УДК 517.927

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА*

Д. М. Поляков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.12.2015 г.

Аннотация. Методом подобных операторов изучаются спектральные свойства одномерного оператора Шрёдингера, определяемого краевыми условиями Дирихле. Получены асимптотические формулы для собственных значений, которые уточняют все известные результаты об асимптотике этого оператора. Изучено асимптотическое поведение полугруппы операторов, генератором которой является взятый со знаком минус оператор Шрёдингера. Также получены оценки отклонений спектральных проекторов и оценки равносходимости спектральных разложений.

Ключевые слова: одномерный оператор Шрёдингера, метод подобных операторов, асимптотика собственных значений, спектр, спектральный проектор.

SPECTRAL PROPERTIES OF 1D SCHRÖDINGER OPERATOR

D. M. Polyakov

Abstract. We study spectral properties of 1D Schrödinger operator with Dirichlet boundary conditions by method of similar operators. We obtain the asymptotic of eigenvalues for this operator, which is specified all known results on asymptotic of 1D Schrödinger operator. We study asymptotic behavior the semigroup generated by opposite Schrödinger operator. Also we obtain estimates for spectral projections and estimates for spectral decompositions.

Keywords: 1D Schrödinger operator, method of similar operators, asymptotic of eigenvalues, spectrum, spectral projection.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathrm{L}_2[0,\omega]$, $\omega > 0$, — гильбертово пространство функций суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x,y) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(\tau)\overline{y(\tau)}\,d\tau$, x, $y \in \mathrm{L}_2[0,\omega]$. Через $W_2^2[0,\omega]$ обозначим пространство Соболева $\{x \in \mathrm{L}_2[0,\omega] : x'$ абсолютно непрерывна, $x'' \in \mathrm{L}_2[0,\omega]\}$.

Рассмотрим оператор $S : D(S) \subset \mathrm{L}_2[0,\omega] \to \mathrm{L}_2[0,\omega]$, порожденный на промежутке $[0,\omega]$ дифференциальным выражением вида

$$s(y) = -y'' - vy, \quad v \in \mathrm{L}_2[0,\omega].$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16–31–00027, № 15–31–20241)

© Поляков Д. М., 2016

Область определения задается краевыми условиями Дирихле $D(S) = \{y \in W_2^2[0,\omega] : y(0) = y(\omega) = 0\}$. Если $v = 0$, то оператор второго порядка S мы будем обозначать через S_0. Оператор V является оператором умножения на потенциал v с областью определения $D(V) = \{y \in \mathrm{L}_2[0,\omega] : vy \in \mathrm{L}_2[0,\omega]\}$.

Оператор S_0 является хорошо изученным оператором с известными спектральными свойствами. Спектр $\sigma(S_0)$ и собственные функции оператора S_0 имеют следующий вид:

$\sigma(S_0) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$, где $\lambda_n = (\frac{\pi n}{\omega})^2$; соответствующее собственное подпространство имеет вид $E_n = \mathrm{Span}\{e_n\}$, где $e_n(t) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{\omega}t$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,\omega]$.

Предполагается, что потенциал v принадлежит гильбертову пространству $\mathrm{L}_2[0,\omega]$ и всюду используется его разложение в ряд Фурье:

$$v(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin\frac{\pi k}{\omega}t, \quad t \in [0,\omega].$$

Пусть P_n, $n \in \mathbb{N}$, — ортогональный проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\}$. Для любого $x \in \mathrm{L}_2[0,\omega]$ этот проектор определяется следующим образом:

$$P_n x = (x, e_n)e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Спектральному анализу одномерного оператора Шрёдингера посвящено очень большое количество работ. Замечательный обзор результатов был приведен П. Джаковым и Б. С. Митягиным в [1]. В нем устанавливалась взаимосвязь между асимптотическим поведением собственных значений оператора S с периодическими и антипериодическими краевыми условиями и асимптотикой длин лакун этого оператора. Для установления более точных оценок длин спектральных лакун использовалась асимптотика собственных значений оператора S с краевыми условиями Дирихле. Формулы для асимптотики собственных значений дифференциальных операторов, определяемых регулярными краевыми условиями на конечном промежутке, приведены в монографии [2, гл. 2, §9]. В монографии [3, гл. 1, §5, Теорема 1.5.1] были приведены уточненные асимптотические формулы для дифференциального оператора второго порядка с вещественным потенциалом, который принадлежит пространству Соболева $W_2^n[0,\pi]$, и определяется краевыми условиями Дирихле и Неймана-Дирихле. Также отметим работы [4], [5], в которых была получена асимптотика собственных значений для оператора S, где потенциал q принадлежит пространствам $W_2^{\theta-1}[0,1]$, $\theta \in [0,1]$.

Оператор S с вещественным негладким потенциалом был изучен в статье [6]. В ней приводилась асимптотика собственных значений и формула следа. Позднее в работе [7] была получена асимптотика собственных значений для дифференциального оператора четного порядка с вещественным негладким потенциалом. Результаты статьи [7] в частном случае согласуются с результатами [6].

Основным методом исследования является метод подобных операторов. Мы придерживаемся здесь аксиоматического подхода к изложению метода подобных операторов, развиваемого в работах [8] – [12].

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Базовым понятием метода подобных операторов лежит понятие подобных операторов. Хорошо известно, что они обладают рядом совпадающих спектральных свойств [10, Лемма 1]. Нашей основной задачей является сведение изучения оператора S к изучению подобного ему оператора, более удобного для исследования. Всюду далее, для краткости, гильбертово пространство $\mathrm{L}_2[0,\omega]$ будет обозначаться через $\mathcal{H}$.

Согласно схеме метода подобных оператора сначала необходимо построить допустимую тройку, состоящую из пространства допустимых возмущений $\mathfrak{U}$, а также двух трансформаторов (линейных операторов в пространстве линейных операторов) J_m и Γ_m (см. [10, Определение 2]).

В качестве пространства допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ будет выступать идеал операторов Гильберта-Шмидта. Следуя [13], мы напомним, что оператор $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ является оператором Гильберта- Шмидта, если конечна величина $\big(\sum\limits_{n,j=1}^{\infty}|(Xe_n, e_j)|^2\big)^{\frac{1}{2}}$ для некоторого ортонормированного базиса $\{e_j, j \geqslant 1\}$ из $\mathcal{H}$. Она не зависит от выбора ортонормированного базиса и совпадает с нормой Гильберта-Шмидта $\|X\|_2$ этого оператора.

Трансформаторы $J : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ и $\Gamma : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ на любом операторе $X \in \mathfrak{U}$ определим следующими равенствами

$$JX = \sum_{n=1}^{\infty} P_n X P_n, \quad \Gamma X = \sum_{\substack{n,j=1\\ n\neq j}}^{\infty} \frac{P_n X P_j}{\lambda_n - \lambda_j}.$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим трансформаторы $J_m : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $\Gamma_m : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ следующим образом

$$J_m X = J(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)}, \quad \Gamma_m X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}), \quad X \in \mathfrak{U},$$

где $P_{(m)} = \sum\limits_{l=1}^{m} P_l$. Таким образом, допустимая тройка $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ построена.

Так как оператор V не принадлежит пространству $\mathfrak{U}$, то необходимо сделать предварительное преобразование подобия (см. [12, § 3]). Имеют место следующие две леммы.

Лемма 1. *Оператор S подобен оператору $S_0 - B$, где B принадлежит $\mathfrak{U}$.*

Лемма 2. *Оператор $S_0 - B$ подобен оператору $S_0 - J_m X_*$, где оператор $X_* \in \mathfrak{U}$ есть решение уравнения*

$$X = B\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m B) - (\Gamma_m X) J_m (B \Gamma_m X) + B, \tag{1}$$

рассматриваемого в $\mathfrak{U}$. Решение этого уравнения можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B$ и т. д.

Лемма 1 посвящена предварительному преобразованию подобия, а в лемме 2 используется традиционный вариант метода подобных операторов, изложенный в [10, § 2]. Отметим, что спектр оператора $S_0 - J_m X_*$ легко вычисляется (для этого используется уравнение (1)). Учитывая что подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств, получаем что из лемм 1 и 2 будут следовать все основные результаты.

Мы введем следующую последовательность

$$\alpha(n) = \left(\sum_{1\leqslant p \leqslant n} \frac{|v_{n-p}|^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что эта последовательность суммируема с квадратом модуля. Теперь мы готовы сформулировать основные результаты.

Теорема 1. *Оператор S является оператором с компактной резольвентой. Его спектр допускает представление вида*

$$\sigma(S) = \sigma_{(m)} \bigcup \Big(\bigcup_{n \geqslant m+1} \sigma_n \Big), \tag{2}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим m, а множества $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda}_n\}$, $n \geqslant m+1$, одноточечны. Собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m+1$, представимы в виде

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega v(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega v(t)\cos\frac{2\pi n}{\omega}t\,\mathrm{d}t + \eta(n), \quad n \geqslant m+1, \tag{3}$$

где последовательность $\eta : \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m+1\} \to [1,\infty)$ допускает оценки вида $|\eta(n)| \leqslant M_{dir}\alpha(2n)/n$, $n \geqslant m+1$, для некоторой постоянной $M_{dir} > 0$.

Следствие 2. *Оператор S является спектральным (по Данфорду) (см. [14]).*

Полученная в теореме 1 формула остаточного члена в асимптотике собственных значений оператора S уточняет известные результаты об асимптотике, приведенных в работах [5] – [7].

Теорема 3. *Если v — функция ограниченной вариации, то для собственных значений $\widetilde{\lambda}_n$ имеет место следующее асимптотическое представление*

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi n}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega v(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega v(t)\cos\frac{2\pi n}{\omega}t\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \geqslant m+1.$$

Отметим, что эта теорема будет иметь место и для более гладких потенциалов.

Далее число m взято таким же, как и в теореме 1. Через $P_{(m)}$ обозначается проектор $\sum\limits_{k=1}^{m} P_k$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{N} \setminus \{1,\ldots,m\}$. Для множества $\Delta = \Delta(\Omega) = \{\lambda_k, k \in \Omega\}$ проектор Рисса $P(\Delta, S_0)$ определим равенством $P(\Delta, S_0)x = \sum\limits_{n\in\Omega} P_n x$, $x \in \mathcal{H}$. Теперь рассмотрим множество $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}(\Omega) = \cup_{k\in\Omega}\sigma_k$, где σ_k определяется в теореме 1. Символом $\widetilde{P}_n$ обозначим проектор Рисса, построенный по множеству σ_n, $n \geqslant m+1$. Тогда проектор $P(\widetilde{\Delta}, S)$ зададим равенством $P(\widetilde{\Delta}, S)x = \sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k x$, $x \in \mathcal{H}$.

Теорема 4. *Существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что спектр $\sigma(S)$ оператора S допускает представление вида (2). Тогда для любого подмножества Ω из $\mathbb{N} \setminus \{1,\ldots,m\}$ имеют место следующие оценки отклонений спектральных проекторов, построенных по операторам S и S_0:*

$$\|P(\widetilde{\Delta}, S) - P(\Delta, S_0)\|_2 \leqslant \frac{M}{k^{\frac{1}{2}}(\Omega)},$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная и $k(\Omega) = \min\limits_{k\in\Omega} k$.

Следствие 5. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов S и S_0:*

$$\left\| P(\sigma_{(m)}, S) + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - \sum_{k=0}^{n} P_k \right\|_2 \leqslant \frac{M_2}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad n \geqslant m+1,$$

где $M_2 > 0$ — некоторая постоянная.

Последний результат настоящей работы будет посвящен асимптотическому поведению аналитической полугруппы операторов (см. [15]), генератором которой является оператор $-S$.

Теорема 6. *Дифференциальный оператор* $-S$ *является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов* $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{H}$. *Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида* $T_{(m)}(t) \oplus T^{(m)}(t)$, *действующей в* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, *где* $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - P_{(m)})$. *Полугруппа* $T^{(m)}(t)$ *допускает представление вида:*

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}_k t} P_k x, \quad x \in \mathcal{H},$$

где собственные значения $\widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant m+1$, *определяются формулой (3).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джаков, П. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака / П. Джаков, Б. С. Митягин // Успехи математическах наук. — 2006. — Т. 61, № 4. — С. 77–182.

2. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

3. Марченко, В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — Киев : Наукова думка, 1977. — 330 с.

4. Савчук, А. М. О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Математические заметки. — 2006. — Т. 80, № 6. — С. 864–884.

5. Hryniv, R. Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials / R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // J. Funct. Analisys. — 2006. — V. 238. — P. 27–57.

6. Ахмерова, Э. Ф. Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов / Э. Ф. Ахмерова, Х. Х. Муртазин // Доклады АН. — 2003. — Т. 388, № 6. — С. 731–733.

7. Ахмерова, Э. Ф. Асимптотика спектра негладких возмущений дифференциальных операторов $2m$-го порядка / Э. Ф. Ахмерова // Математические заметки. — 2011. — Т. 90, № 6. — С. 833–844.

8. Баскаков, А. Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1986. — Т. 50, № 4. — С. 435–457.

9. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Известия РАН. Серия математическая. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 3–32.

10. Баскаков, А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Известия РАН. Серия математическая. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 3–28.

11. Поляков, Д. М. Спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка / Д. М. Поляков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 179–181.

12. Поляков, Д. М. Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями / Д. М. Поляков // Алгебра и анализ. — 2015. — Т. 27, № 5. — С. 117–152.

13. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1965. — 448 с.

14. Данфорд, Н. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. III / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М.: Мир, 1974. — 663 с.

15. Engel K.-J. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Graduate texts in mathematics. / K.-J. Engel, R. Nagel. — Springer-Verlag V. 194. New York, Berlin, Heidelberg, 1999. — 609 p.

REFERENCES

1. Djakov P.B., Mityagin B.S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators. [Dzhakov P., Mityagin B.S. Zony neustojchivosti odnomernyx periodicheskix operatorov Shryodingera i Diraka]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2006, vol. 61, no. 4, pp. 663–766.

2. Naimark M.A. Linear Differential Operators. Pts. 1 and 2. [Najmark M.A. Linejnye differencial'nye operatory]. Moscow: Nauka, 1969, 528 p.

3. Marchenko V.A. The Sturm-Liouville Operators and Their Applications. [Marchenko V.A. Operatory Shturma-Liuvillya i ix prilozheniya]. Kiev: Naukova Dumka, 1977, 330 p.

4. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. On the eigenvalues of the Sturm-Liouville operator with potentials from Sobolev spaces. [Savchuk A.M., Shkalikov A.A. O sobstvennyx znacheniyax operatora Shturma–Liuvillya s potencialami iz prostranstv Soboleva]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2006, vol. 80, no. 6, pp. 864–884.

5. Hryniv R., Mykytyuk Ya. Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials. J. Funct. Analisys, 2006, vol. 238, pp. 27–57.

6. Akhmerova E.F., Murtazin K.K. Spectral asymptotics for nonsmooth perturbations of differential operators and trace formulas. [Axmerova E'.F., Murtazin X.X. Spektral'naya asimptotika dlya negladkix vozmushhenij differencial'nyx operatorov i formuly sledov]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2003, vol. 388, no. 6, pp. 731–733.

7. Akhmerova E.F. Asymptotics of the Spectrum of Nonsmooth Perturbations of Differential Operators of Order $2m$. [Axmerova E'.F. Asimptotika spektra negladkix vozmushhenij differencial'nyx operatorov $2m$-go poryadka]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2011, vol. 90, no. 6, pp. 833–844.

8. Baskakov A.G. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. [Baskakov A.G. Teoriya o rasshheplenii operatora i nekotorye smezhnye voprosy analiticheskoj teorii vozmushhenij]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya — Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1986, vol. 50, no. 4, pp. 435–457.

9. Baskakov A.G. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. [Baskakov A.G. Spektral'nyj analiz vozmushhennyx nekvazianaliticheskix i spektral'nyx operatorov]. *Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya — Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 3–32.

10. Baskakov A.G., Derbushev A.V., Scherbakov A.O. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. [Baskakov A.G., Derbushev A.V., Shherbakov A.O. Metod podobnyx operatorov v spektral'nom analize nesamosopryazhennogo operatora Diraka s negladkim potencialom]. *Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, no. 3, pp. 3–28.

11. Polyakov D.M. Spectral properties of fourth order differential operator. [Polyakov D.M. Spektral'nye svojstva differencial'nogo operatora chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 179–181.

12. Polyakov D.M. Spectral analysis for fourth order differential operator with periodic and semiperiodic boundary conditions. [Polyakov D.M. Spektral'nyj analiz differencial'nogo operatora chetvertogo poryadka s periodicheskimi i antiperiodicheskimi kraevymi usloviyami]. *Algebra i analiz — Algebra i Analis*, 2015, vol. 27, no. 5, pp. 117–152.

13. Gohberg I.Ts.,Krein M.G. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators

in Hilbert Space. [Goxberg I.C.,Krejn M.G. Vvedenie v teoriyu linejnyx nesamosopryazhennyx operatorov v gil'bertovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1965, 448 p.

14. Dunford N.,Schwartz J.T. Linear Operators. Vol. 3: Spectral Operators. [Danford N., Shvarc Dzh.T. Linejnye operatory. Spektral'nye operatory. T. III]. Moscow: Mir, 1974, 663 p.

15. Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag V. 194. New York, Berlin, Heidelberg, 1999, 609 p.

Поляков Д.М., младший научный сотрудник НИИ математики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: DmitryPolyakow@mail.ru

Polyakov D.M., Junior Researcher, Research Institute of mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: DmitryPolyakow@mail.ru