УДК 519.624.3

АДАПТАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ*

С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.03.2015 г.

Аннотация. В работе метод конечных элементов адаптирован для решения граничной задачи четвертого порядка с производными по мере, которая возникает при моделировании малых деформаций стержня с локализованными особенностями (упругие опоры, импульсные внешние воздействия), расположенной вдоль отрезка $[0; 1]$. Такие особенности приводят к потере гладкости у решения. Для преодоления трудностей, которые возникают при этом, мы используем поточечный метод трактовки дифференциального уравнения, предложенный Ю. В. Покорным. Этот прием показал свою эффективность для граничных задач второго порядка с негладкими и разрывными решениями.

Получена оценка погрешности.

Ключевые слова: стержень, мера, интеграл Стилтьеса, импульсные воздействия, метод конечных элементов.

ADAPTATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR MATHEMATICAL MODEL WITH NONSMOOTH SOLUTIONS

S. A. Shabrov

Abstract. In the article the method of finite elements adapted to the boundary problem of fourth order derivative, which arises in modeling small deformations of the rod with localized features (elastic supports, impulse of external influence) that is located along the segment $[0; 1]$. Such features lead to the loss of smoothness of solutions. To overcome the difficulties that arise in this case, we use pointwise method of interpreting the differential equation proposed by Yu. V. Pokorny. This method proved to be effective for the second order boundary value problems with non-smooth and discontinuous solutions.

The estimate of the error are obtained.

Keywords: rod, measure, Stieltjes integral, impulse impacts, finite elements method.

В статье метод конечных элементов адаптируется для поиска приближенного решения математической модели с неизвестной функцией

$$\left(pu''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x) + u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x), \tag{1}$$

где $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причем $p(x) > 0$. Среди всех решений (1) будем искать то, которое удовлетворяет условиям

$$u(0) = 0, u'_x(0) = 0, \tag{2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14–01–00867).

$$u''_{xx}(1) = 0, u'''_{xxx}(1) = 0. \tag{3}$$

Модель (1)–(3) возникает при описании малых поперечных деформаций стержневой системы (расположенной вдоль отрезка $[0;1]$), возникающие под воздействием силы $dF(x)$, которая приложена перпендикулярно положению равновесия, один конец которой защемлен, а другой — свободен; коэффициент $p(x)$ характеризует материал из которого сделан стержень; система помещена во внешнюю среду с локальным коэффициентом упругости dQ. Скачки $Q(x)$ соответствуют локализованным особенностям типа пружина.

Решение модели будем искать в классе E функций $u(x)$, каждая из которых дважды непрерывно дифференцируема на $[0;1]$, вторая производная — абсолютно непрерывна на $[0;1]$, третья производная — σ-абсолютно непрерывна на $[0;1]$.

Изучение модели осуществляется с использованием поточечного подхода, который был предложен еще Ф. Аткинсоном [1] и М. Г. Крейном [2]. Однако, через некоторое время развитие этого направления остановилось, и только после выхода работ Ю. В. Покорного [3], [4], в которых наряду с интегралом Стилтьеса предлагалось использование производных Радона–Никодима, оно получило новый импульс. Последнее показало свою эффективность и для краевых задач второго порядка (см., напр., [5], [6]), и для четвертого — [7], [8], и для нелинейных граничных задач с негладкими решениями [9], и для гиперболических уравнений с производными по мере [10], [11]. Объяснение этому довольно простое: возникающее дифференциальное уравнение является обыкновенным, т.е. поточечным, что, в отличие от теории обобщенных функций, позволяет привлекать к анализу решений математических моделей качественные методы (типа теорем Ролля).

1. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Для приближенного решения уравнения (1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Для этого разобьем промежуток $[0;1]$ на равные части (узловыми) точками $\{x_k\}_{k=0}^{k=n}$, положив $x_k = k \cdot h$, где $h = \dfrac{1}{n}$. Базисные функции зададим следующим образом

$$\varphi_{2k-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^2 - 2\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^3 & \text{для} \quad x \in [x_k - h, x_k], \\ 1 - 3\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^3 & \text{для} \quad x \in [x_k, x_k + h], \\ 0 & \text{для} \quad \text{остальных } x. \end{cases} \tag{4}$$

$$\varphi_{2k}(x) = \begin{cases} (x-x_k)\left(1 + \dfrac{x-x_k}{h}\right)^2 & \text{для} \quad x \in [x_k - h, x_k], \\ (x-x_k)\left(1 - \dfrac{x-x_k}{h}\right)^2 & \text{для} \quad x \in [x_k, x_k + h], \\ 0 & \text{для} \quad \text{остальных } x. \end{cases} \tag{5}$$

Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения и значения ее производной в узловых точках, и, в связи с этим, будем использовать в уравнении вместо $u(x)$ функцию

$$v(x) = \sum_{i=-1}^{2n} v_i \varphi_i(x), \tag{6}$$

где v_{2i-1} и v_{2i} — значения функции и ее производной в узловой точке x_i. В силу граничных условий (2) имеем

$$v_{-1} = v_0 = 0.$$

Тогда, равенство (6) принимает вид

$$v(x) = \sum_{i=1}^{2n} v_i \varphi_i(x), \tag{7}$$

Уравнение (1) умножим на $\varphi_k(x)$, и проинтегрируем по мере σ по всему отрезку [0,1]:

$$\int_0^1 \left(pu''\right)''_{x\sigma}(x)\varphi_k(x)\,d\sigma + \int_0^1 u(x)Q'_\sigma(x)\varphi_k(x)\,d\sigma = \int_0^1 F'_\sigma(x)\varphi_k(x)\,d\sigma. \tag{8}$$

Первый интеграл в левой части дважды проинтегрируем по частям:

$$\int_0^1 \left(pu''\right)''_{x\sigma}(x)\varphi_k(x)\,d\sigma = \left(pu''\right)'_x(x)\varphi_k(x)\Big|_0^1 - \left(pu''\right)(x)\varphi'_k(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(pu''\right)(x)\varphi''_k(x)\,dx. \tag{9}$$

Тогда равенство (8), с учетом (9), принимает вид

$$\int_0^1 \left(pu''\right)(x)\varphi''_k(x)\,dx + \left(pu''\right)'_x(1)\varphi_k(1) - \left(pu''\right)(1)\varphi'_k(1) +$$

$$+ \int_0^1 \varphi_k(x)u(x)Q'_\sigma(x)\,d\sigma = \int_0^1 \varphi_k(x)F'_\sigma(x)\,d\sigma, \tag{10}$$

или, с учетом граничных условий $u''(1) = u'''(1) = 0$, равенство (10) равносильно

$$\int_0^1 \left(pu''\right)(x)\varphi''_k(x)\,dx + \int_0^1 \varphi_k(x)u(x)Q'_\sigma(x)\,d\sigma(x) = \int_0^1 \varphi_k(x)F'_\sigma(x)\,d\sigma(x), \tag{11}$$

Подставим сюда вместо $u(x)$ функцию (7). Получим систему из $2n$ уравнений относительно $2n$ неизвестных $\{v_1,v_2,\ldots,v_{2n}\}$

$$\sum_{i=1}^{2n} v_i \int_0^1 p\varphi''_i(x)\varphi''_k(x)\,dx + \sum_{i=1}^{2n} v_i \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_k(x)Q'_\sigma(x)\,d\sigma = \int_0^1 \varphi_k(x)F'_\sigma(x)\,d\sigma \tag{12}$$

$(k = 1, 2, \ldots, 2n)$.

После решения линейной системы $AV = \overline{F}$ (здесь $V = (v_1, \ldots, v_{2n})$ и $\overline{F}$ — вектор-столбец, состоящий из правых частей (12), A — матрица системы (12)) мы получим приближенное решение $v(x)$, которое в тоже время будет аппроксимацией Ритца. Покажем, что линейная система $AV = \overline{F}$ имеет единственное решение.

Введем обозначение

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_0^1 p\varphi''\psi''\,dx + \int_0^1 \varphi\psi Q'_\sigma\,d\sigma. \tag{13}$$

Очевидно, что это билинейный симметричный функционал в пространстве непрерывных на [0,1] функций, имеющих вторую производную, суммируемую с квадратом, и удовлетворяющих условиям $u(0) = u'(0) = 0$. Благодаря положительности функции $p(x)$ и неубывания $Q(x)$ он еще и невырожденный:

$$\langle\varphi,\varphi\rangle = \int_0^1 p\varphi''\varphi''\,dx + \int_0^1 \varphi\varphi\,dQ > 0, \quad \langle\varphi,\varphi\rangle = 0 \Longleftrightarrow \varphi = 0. \tag{14}$$

Поэтому, может служить скалярным произведением. Тогда коэффициенты уравнений (12)

$$A_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = A_{ji} \tag{15}$$

образуют матрицу Грамма системы линейно независимых векторов φ_k. Поэтому, определитель матрицы A отличен от нуля, следовательно, система (12) имеет единственное решение.

Замечание 1. *Алгоритм был построен для случая $r(x) \equiv 0$. Если $r(x) \not\equiv 0$, то коэффициент в i-м уравнении при j-ой переменной заменяется на*

$$\int_0^1 {\varphi_i}''_{xx} {\varphi_j}''_{xx}\, dx + \int_0^1 r {\varphi_i}'_x {\varphi_j}'_x\, dx + \int_0^1 \varphi_i \varphi_j\, dQ.$$

Замечание 2. *Построение алгоритма было осуществлено для граничных условий (2)–(3) с одной целью: не затенять сути дела. Для других граничных условий алгоритм строится аналогично.*

2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Здесь доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (1)–(3), $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N равных частей отрезка $[0;1]$. Тогда справедлива оценка*

$$a(u-v, u-v) \leqslant C \cdot h^2,$$

где $h = 1/N$, C не зависит от h, и $a(u,u)$ — энергетическая норма:

$$a(u,u) = \int_0^1 u''^2\, dx + \int_0^1 u^2\, dQ.$$

Доказательство. Покажем, что задача решения математической модели (1)–(3) эквивалентна задаче минимизации квадратичного функционала на множестве $H^{4,\sigma}$ — непрерывно дифференцируемых функций, вторая производная — абсолютно непрерывных на $[0;1]$ функций, третья производная которых σ-абсолютно непрерывна на $[0;1]$, причём $u''''_{xxx\sigma}$ σ-суммируема с квадратом на $\overline{[0;1]}_\sigma$ — расширении отрезка $[0;1]$ в котором каждая точка ξ разрыва функции $\sigma(x)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi-0; \xi; \xi+0\}$ (см., напр., [5]–[7]).

В самом деле, решение $u(x)$ математической модели (1)–(3), как показано в работе [7], принадлежит $H^{4,\sigma}$.

Составим функционал $I(v) = (Lv,v) - 2(F'_\sigma, v)$, где $Lu \equiv u''''_{xxx\sigma} + uQ'_\sigma$ и $(u,v) = \int_0^1 uv\, d\sigma$.

Выражение (Lv,v) проинтегрируем по частям:

$$(Lv,v) = v'''_{xxx} v''_{xx}\Big|_0^1 - v''_{xx} v'_x\Big|_0^1 + \int_0^1 {v''_x}^2\, dx + \int_0^1 v^2\, dQ. \tag{16}$$

Таким образом, функционал, который необходимо минимизировать, принимает вид

$$I(v) = \int\limits_0^1 v''^2_{xx}\,dx + \int\limits_0^1 v^2\,dQ - 2\int\limits_0^1 v\,dF, \tag{17}$$

так как внеинтегральные слагаемые в (16) пропадут в силу граничных условий (2)–(3).

Решение математической модели (1)–(3) и дает минимум функционалу (17) на $H_0^{4,\sigma}$, где $H_0^{4,\sigma}$ — подпространство $H^{4,\sigma}$ функций, удовлетворяющих условию $u(0) = u'_x(0) = 0$.

Так как функционал (17) не содержит четвертых производных, то его можно определить на функциях, у которых вторая производная суммируема с квадратом, т. е. на $\widehat{H}_0^2$ — пополнении $H_0^{4,\sigma}$ по норме

$$\|u\|^2_{\widehat{H}_0^2} = \int\limits_0^1 u''^2_{xx}\,dx + \int\limits_0^1 u^2\,dQ.$$

Отметим, что такое расширение не может привести к уменьшению минимума: каждое новое значение $I(v)$ есть предел $I(v_n)$, где $v_n \in H_0^{4,\sigma}$ и $\|v_n - v\|_{\widehat{H}_0^2} \longrightarrow 0$, если u — функция из $\widehat{H}_0^2$ на которой функционал $I(v)$ принимает наименьшее значение, и если $u \in H_0^{4,\sigma}$ доставлял минимум $I(v)$, то она становится минимизирующей на $\widehat{H}_0^2$.

В обратную сторону: минимизация $I(v)$ на $\widehat{H}_0^2$ приводит к математической модели (1)–(3) как показано в [7].

Таким образом, $I(v)$ мы можем минимизировать на $\widehat{H}_0^2$. Другими словами, в качестве базисных функций мы можем действительно брать $\varphi_k(x)$.

Интерполянт $u_I(x)$ точного решения $u(x)$ математической модели (1)–(3) можно выразить через базисные следующим образом

$$u_I(x) = \sum_{k=1}^n u(x_k)\varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^n u'_x(x_k)\varphi_{2k}(x).$$

Через $w(x)$ обозначим разность $u(x) - u_I(x)$. Оценим $|w(x)|$ в энергетической норме

$$a(u,u) = \int\limits_0^1 u''^2\,dx + \int\limits_0^1 u^2\,dQ;$$

приближенное решение $v(x)$ дифференциальной модели (1), полученное с помощью адаптированного метода конечных элементов, как мы увидим позже, будет еще ближе.

Для оценки $|w(x)|$ и $|w'(x)|$ нам понадобятся оценки $|w'''_{xxx}(x_k+0)|$ и $|w''_{xx}(x_k)|$.

Для $|w'''(x_k+0)|$ имеем

$$w'''(x_k+0) = u'''(x_k+0) + u(x_{k+1})\frac{12}{h^3} - u'(x_{k+1})\frac{6}{h^2} - u(x_k)\frac{12}{h^3} - u'(x_k)\frac{6}{h^2},$$

или, после несложных преобразований,

$$w'''(x_k+0) = \frac{6}{h^3}u'''(x_k+0)\frac{h^3}{6} + \frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s} u''(t)\,dt\,ds - \frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_k} u''(t)\,dt\,ds =$$

$$= \frac{6}{h^3}u'''(x_k+0)\left(-\frac{h^3}{6}\right) + \frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k+0}^{t} u'''(\tau)\,d\tau\,dt\,ds + \frac{6}{h^3}u'''(x_k+0)\frac{h^3}{3} -$$

$$-\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k+0}^{t} u'''(\tau)\,d\tau\,dt\,ds=$$

$$=\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k+0}^{t}(u'''(\tau)-u'''(x_k+0))\,d\tau dt ds+\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k+0}^{t}(u'''(x_k+0)-u'''(\tau))\,d\tau\,dt\,ds.$$

Из последнего равенства находим

$$|w'''(x_k+0)|\leqslant\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u''')\cdot 3, \tag{18}$$

где $\bigvee\limits_{\alpha}^{\beta}(g)$ — полная вариация функции $g(x)$ на множестве $[\alpha;\beta]$.

Далее, оценим $|w''(x_k)|$. Из равенства

$$w''_{xx}(x_k)=u''(x_k)-\frac{6}{h^2}u(x_{k+1})+\frac{2}{h}u'(x_{k+1})+\frac{6}{h^2}u(x_k)+\frac{4}{h}u'(x_k)$$

последовательно находим

$$w''_{xx}(x_k)=u''(x_k)-\frac{2}{h^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(2u'(s)-2u'(x_k)+u'(s)-u'(x_{k+1}))\,ds=$$

$$=u''(x_k)-\frac{2}{h^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\left(2\int\limits_{x_k}^{s}u''(t)\,dt-\int\limits_{s}^{x_{k+1}}u''(t)\,dt\right)ds=$$

$$=\frac{2}{h^2}u''(x_k)h^2-\frac{2}{h^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}2\int\limits_{x_k}^{s}u''(t)\,dt\,ds-\frac{2}{h^2}u''(x_k)\frac{h^2}{2}+\frac{2}{h^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}u''(t)\,dt\,ds=$$

$$=\frac{2}{h^2}\cdot 2\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}(u''(x_k)-u''(t))\,dt\,ds+\frac{2}{h^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}(u''(t)-u''(x_k))\,dt\,ds.$$

Отсюда вытекают оценки

$$|w''_{xx}(x_k)|\leqslant\bigvee_{x_k}^{x_{k+1}}(u'')\cdot 3\quad\text{ и }\quad|w''_{xx}(x_k)|\leqslant\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''|\cdot 6. \tag{19}$$

Оценим теперь $|w(x)|$, когда $x\in[x_k,x_{k+1}]$. Так как $w(x_k)=w'_x(x_k)=0$, то

$$w(x)=\int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{x_k}^{s}\left(w''_{xx}(x_k)+\int\limits_{x_k+0}^{t}w'''_{xxx}(x_k+0)+\int\limits_{x_k+0}^{\tau}u''''_{xxx\sigma}\,d\sigma\right)d\tau\,dt\,ds=$$

$$=w''_{xx}(x_k)\frac{(x-x_k)^2}{2}+w'''_{xxx}(x_k+0)\frac{(x-x_k)^3}{6}+\int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k+0}^{t}\int\limits_{x_k+0}^{\tau}u''''_{xxx\sigma}\,d\sigma\,d\tau\,dt\,ds.$$

Поэтому, с учетом полученных ранее оценок для $|w''_{xx}(x_k)|$ и $|w'''_{xxx}(x_k+0)|$,

$$|w(x)| \leqslant |w''_{xx}(x_k)| \cdot \frac{h^2}{2} + |w'''_{xxx}(x_k+0)| \cdot \frac{h^3}{6} + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^3}{6} \leqslant$$

$$\leqslant 6 \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot \frac{h^2}{2} + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 \cdot \frac{h^3}{6} + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^3}{6}.$$

А так как h — малая величина, то можно записать

$$|w(x)| \leqslant C_{k,1} \cdot \frac{h^2}{2},$$

где

$$C_{k,1} = 6 \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma).$$

Так как

$$w'(x) = w''_{xx}(x_k)(x-x_k) + w'''_{xxx}(x_k+0)\frac{(x-x_k)^2}{2} + \int\limits_{x_k}^{x} \int\limits_{x_k+0}^{s} \int\limits_{x_{k+0}}^{t} u'''_{xxx\sigma} d\sigma dt ds,$$

то

$$|w'(x)| \leqslant |w''_{xx}(x_k)| \cdot h + |w'''_{xxx}(x_k+0)| \frac{h^2}{2} + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u'''_{xxx}(x)| \cdot \frac{h^2}{2} \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma),$$

или, с учётом оценок (19), (18),

$$|w'(x)| \leqslant 6 \cdot \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''(x)| \cdot h + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u''') \cdot 3 \cdot \frac{h^2}{2} +$$

$$+ \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u'''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^2}{2} \leqslant C_{k,1} \cdot h.$$

Далее, из равенства

$$w''_{xx}(x) = w''_{xx}(x_k) + w'''_{xxx}(x_k+0)(x-x_k) + \int\limits_{x_k+0}^{x} \int\limits_{x_k+0}^{s} u''''_{xxx\sigma} \, d\sigma \, ds$$

вытекает оценка для вариации

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_k-0} (w''_{xx}) \leqslant |w'''_{xxx}(x_k+0)| \cdot h + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}} (\sigma) \cdot h \leqslant C_{k,2} \cdot h,$$

где

$$C_{k,2} = \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u''') \cdot 3 + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_{k+0}}^{x_{k+1}-0} (\sigma).$$

Оценим теперь близость $u_I(x)$ к $u(x)$ по энергетической норме, т. е. оценим $a(w,w)$:

$$a(w,w) = \int\limits_0^1 w''^2_{xx} \, dx + \int\limits_0^1 w^2 \, dQ.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^1 w''^2_{xx}\,dx = w''_{xx}w'_x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 w'_x\,dw''_{xx} = -\int\limits_0^1 w'\,dw'',$$

так как $w'_x(0) = w'_x(1) = 0$. Далее,

$$\int\limits_0^1 w'_x\,dw''_{xx} = \sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w'_x\,dw''_{xx} + w'_x(0)\Delta^+ w''_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{N-1} w'_x(x_k)\Delta w''_{xx}(x_k) + w'_x(1)\Delta^- w''_{xx}(1).$$

Все внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, так как $w'_x(x_k) = 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots, N$. На основании оценок, полученных ранее, получаем

$$\left|\int\limits_0^1 w'_x\,dw''_{xx}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|w'_x(x)|\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(w''_{xx}) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1}\cdot h\cdot C_{k,2}\cdot h = h^2\sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1}\cdot C_{k,2},$$

или, вспоминая определения $C_{k,1}$ и $C_{k,2}$, будем иметь

$$\left|\int\limits_0^1 w'_x\,dw''_{xx}\right| \leqslant h^2\sum_{k=0}^{N-1}\left(6\cdot\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''_{xx}(x)| + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u'''_{xxx})\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''''_{xxx\sigma}(x)|\cdot\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma)\right)\times$$
$$\times\left(\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u'''_{xxx})\cdot 3 + \sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''''_{xxx\sigma}(x)|\cdot\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma)\right).$$

Так как

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u'''_{xxx}) \leqslant \sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''''_{xxx\sigma}(x)|\cdot\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma)$$

(вытекает из равенства $u'''_{xxx}(x) = u'''_{xxx}(x_k+0) + \int\limits_{x_k+0}^{x} u''''_{xxx\sigma}\,d\sigma$), то последнее неравенство принимает вид

$$\left|\int\limits_0^1 w'_x\,dw''_{xx}\right| \leqslant$$
$$\leqslant h^2\left(6\cdot\sup_{0<x<1}|u''_{xx}(x)| + 2\cdot\sup_{0<x<1}|u''''_{xxx\sigma}(x)|\bigvee_0^1(\sigma)\right)\sum_{k=0}^{N-1}4\cdot\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''''_{xxx\sigma}(x)|\cdot\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \leqslant$$
$$\leqslant h^2\cdot 8\cdot\left(3\cdot\sup_{0<x<1}|u''_{xx}(x)| + \sup_{0<x<1}|u''''_{xxx\sigma}(x)|\cdot\bigvee_0^1(\sigma)\right)\times\sup_{0<x<1}|u''''_{xxx\sigma}(x)|\cdot\bigvee_0^1(\sigma) \leqslant h^2\cdot\widehat{C}_1, \tag{20}$$

где $\widehat{C}_1$ зависит только от коэффициентов уравнения $u''''_{xxx\sigma} = -uQ'_\sigma + F'_\sigma$.

Для слагаемого $\int\limits_0^1 w^2\,dQ$ последовательно находим

$$\int\limits_0^1 w^2\,dQ = \sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w^2\,dQ + \sum_{k=1}^{N-1} w^2(x_k)\Delta Q(x_k) + w^2(0)\Delta^+ Q(0) + w^2(1)\Delta^- Q(1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w^2\, dQ \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \left(6 \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot \frac{h^2}{2} + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 \cdot \frac{h^3}{6} + \right.$$

$$\left. + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^3}{6} \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant h^3 \left(\sup_{0<x<1} |u''_{xx}| + \bigvee_0^1 (u'''_{xxx}) \cdot \frac{h}{2} + \sup_{0<x<1} |u''''_{xxx\sigma}| \bigvee_0^1 (\sigma) \frac{h}{2} \right) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot h + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \frac{h^2}{2} + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \frac{h^2}{6} \right) \leqslant$$

$$\leqslant h^3 \left(\sup_{0<x<1} |u''_{xx}| + \bigvee_0^1 (u'''_{xxx}) + \sup_{0<x<1} |u''''_{xxx\sigma}| \bigvee_0^1 (\sigma) \right)^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{6} \right) \leqslant h^3 \cdot \widehat{C}_3, \quad (21)$$

так как $\sum_{k=0}^{N-1} \left(h + \frac{2h^2}{3} \right) = h \cdot N + 2h^2 \cdot N = 1 + 2h \leqslant 3$ (h мало и изначально может быть взято меньшим единице); константа $\widehat{C}_3$ от h не зависит.

Соединяя теперь неравенства (20) и (21) мы получим требуемое неравенство.

Остается показать, что интерполянт дает приближение не лучше, чем $v(x)$. Это утверждение основано на аналоге классическому результату теории конечным элементов (см., напр., [12]), в именно

Предположим, что $u_0(x)$ минимизирует $I(u)$ на множестве $\widehat{H}_0^2$, H_N — конечномерное его подпространство. Тогда

1) *минимум $I(v_h)$ и минимум $\langle u - v_h, u - v_h \rangle$, v_h пробегает подпространство H_N, достигается на одной и той же функции u_h.*

2) *по отношению к энергетическому скалярному произведению u_h есть проекция u на H_N, или, что то же самое, ошибка $u - u_h$ ортогональна H_N:*

$$\langle u - u_h, v_h \rangle = 0 \text{ для всех } v_h \in H_N. \quad (22)$$

3) *функция u_h, на которой достигается минимум, удовлетворяет условию*

$$\langle u_h, v_h \rangle = (F'_\sigma, v_h) \text{ для всех } v_h \in \widehat{H}_0^2. \quad (23)$$

и

$$\langle u, v \rangle = (F'_\sigma, v) \text{ для всех } v \in H_N. \quad (24)$$

Как и в классической теории (см., напр., [12]), для нас эта теорема ключевая. Более того, все три ее части тесно связаны.

Из 1) следует 2): в пространстве со скалярным произведением функция из подпространства H_N, ближайшая к заданной функции u, всегда является ее проекцией на H_N. Наоборот, 1) вытекает из 2):

$$\langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h \rangle = \langle u - u_h, u - u_h \rangle - 2\langle u - u_h, v_h \rangle + \langle v_h, v_h \rangle.$$

Если справедливо равенство (22), то

$$\langle u - u_h, u - u_h \rangle \leqslant \langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h \rangle.$$

Равенство возможно, только когда $\langle v_h, v_h\rangle = 0$, т. е. когда $v_h = 0$. Таким образом, u_h — единственная функция на которой $\langle u - u_h, u - u_h\rangle$ достигает минимум, и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из 3): если равенство (24) справедливо для всех $v \in \widehat{H}_0^2$, то оно справедливо и для $v_h \in H_N$; вычитая из него (23), получаем утверждение второй части.

Осталось доказать утверждение 3) — из него вытекает 2), и из него следует 1). Если u_h минимизирует $I(u)$ на H_N, то

$$I(u_h) \leqslant I(u_h + \varepsilon v_h)$$

для всех ε и v_h, или, вспоминая выражение $I(u)$ через $\langle u, u\rangle$ и (F'_σ, u):

$$\langle u_h, u_h\rangle - 2(F'_\sigma, u_h) \leqslant \langle u_h, u_h\rangle - 2(F'_\sigma, u_h) + 2\varepsilon\Big[\langle u_h, v_h\rangle - (F'_\sigma, v_h)\Big] + \varepsilon^2\langle v_h, v_h\rangle.$$

Поэтому

$$0 \leqslant 2\varepsilon\Big[\langle u_h, v_h\rangle - (F'_\sigma, v_h)\Big] + \varepsilon^2\langle v_h, v_h\rangle.$$

Так как это верно для сколь угодно малого числа ε любого знака, то $\langle u_h, v_h\rangle = (F'_\sigma, v_h)$. Последнее уравнение выражает равенство нулю первой вариации функционала $I(u)$ в точке u_h в направлении v_h. Таким образом, утверждение 3) и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аткинсон, Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М. : Мир, 1968. — 749 с.

2. Кац, И. С. Дополнение II к книге Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи / И. С. Кац, М. Г. Крейн. — М. : Мир, 1968. — 749 с. — С. 648–733.

3. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

4. Покорный, Ю. В. О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма–Лиувилля / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 1–4.

5. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

7. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

8. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

9. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11. № 4. — С. 13–17.

10. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

11. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

12. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М. : Мир, 1977. — 350 с.

REFERENCES

1. Atkinson F. Discrete and continuous boundary problems. [Atkinson F. Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi]. Moscow: Mir, 1968, 749 p.

2. Katz I.S., Crane M.G. Appendix II to the book F. Atkinson, Discrete and continuous boundary problems. [Kac I.S., Krejn M.G. Dopolnenie II k knige Atkinson F. Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi]. Moscow: Mir, 1968, 749 p, pp. 648–733.

3. Pokorny Yu.V. Stieltjes integral, and derivative as in ordinary differential equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

4. Pokorny Yu.V. On Stieltjes differentials in the generalized Sturm-Liouville. [Pokornyj, Yu.V. O differencialax Stilt'esa v obobshhennoj zadache Shturma–Liuvillya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2002, vol. 383, no. 5, pp. 1–4.

5. Pokorny Yu.V., Bakhtina G.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm oscillation method in spectral problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Phizmatlit, 2009, 192 p.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, Vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Shabrov S.A Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

8. Shabrov S.A. About the estimates of the function influence of a mathematical model fourth order. [Shabrov S.A. Ob ocenkax funkcii vliyaniya odnoj matematicheskoj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 168–179.

9. Davydova M. B., Shabrov S. A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, Vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

10. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon Uniqueness Of The Solution Mathematical Model Of Forced String Oscillation Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon O edinstvennosti resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, iss. 1, pp. 50–55.

11. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon About Unique Classical Solution Mathematical Model Of Forced Vibrations Rod System With Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

12. Strang G., Fix G.J. An Alalysis of the Finite Element Method. [Streng G., Fiks Dzh. Teoriya metoda konechnyx e'lementov]. Moscow: Mir, 1977, 350 p.

Шабров Сергей Александрович, доцент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru