УДК 531.32

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦЫ ПО ЗАДАННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЕЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ ОТ ЭНЕРГИИ ИЛИ АМПЛИТУДЫ

С. А. Кочкин

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 12.07.2016 г.

Аннотация. В данной работе на основе закона сохранения энергии в точном виде получены выражения для потенциальной энергии классической частицы по известной степенной или линейной зависимости периода одномерного финитного движения частицы от ее полной механической энергии. Также найдены выражения для потенциальной энергии частицы в случае заданной степенной или линейной зависимости периода от амплитуды колебаний частицы. Рассмотрены условия применимости полученных аналитических выражений, а также проведено сравнение результатов с известной потенциальной энергией в частном случае гармонических колебаний частицы, когда период ее колебаний не зависит ни от энергии, ни от амплитуды.

Ключевые слова: одномерное финитное движение, потенциальная энергия во внешнем поле, неизохронность, нелинейные колебания.

DETERMINATION OF THE POTENTIAL ENERGY OF A PARTICLE FROM SPECIFIED DEPENDENCE OF THE PERIOD OF OSCILLATIONS ON ENRGEY OR AMPLITUDE

S. A. Kochkin

Abstract. In this paper on the basis of the law of conservation of energy expressions for the potential energy of a classical particle from the known power-law or linear dependence of the period of one-dimensional finite movement of a particle on its total mechanical energy are precisely received. Expressions for the potential energy of a particle in case of the given power-law or linear dependence of the period of oscillation on amplitude are also found. Conditions of applicability of the received analytical expressions are considered, and also comparison of results with the known potential energy in the particular case of simple harmonic oscillations of a particle when the period of oscillation does not depend neither on energy, nor on amplitude is carried out.

Keywords: one-dimensional finite movement, potential energy in an external field, non-isochronism, nonlinear oscillations.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании многих теоретических и прикладных задач классической механики [1], а также других разделов физики [2], возникает необходимость определения зависимости периода или частоты колебаний от полной энергии частицы (или той или иной нелинейной системы), совершающей финитное классическое движение в некотором внешнем потенциальном поле. Однако иногда требуется решать обратную задачу – задачу нахождения заранее неизвестной потенциальной энергии частицы, совершающей финитное движение в некотором – зачастую достаточно сложном – поле, по известной (или из экспериментальных данных, или из каких-либо теоретических обоснований) зависимости периода или частоты такого движения от полной механической энергии частицы. В общем виде для произвольной энергетической зависимости периода такая обратная задача не имеет готового решения, однако его можно получить в определенных частных случаях. В настоящей работе найдено точное решение такой задачи в случае известной степенной зависимости периода финитного движения частицы от ее полной энергии как наиболее распространенной для описания нелинейной взаимосвязи периода и энергии в нелинейных колебательных системах, а также точное решение задачи при нулевом и первом приближениях разложения энергетической зависимости периода частицы в степенной ряд [1], [2].

Также известно, что в классической механике гармонические колебания частицы или линейной колебательной системы обладают свойством изохронности, т. е. период таких колебаний не зависит от амплитуды. Однако изохронность гармонических колебаний имеет место до тех пор, пока выполнено требование малости таких колебаний, т. е. когда можно ограничиться лишь квадратичным членом в разложении потенциальной энергии частицы в ряд. В остальных ситуациях, а также в случае сложных и порой неизвестных потенциальных полей изохронность нарушается, что является свойством многих нелинейных колебательных систем, – иначе говоря, появляется зависимость периода колебаний от амплитуды, причем вид этой зависимости для разных внешних полей, очевидно, различная. Поэтому в данной работе также получено точное решение задачи нахождения потенциальной энергии частицы, совершающей колебательное движение во внешнем поле, в случае известной степенной амплитудной зависимости периода колебаний частицы, также имеющей место для многих нелинейных колебательных систем [1], [2]. Кроме этого, как и в случае энергетической зависимости периода, найдено решение задачи при известной зависимости периода от амплитуды в нулевом и первом приближениях разложения такой зависимости в ряд.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим классическую частицу массой m, которая может совершать финитное движение во внешнем поле с потенциальной энергией $U(x)$ и с полной механической энергией E ($E > 0$). Будем в дальнейшем везде предполагать, что $U(x)$ – монотонно возрастающая при $x > 0$ функция, график которой симметричен относительно оси ординат, причем $U(0) = 0$. Тогда, предполагая отсутствие диссипативных сил, в силу закона сохранения энергии будем иметь

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

Проинтегрируем это уравнение, разделяя переменные, в результате получим выражение, связывающее период финитного движения $T(E)$ и потенциальную энергию $U(x)$ частицы в виде

$$T(E) = 2\sqrt{2m}\int\limits_0^{x_0(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}, \tag{1}$$

где $x_0(E)$ – точка поворота, являющаяся корнем уравнения $U(x_0) = E$.

В [3], решая интегральное уравнение (1) относительно неизвестной функции $U(x)$ в случае ее симметричного относительно оси ординат графика, была получена интегральная формула, связывающая координату и потенциальную энергию частицы по заданной зависимости периода колебаний от энергии:

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int\limits_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}. \tag{2}$$

Таким образом, вычислив интеграл в (2) по известной энергетической зависимости периода и разрешив полученное выражение относительно функции $U(x)$, можно определить искомую потенциальную энергию частицы.

Рассмотрим решение поставленной задачи в нижеследующих случаях заданной зависимости периода финитного движения частицы как от энергии, так и от амплитуды колебаний.

I СЛУЧАЙ: СТЕПЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРИОДА ОТ ЭНЕРГИИ

Будем считать, что известна степенная зависимость периода финитного движения частицы от ее полной энергии:

$$T(E) = T_0 E^n, \tag{3}$$

где T_0 – постоянный коэффициент пропорциональности, который только при $n = 0$ численно совпадает с периодом гармонических колебаний, т. е. в том случае, когда период не зависит от энергии колеблющейся частицы.

Вычисление интеграла в (2) с учетом (3), используя метод замены переменной, приводит к следующему результату

$$\int\limits_0^U \frac{T_0 E^n dE}{\sqrt{U-E}} = T_0 U^{n+1/2} B(1/2, n+1), \tag{4}$$

где $B(z, w)$ – бета-функция, определенная только при положительных аргументах [4]. Поэтому, очевидно, полученный результат справедлив лишь при условии $n > -1$.

Подставляя результат интегрирования (4) в (2), получим функцию $x(U)$ в следующем виде

$$x(U) = \frac{T_0}{2\sqrt{2\pi m}}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}U^{n+\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

где $\Gamma(n)$ – гамма-функция, через которую мы выразили полученную выше бета-функцию согласно формуле связи обеих этих функций [4].

Наконец, находя из (5) обратную функцию $U(x)$, приходим к точному виду потенциальной энергии частицы при известной степенной зависимости периода ее финитного движения от полной энергии:

$$U(x) = \left(\frac{2\sqrt{2\pi m}}{T_0}\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)}x\right)^{\frac{2}{2n+1}}. \tag{6}$$

Для того чтобы частица могла совершать финитное движение, необходимо, чтобы симметричная относительно оси ординат функция $U(x)$ была возрастающей при $x > 0$, а значит, наш полученный результат будет верен лишь при условии $n > -1/2$.

В частности, при $n = 0$, т. е. когда $T(E) = T_0 = const$, получим известный [3] вид потенциальной энергии частицы, совершающей гармонические колебания с периодом T_0:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}, \tag{7}$$

где k имеет смысл коэффициента квазиупругой силы, действующей на частицу, который, как следует из (6), связан с периодом колебаний и массой частицы также известным простым соотношением: $k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$.

Во всех остальных возможных случаях финитного движения ($n > -1/2$) потенциальная энергия частицы имеет более сложный вид и может быть записана следующим образом:

$$U(x) = k_n x^{\frac{2}{2n+1}}, \tag{8}$$

где введено обозначение для коэффициента

$$k_n = \left(\frac{2\sqrt{2\pi m}}{T_0} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)} \right)^{\frac{2}{2n+1}}. \tag{9}$$

II СЛУЧАЙ: ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРИОДА В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Для начала будем считать, что известна следующая зависимость периода финитного движения частицы от ее полной энергии $T(E)$:

$$T(E) = T_0 + \gamma E^n, \tag{10}$$

где T_0, γ и n – постоянные.

Тогда вычисляя интеграл в (2) с учетом (10) и результата интегрирования (4), получим функцию $x(U)$ в следующем виде

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \left(2T_0 U^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{\pi}\gamma\, \Gamma(n+1)}{\Gamma\,(n+3/2)} U^{n+\frac{1}{2}} \right). \tag{11}$$

Разрешая выражение (11) относительно неизвестной функции $U(x)$, в данном случае приходим к следующему уравнению для нахождения потенциальной энергии частицы:

$$U^{n+1/2} + aU^{1/2} - bx = 0, \tag{12}$$

где для краткости введены следующие обозначения:

$$a = \frac{2T_0\Gamma(n+3/2)}{\sqrt{\pi}\,\gamma\Gamma(n+1)}, \quad b = \frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma(n+3/2)}{\gamma\Gamma(n+1)}.$$

Очевидно, что для любого возможного действительного числа n уравнение (12) не имеет решения в явном виде. Анализ этого уравнения показал, что можно найти точное решение только в некоторых частных случаях. Например, при $n = 1/2$, т. е. при зависимости $T(E) =$

$T_0 + \gamma\sqrt{E}$, в ходе решения уже, очевидно, квадратного уравнения (12) получим следующее точное выражение для потенциальной энергии частицы:

$$U(x) = \frac{4\sqrt{2m}}{\gamma}x + \frac{8T_0^2}{\pi^2\gamma^2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{\pi^2\gamma\sqrt{2m}}{T_0^2}x}\right). \tag{13}$$

Далее рассмотрим решение уравнения (12) при $n = 1$, таким образом, будем искать потенциальную энергию частицы при заданной зависимости периода финитного движения частицы от ее полной энергии в линейном приближении:

$$T(E) = T_0 + \gamma E. \tag{14}$$

В результате при $n = 1$ придем к кубическому уравнению канонического вида

$$y^3 + ay - bx = 0,$$

где для удобства введена новая переменная $y = U^{1/2}$.

Воспользовавшись формулой Кардано [5] для решения подобных уравнений, в результате получим точное вещественное решение для потенциальной энергии частицы при известной линейной зависимости периода ее движения от полной энергии в виде

$$U(x) = \left(\sqrt[3]{\alpha x + \beta(x)} - \sqrt[3]{\beta(x) - \alpha x}\right)^2, \tag{15}$$

где для краткости введены обозначения: $\alpha = \dfrac{3\pi\sqrt{2m}}{4\gamma}$, $\beta(x) = \sqrt{\alpha^2x^2 + \left(\dfrac{T_0}{2\gamma}\right)^3}$. Легко проверить, что функция (15) является возрастающей при $x > 0$ и удовлетворяет условию $U(0) = 0$. Отметим также, что в нулевом приближении $T(E) = T_0$, т. е. когда период финитного движения частицы не зависит от ее энергии, из формулы (11) следует более простое выражение для функции $x(U)$:

$$x(U) = \frac{T_0}{\pi}\sqrt{\frac{U}{2m}},$$

после чего легко найти потенциальную энергию частицы в том же известном виде (7). Такой же результат можно получить и из формулы (15) при условии стремления постоянной γ к нулю.

Также отметим, что учет квадратичного члена, наряду с линейным, в разложении энергетической зависимости периода движения частицы (14) приводит к алгебраическому уравнению пятой степени, которое, согласно теореме Абеля [5], уже неразрешимо явно в радикалах, поэтому решение поставленной задачи в таком случае возможно лишь численными методами.

III СЛУЧАЙ: СТЕПЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРИОДА ОТ АМПЛИТУДЫ

Рассмотрим теперь решение поставленной задачи в случае, когда известна амплитудная зависимость периода колебаний частицы в виде

$$T(A) = T_0A^{\nu}, \tag{16}$$

где T_0 — постоянный коэффициент пропорциональности, который только при $\nu = 0$ численно совпадает с периодом гармонических колебаний, т. е. в том случае, когда период не зависит от амплитуды A.

Решение такой задачи можно свести к поиску решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения (1) относительно неизвестной функции $U(x)$, однако такое решение затруднительно [6], поэтому поступим более простым образом – будем основываться на полученном решении в выше рассмотренном первом случае. А именно: используя условие $E = U(A)$ и формулы (3), (6) и (16), после небольших преобразований можно получить точное выражение для потенциальной энергии частицы при известной степенной зависимости (16) периода ее колебаний от амплитуды в следующем виде

$$U(x) = \frac{8\pi m}{T_0^2}\left(\frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\Gamma(\mu)}\right)^2 x^{2-2\nu}, \tag{17}$$

где для краткости записи введено обозначение $\mu = \frac{2-\nu}{2-2\nu}$.

Так же, как и в первом случае, проанализируем: для того чтобы частица могла совершать колебательное движение, необходимо, чтобы рассматриваемая функция потенциальной энергии (17) была возрастающей при $x > 0$, а значит, полученный результат будет верен лишь при условии $\nu < 1$.

Отметим, что в частном случае $n = 0$, т. е. когда период колебаний не зависит от амплитуды ($T(E) = T_0$), получаем снова известный вид (7) потенциальной энергии частицы, совершающей гармонические колебания с периодом T_0.

IV СЛУЧАЙ: АМПЛИТУДНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРИОДА В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Пусть задана амплитудная зависимость периода колебаний частицы в линейном приближении

$$T(A) = T_0 + \lambda A, \tag{18}$$

где T_0 и λ – постоянные величины.

Для нахождения решения поставленной задачи в этом случае воспользуемся полученным результатом (13) для потенциальной энергии частицы при известной зависимости периода энергии в виде

$$T(E) = T_0 + \gamma\sqrt{E}. \tag{19}$$

Теперь будем считать амплитудные (или же энергетические) поправки к периоду T_0 малыми или, точнее говоря, пусть для функции (13) выполнено условие: $\pi^2\gamma\sqrt{2m}A/T_0^2 << 1$. Тогда, раскладывая функцию (13) в ряд, получим приближенное выражение для потенциальной энергии в виде

$$U(x) \approx \frac{kx^2}{2} - \frac{\sqrt{2}\gamma k^2 x^3}{16\sqrt{m}}, \tag{20}$$

где введено уже использовавшееся обозначение $k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$.

Согласно полученному выражению (20), условию $E = U(A)$ и формулам (18), (19), по аналогии с тем, как это было сделано в предыдущем случае, можно получить приближенное выражение для потенциальной энергии частицы при известной линейной зависимости периода ее колебаний от амплитуды в следующем виде

$$U(x) \approx \frac{kx^2}{2} - \frac{\lambda k^{3/2} x^3}{8\sqrt{m}}. \tag{21}$$

Наличие второго слагаемого в (21) явно свидетельствует об ангармоничности колебаний в случае амплитудной зависимости периода (18). Также подчеркнем, что выражение (21) получено в первом приближении малости отношения $\pi^2\gamma\sqrt{2m}A/T_0^2$, что, как нетрудно проверить, также эквивалентно условию малости отношения $\lambda A/T_0$, т. е. когда линейно зависящая от амплитуды поправка к периоду колебаний T_0 в выражении (18) считается малой. При этом очевидно, что в случае строгого равенства нулю постоянной λ из (21) получим известный вид (7) потенциальной энергии в случае гармонических колебаний частицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, исходя из закона сохранения энергии классической частицы, совершающей одномерное движение во внешнем потенциальном поле, получили решение задачи о нахождении ее потенциальной энергии по различным заданным энергетическим или амплитудным зависимостям периода финитного движения. Если задана степенная зависимость (3) периода от энергии, то выражение для потенциальной энергии частицы представимо в точном виде (6), если задана энергетическая зависимость периода в линейном приближении (14), то точное решение для потенциальной энергии имеет вид (15). В том случае, когда известна степенная зависимость периода от амплитуды колебаний (16), потенциальная энергия частицы представима в точном виде (17), в случае же зависимости периода колебаний частицы от амплитуды, заданной в линейном приближении (18), получено приближенное выражение (21) для потенциальной энергии частицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов, А. П. Нелинейные колебания / А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин. — М. : Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2002. — 292 с.

2. Заславский, Г. М. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. — М. : Наука, 1988. — 368 с.

3. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. 1. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 224 с.

4. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — М. : Наука, 1979. — 832 с.

5. Алексеев, В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях / В. Б. Алексеев. — М. : МЦНМО, 2001. — 192 с.

6. Манжиров, А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. — М. : Факториал, 2000. — 384 с.

REFERENCES

1. Kuznecov A.P., Kuznecov S.P., Ryskin N.M. Nonlinear oscillations. [Kuznecov A.P., Kuznecov S.P., Ryskin N.M. Nelinejnye kolebanija]. Moscow: Izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 2002, 292 p.

2. Zaslavskij G.M., Sagdeev R.Z. Introduction to nonlinear physics. From the pendulum to turbulence and chaos. [Zaslavskij G.M., Sagdeev R.Z. Vvedenie v nelinejnuju fiziku. Ot majatnika do turbulentnosti i haosa]. Moscow: Nauka, 1988, 368 p.

3. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theoretical Physics. Vol.1. Mechanics. [Landau L.D., Lifshitz E.M. Teoreticheskaja fizika. T. 1. Mehanika]. Moscow: FIZMATLIT, 2004, 224 p.

4. Abramovic M., Stigan I. Guide to special functions. [Abramovic M., Stigan I. Spravochnik po special'nym funkcijam]. Moscow: Nauka, 1979, 832 p.

5. Alekseev V.B. Abel's theorem in the tasks and examples. [Alekseev V.B. Teorema Abelja v zadachah i reshenijah]. Moscow: MCNMO, 2001, 192 p.

6. Manzhirov A.V., Poljanin A.D. Guide to integral equations: methods of solution. [Manzhirov A.V., Poljanin A.D. Spravochnik po integral'nym uravnenijam: Metody reshenija]. Moscow: Faktorial, 2000, 384 p.

Кочкин Сергей Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Северного (Арктического) федерального университета им. М. В. Ломоносова, Архангельск, Российская Федерация
E-mail: s.kochkin@narfu.ru
Тел.: 8–906–281–35–41

Kochkin Sergey Alekseevich, Candidate of physico-mathematical sciences, assistant professor of the Department of mathematical analysis, algebra and geometry of Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation
E-mail: s.kochkin@narfu.ru
Tel.: 8–906–281–35–41