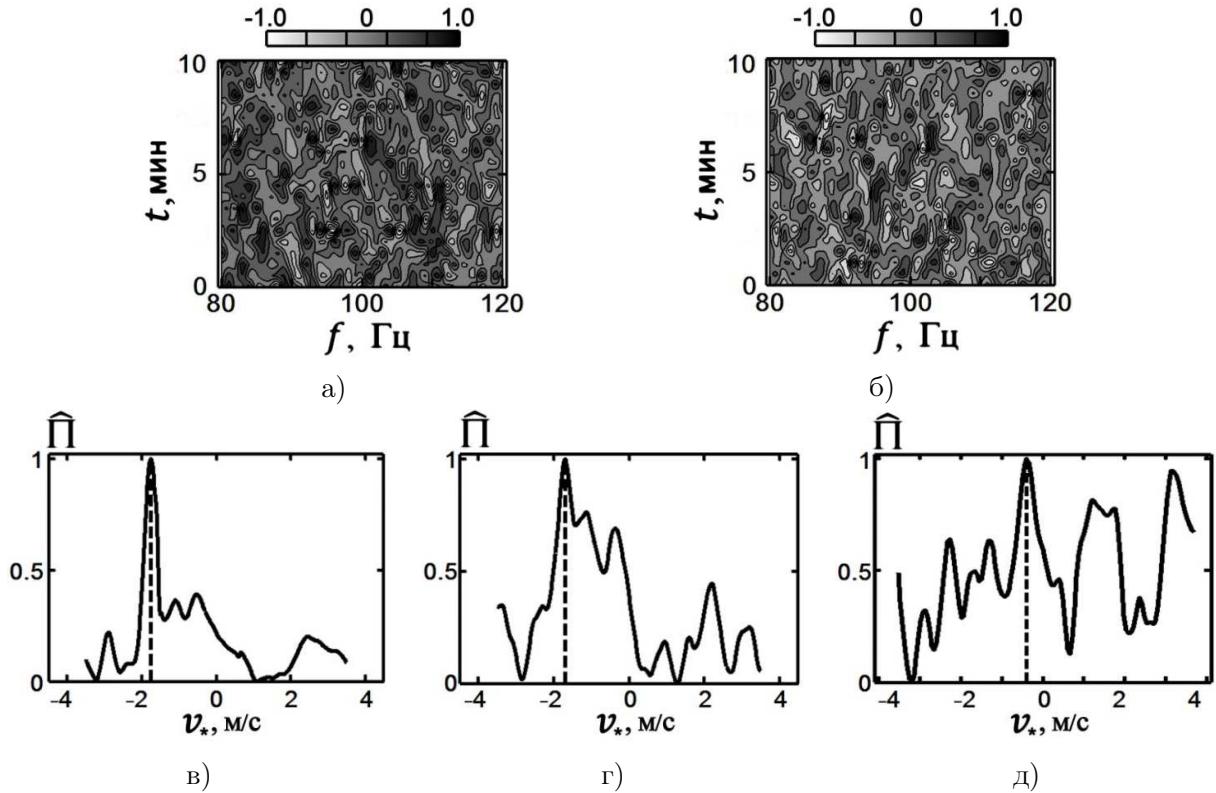


Рис. 6. Нормированные интерферограмма (а), (б) и функция $\hat{\Pi}(v_*)$ (в), (г), (д). Отношение сигнал/помеха: $q = 30.5$ (в); $q = 6 \times 10^{-3}$ (добавление помехи) (а), (г); $q = 10^{-3}$ (добавление помехи) (б), (д). Натурный эксперимент.

При реализации алгоритмов полагалось: начальное расстояние между источником и приемником $r_1 = 10$ км [8], интерференционный инвариант, принимая во внимание формирование поля модами, отражающимися от верхней и нижней границ волновода, считался $\beta = 1$ [2]. В алгоритме (42) значение частоты f_1 , как и направление траекторного накопления и ширина интерференционной полосы, подбиралось. В алгоритме (43) для величины f_1 принималось значение частоты спектра сигнала, соответствующее начальному расстоянию r_1 т.е. $f_1 = 120$ Гц (рис. 4а); при этом погрешность не превышает ширины интерференционной полосы. На спектрограмме вдоль полосы, расположенной в окрестности начала координат плоскости (τ, ν) , вырезана спектральная плотность постоянной интенсивности для мод и главных максимумов помехи. Для условий эксперимента интерферограмма и спектрограмма показаны на рис. 2. С целью проверки помехоустойчивости алгоритмов при обработке экспериментальных данных добавлялась помеха. Величины $q = 6 \times 10^{-3}$ (рис. 6) и $q = 10^{-3}$ (рис. 7) примерно равны предельным значениям, при которых реализуется траекторное накопление

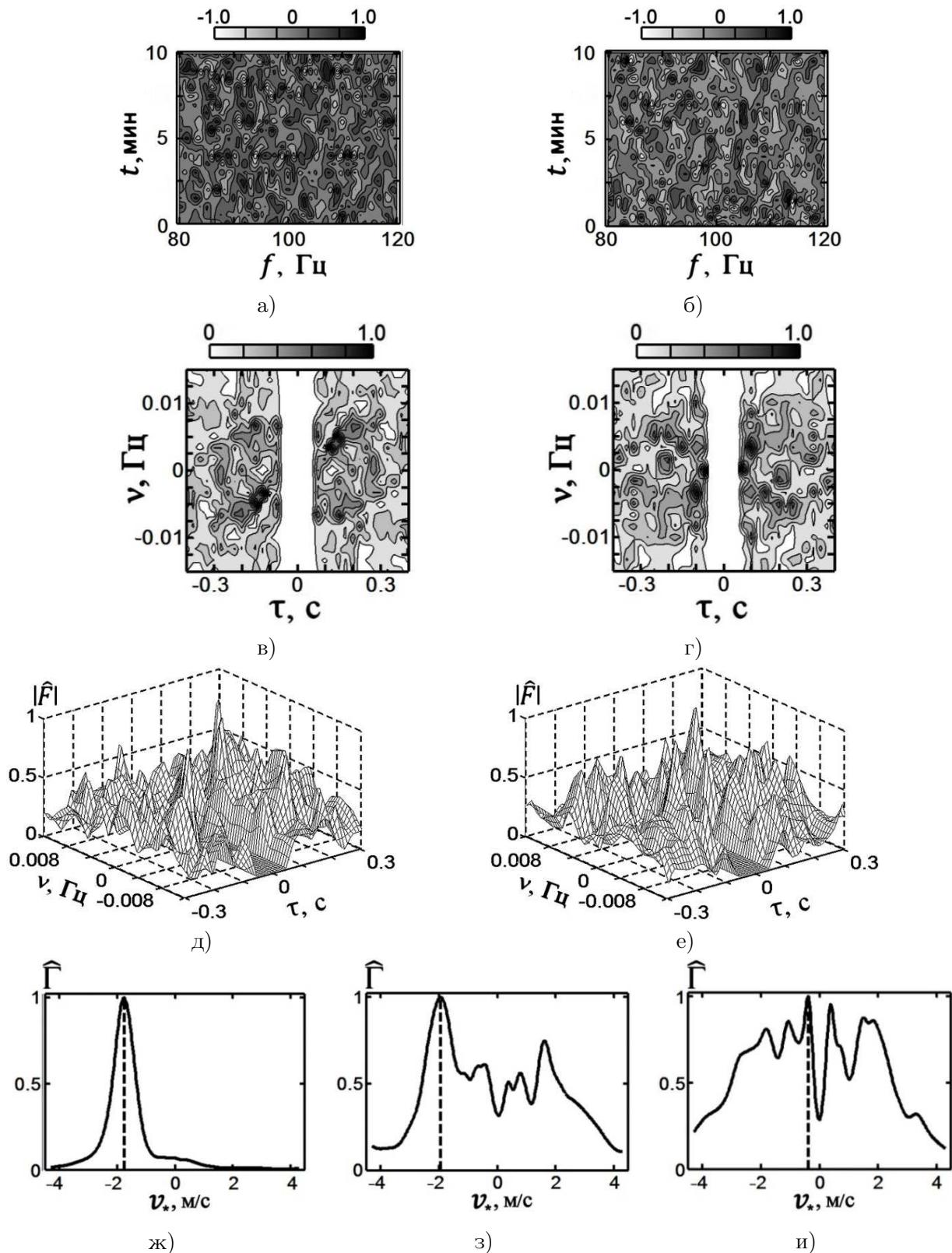


Рис. 7. Нормированные интерферограмма (а), (б); спектрограмма (с), (д), (е) и функция $\hat{F}(\nu_*)$ (ж), (з), (и). Отношение сигнал/помеха: $q = 10^{-3}$ (добавление помехи) (а), (б), (д), (з); $q = 3 \times 10^{-4}$ (добавление помехи) (с), (е), (и); 30.5 (ж). Натурный эксперимент.

максимумов поля вдоль интерференционных полос [11], и накопление спектральной плотности спектрограммы вдоль прямой, на которой расположены главные максимумы. Выигрыш $\eta = 6 \times 10^{-3}/10^{-3} = 6$, очевидно, должен примерно быть равным числу всех G интерференционных полос в фильтрующем окне $(\Delta f, \Delta t)$. Согласно рис. 4а величина $G = 5$. При этих значениях отношения сигнал/помеха имеют место ярко выраженные одиночные пики, расположенные в точках $\nu_* = \dot{\nu}_r = -1.8$ м/с (рис. 6г) и $\nu_* = \dot{\nu}_r = -1.9$ м/с (рис. 7з). Для условий эксперимента ($q = 30.5$) в обоих случаях $\nu_* = \dot{\nu}_r = -1.8$ м/с. Заметим, что при траекторном накоплении предельное отношение сигнал/помеха оценивается $q_{\min} = W/J^2$, где W — число полных интерференционных полос ($W = 3$, рис. 4а), J — число временных отсчетов [11]. Заметим, что максимальное число временных отсчетов $J_{\max} = \Delta t \Delta f$.

Дальнейшее возрастание уровня помехи приводит к траекторному накоплению интерференционных максимумов и накоплению спектральной плотности вдоль прямых, отличных от направления интерференционных полос и расположения главных максимумов спектрограммы сигнала. Возникают помеховые пики, превышающие истинный пик, обусловленный сигналом, и оценка скорости становится неадекватной: $\nu_* = \dot{\nu}_r = -0.4$ м/с (рис. 6д, 7и). Отсюда следует, что статистическое усреднение оценок радиальных скоростей в режиме накопления вдоль прямой расположения главных максимумов спектральной плотности будет незначительно отличаться от оценок случайных реализаций. Это представляет несомненный практический интерес для практических приложений, так как дает устойчивую оценку $\dot{\nu}_r$, близкую к истинному значению ν_r , $\dot{\nu}_r \approx \nu_r$. Ранее данное положение на примере траекторного накопления максимумов поля вдоль интерференционных полос продемонстрировано в [11].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье развивается подход, основанный на использовании спектрограммы однотипных мод, позволяющий обнаруживать источник, измерять радиальную составляющую скорости и начальное удаление от приемника при малом отношении сигнал/помеха. Высокая помехоустойчивость метода основана на том, что посредством двукратного преобразования Фурье интерференционной картины можно осуществлять в различные моменты времени когерентное сложение амплитуд однотипных мод. При этом интерференционная картина локализуется в малой области, линейные размеры которой обусловлены наименьшими частотным и пространственным масштабами изменчивости поля. Локализацию спектральной плотности можно рассматривать как фокусировку поля движущегося источника, фактор фокусировки которой превышает фактор фокусировки, реализуемой при обращении волнового фронта и временном обращении волны. Оценена область приемлемой локализации спектральной плотности и получено условие разрешения движущихся источников звука. Предложен критерий качества подбора параметров дна, позволяющий получать устойчивые оценки радиальной составляющей скорости источника и начального удаления от приемника. Определена область дисперсионных характеристик мод, при которой метод остается устойчивым к изменениям параметров дна.

Приведена интерферограмма и спектрограмма натурного эксперимента, полученные при большом отношении сигнал/помеха. Отмечается хорошее согласие экспериментальных величин с расчетными, что подтверждает справедливость теоретической модели спектрограммы. Введение интенсивной помехи при обработке экспериментальных данных подтвердило плодотворность применения спектрограммы для решения задачи локализации источника при малом отношении сигнал/помеха. Приведена оценка минимального отношения сигнал/помеха, согласующаяся с экспериментальным значением, при котором работает метод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акустика океана / Под ред. Дж. Де Санто. Пер с англ. — М. : Мир, 1982. — 320 с.
2. Чупров, С. Д. Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане / С. Д. Чупров // Акустика океана. Современное состояние. — 1982. — С. 71–91.
3. Частотные смещения интерференционной структуры звукового поля в летний период времени на океанском шельфе / В. М. Кузькин, Й.-Т. Лин, А. А. Луньков и др. // Акуст. журн. — 2011. — Т. 57, № 3. — С. 387–397.
4. Кузькин, В. М. Выделение групп однотипных мод в мелком море / В. М. Кузькин, М. В. Куцов, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. — 2013. — Т. 59, № 6. — С. 735–743.
5. Бреховских, Л. М. Теоретические основы акустики океана / Л. М. Бреховских, Ю. П. Лысанов. — Л. : Гидрометеоиздат, 1982. — 264 с.
6. Кулаков, В. Н. О возбуждении групп мод в слоистом океане / В. Н. Кулаков, Н. Е. Мальцев, С. Д. Чупров // Акуст. журн. — 1983. — Т. 29, № 1. — С. 74–79.
7. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1968. — 720 с.
8. Белов, А. И. Оценка акустических характеристик поверхностных слоев морского дна с использованием четырехкомпонентных векторно-скалярных приемников / А. И. Белов, Г. Н. Кузнецов // Акуст. журн. — 2016. — Т. 62, № 2. — С. 194–202.
9. Луньков А.А., Петников В.Г., Стромков А.А. Особенности фокусировки низкочастотных звуковых полей в мелком море // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 256–262.
10. Волновой метод оценки глубины источника звука в океаническом волноводе / Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Д. Ю. Просовецкий // Phys. Wave Phenom. — 2016. — V. 24, № 3.
11. Интерферометрический метод оценки скорости источника звука в океаническом волноводе / Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Д. Ю. Просовецкий // Phys. Wave Phenom. — 2016. — V. 24, № 4.
12. Ландсберг, Г. С. Оптика / Г. С. Ландсберг. — М. : Наука, 1976. — 928 с.
13. Estimation of the Depth of an Immobile Sound Source in Shallow Water / T. N. Besedina, G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin et. al. // Phys. Wave Phenom. — 2015. — V. 23, № 4. — P. 292–303.

REFERENCES

1. Ocean Acoustics. Ed. J.A. De Santo. [Akustika okeana. Pod red. Dzh. De Santo. Per s angl]. Moscow: Mir, 1982, 320 p.
2. Chuprov S. D. Interferential structure of a sound field at the layered ocean. [Chuprov S. D. Interferentsionnaya struktura zvukovogo polya v sloistom okeane]. *Akustika okeana. Sovremennoe sostoyanie – Acoustics of the ocean. The modern state*, Moscow: Nauka, 1982, pp. 71–91.
3. Kuz'kin V.M., Lin Ying-Tsong, Lun'kov A.A., Lynch J.F., Petnikov V.G. Frequency Shifts of the Sound Field Interference Pattern on Oceanic Shelf in Summer Conditions. [Kuz'kin V.M., Lin J.-T., Lun'kov A.A., Linch Dzh.F., Petnikov V.G. Chastotnye smeshheniya interferencionnoj struktury zvukovogo polya v letnij period vremeni na okeanskom shel'fe]. *Akusticheskij zhurnal – Acoustical Physics*, 2011, vol. 57, no. 3, pp. 387–397.
4. Kuz'kin V.M., Kutsov M.V., Pereselkov S.A. Filtration of groups of single-type modes in shallow seas. [Kuz'kin V.M., Kucov M.V., Peresyolkov S.A. Vydelenie grupp odnotipnyx mod v melkom more]. *Akusticheskij zhurnal – Acoustical Physics*, 2013, vol. 59, no. 6, pp. 735–743.
5. Brekhovskikh L.M., Lysanov Yu.P. Theoretical Fundamentals of Ocean Acoustic. [Brexovskikh L.M., Lysanov Yu.P. Teoreticheskie osnovy akustiki okeana]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1982. 264 p.
6. Kulakov V.N., Mal'tsev N.E., Chuprov S.D. Excition of groups of modes in a layered

ocean. [Kulakov V.N., Mal'cev N.E., Chuprov S.D. O vozbuždenii grupp mod v sloistom okeane]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustical Physics*, 1983, vol. 29, no. 1, pp. 74–79.

7. Korn G., Korn T. Handbook for scientists and engineers. [Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnyx rabotnikov i inzhenerov]. Moscow: Science, 1968, 720 p.

8. Belov A.I., Kuznetsov G.N. Acoustic characteristics estimation of surface layers of the seabed using four-component vector-scalar receivers. [Belov A.I., Kuznetsov G.N. Ocenka akusticheskix xarakteristik poverxnostnyx sloev morskogo dna s ispol'zovaniem chetyrekhkomponentnyx vektornoskalyarnyx priemnikov]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustical Physics*, 2016, vol. 62, no. 2, pp. 194–202.

9. Lun'kov A.A., Petnikov V.G., Stromkov A.A. Focusing of Low-Frequency Sound Fields in Shallow Water. [Lun'kov A.A., Petnikov V.G., Stromkov A.A. Osobennosti fokusirovki nizkochastotnyx zvukovyx polej v melkom more]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustical Physics*, 2010, vol. 56, no. 2, pp. 256–262.

10. Kuznetsov G.N., Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A., Prosovetskiy D.Y. The wave method of assessing the depth of the sound source in an ocean waveguide. [Kuznetsov G.N., Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A., Prosovetskiy D.Y. Volnovoj metod ocenki glubiny istochnika zvuka v okeanicheskem volnovode]. *Phys. Wave Phenom — Phys. Wave Phenom*, 2016, vol. 24, no. 3.

11. Kuznetsov G.N., Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A., Prosovetskiy D.Y. Interferometric method of evaluating the speed of the sound source in an ocean waveguide. [Kuznetsov G.N., Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A., Prosovetskiy D.Y. Interferometricheskij metod ocenki skorosti istochnika zvuka v okeanicheskem volnovode]. *Phys. Wave Phenom — Phys. Wave Phenom*, 2016, vol. 24, no. 4.

12. Landsberg G.S. Optics. [Landsberg G.S. Optika]. Moscow: Science, 1976. 928 p.

13. Besedina T.N., Kuznetsov G.N., Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A., Prosovetskiy D.Y. Estimation of the Depth of an Immobile Sound Source in Shallow Water. *Phys. Wave Phenom*. 2015, vol. 23, no. 4, pp. 292–303.

Кузькин Венедикт Михайлович, главный научный сотрудник, НЦВИ ИОФ РАН, Москва, Россия
E-mail: kuzkin@orc.ru
Tel.: +7(499)503-83-84

Пересёлков Сергей Алексеевич, профессор кафедры математической физики ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: pereselkov@yandex.ru
Tel.: +7(473)220-87-48

Просовецкий Дмитрий Юрьевич, аспирант кафедры математической физики ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: prosovetskiy@gmail.com
Tel.: +7(473)220-87-48

Kuz'kin Venedikt Mikhaylovich, Leading Research Fellow, Wave Research Center, Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: kuzkin@orc.ru
Tel.: +7(499)503-83-84

Prosovetskiy Sergey Alexeevich, Professor of the Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: pereselkov@yandex.ru
Tel.: +7(473)220-87-48

Prosovetskiy Dmitriy Yur'yevich, Postgraduate Student of the Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: prosovetskiy@gmail.com
Tel.: +7(473)220-87-48

*Казначеев Илья Викторович, аспирант кафедры математической физики ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: kaznacheev.ilya@gmail.com
Tel.: +7(473)220-87-48*

*Kaznacheev Ilya Viktorovich, Postgraduate Student of the Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kaznacheev.ilya@gmail.com
Tel.: +7(473)220-87-48*