УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТИПА ХОПФА НА ЛИНИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Л. Е. Платонова

Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина

Поступила в редакцию 05.05.2015 г.

Аннотация. Рассмотрено квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка типа Хопфа с начальными условиями, заданными в декартовых координатах на линии бесконечной длинны. Исследование разрешимости задачи Коши основано на методе дополнительного аргумента, который позволяет определить решение в исходных координатах без привлечения теоремы об обратной функции. Ранее была доказана теорема о локальной разрешимости с применением этого метода. В данной статье эта теорема приводится без доказательства вместе с леммами, на основе которых она доказывается. Доказана теорема о нелокальной разрешимости задачи Коши в заданной окрестности линии, несущей начальные данные. Доказательство теоремы опирается на глобальные оценки, в ходе вывода которых определены условия, обеспечивающие возможность продолжения решения задачи на всю заданную область.

Ключевые слова: квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента, нелокальная разрешимость.

NONLOCAL SOLVABILITY OF THE FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE HOPF'S TYPE ON A LINE OF INFINITE LENGTH

L. E. Platonova

Abstract. A first order quasi-linear differential equation of Hopf's type with the initial conditions posed in Cartesian coordinates on a line of infinite length is considered. The study of solvability of the Cauchy problem is based on the method of an additional argument, which allows determining the solution in the original coordinates without involving the inverse function theorem. Previously we have proved the theorem on the local solvability with using this method. In the present article this theorem is given without proof, together with the lemmas on which it is proved. A theorem on the nonlocal solvability of the Cauchy problem in a given neighborhood of the line carrying initial data is proved. The proof of the theorem relies on the global estimates, deducing process of which defines the conditions that ensure the possibility of continuing the solution of the problem on the whole given domain.

Keywords: first order quasilinear differential equation, the Cauchy problem, method of an additional argument, nonlocal solvability.

Данная работа посвящена выяснению условий разрешимости задачи Коши уравнения вида

$$\partial_{x_2}u + u\partial_{x_1}u = f(x_1, x_2, u) \tag{1}$$

в заданной окрестности $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \varphi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1)+\omega^*(1-10N_\gamma N'_\varphi)\}$ линии $L : x_2 = \varphi(x_1), -\infty < x_1 < +\infty$.

Классические результаты по исследованию и решению уравнений вида (1) содержаться во многих известных учебниках по дифференциальным уравнениям. Для исследования уравнений вида (1) разработано много разных методов, которые имеют свои достоинства и недостатки.

Например, метод характеристик позволяет доказать локально разрешимость задачи Коши (1), но определение границ интервала разрешимости и нахождения решения в исходных координатах (x_1, x_2) является задачей весьма трудной. Как правило, используется теорема об обратной функции, которая часто не дает конкретно определить интервал, в котором разрешима рассматриваемая задача.

Метод дополнительного аргумента (далее МДА) дает возможность определить условия разрешимости без использования теоремы об обратной функции, а также, найти решение задачи в исходных координатах [6], [7], [8], [12].

В основном с помощью МДА ранее исследовалась локальная разрешимость. Но и некоторые задачи о нелокальной разрешимости были рассмотрены, например, [3], [11]. В работе [3] рассмотрено тоже уравнение, но обозначение переменных иное, а именно $\partial_t u + u\partial_x u = -U(t, x, u)u$, и задача Коши поставлена иначе: $u(0, x) = \varphi(x)$. Нелокальная разрешимость возможна лишь при определенных ограничениях на функцию $f(x_1, x_2, u)$.

Для упрощения выкладок рассмотрим уравнение вида

$$\partial_{x_2}u + u\partial_{x_1}u = -U(x_1, x_2, u)u, \tag{2}$$

где $U(x_1, x_2, u) \in \bar{C}^{2,1,2}$. Решение ищется в заданной окрестности Ω_1 линии L, несущей начальные данные для задачи Коши, которая задается уравнением

$$x_2 = \varphi(x_1), -\infty < x_1 < +\infty,$$

$$u(x_1, x_2)|_L = \gamma(x_1). \tag{3}$$

Функции $\varphi(x_1), \gamma(x_1) \in \bar{C}^2(-\infty; +\infty)$, где $\bar{C}^2(-\infty; +\infty)$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со своими 1-ой и 2-ой производными на $(-\infty; +\infty)$.

Область определения неизвестной функции $u(x_1, x_2)$ в (2) содержится во множестве $\Omega_\beta = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \varphi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1) + \beta_0\}, \beta_0 \in \mathrm{R}$.

Цель данной статьи состоит в определении условий, при которых решение исходной задачи может быть продлено на Ω_β. Так как для вывода условий нелокальной разрешимости нам понадобятся условия на производные от неизвестной функции, наряду с условиями существования неизвестной функции будем рассматривать условия существования производных от этой функции. Для этого продифференцируем уравнение (2) по x_1:

$$\partial^2_{x_1x_2}u + u\partial^2_{x_1x_1}u + (\partial_{x_1}u)^2 = -U(x_1, x_2, u)\partial_{x_1}u - \partial_{x_1}U(x_1, x_2, u) \cdot u - \partial_u U(x_1, x_2, u) \cdot u \cdot \partial_{x_1}u.$$

Введем обозначения:

$$q = \partial_{x_1}u, U_1 = \partial_{x_1}U, U_2 = \partial_u U, A\,(x_1, x_2, u) = U\,(x_1, x_2, u) + U_2\,(x_1, x_2, u) \cdot u. \tag{4}$$

Тогда предыдущее уравнение примет вид:

$$\partial_{x_2}q + u\partial_{x_1}q = -q^2 - A(x_1, x_2, u)q - U_1(x_1, x_2, u) \cdot u. \tag{5}$$

С учетом (4) зададим начальное условие для функции $q(x_1, x_2)$:

$$q(x_1, x_2)|_L = \gamma'(x_1). \tag{6}$$

В рамках метода дополнительного аргумента запишем для задачи (2), (3), (5), (6) расширенную характеристическую систему:

$$\frac{d\eta_1}{ds} = V\left(s, x_1, x_2\right), \tag{7}$$

$$\frac{d\eta_2}{ds} = 1, \tag{8}$$

$$\frac{dV}{ds} = -U\left(\eta_1\left(s, x_1, x_2\right), \eta_2\left(s, x_1, x_2\right), V\left(s, x_1, x_2\right)\right) \cdot V\left(s, x_1, x_2\right), \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{dW}{ds} = -W^2\left(s, x_1, x_2\right) - A(\eta_1\left(s, x_1, x_2\right), \eta_2\left(s, x_1, x_2\right), V\left(s, x_1, x_2\right)) \cdot W\left(s, x_1, x_2\right) - \\ - U_1(\eta_1\left(s, x_1, x_2\right), \eta_2\left(s, x_1, x_2\right), V\left(s, x_1, x_2\right)) \cdot V\left(s, x_1, x_2\right)\end{aligned} \tag{10}$$

с начальными данными

$$\eta_1|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_1, \eta_2|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_2, V|_L = \gamma(\eta_1(0, x_1, x_2)), W|_L = \gamma'(\eta_1(0, x_1, x_2)). \tag{11}$$

Здесь $\omega(x_1, x_2), \eta_1(s, x_1, x_2), \eta_2(s, x_1, x_2), V(s, x_1, x_2), W(s, x_1, x_2)$ — новые неизвестные функции, непрерывно дифференцируемые по всем переменным, s — дополнительный аргумент, $0 \leqslant s \leqslant \omega(x_1, x_2)$.

Для системы (7) – (11) составим систему интегральных уравнений:

$$\eta_1(s, x_1, x_2) = x_1 - \int\limits_s^{\omega(x_1,x_2)} V(\delta, x_1, x_2) d\delta, \tag{12}$$

$$\eta_2(s, x_1, x_2) = x_2 - \omega(x_1, x_2) + s, \tag{13}$$

$$V(s, x_1, x_2) = \gamma(\theta(x_1, x_2)) - \int\limits_0^s U(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), V(\delta, x_1, x_2)) V(\delta, x_1, x_2) d\delta, \tag{14}$$

$$W(s, x_1, x_2) = \gamma'(\theta(x_1, x_2)) - \int\limits_0^s \left(W^2 + A(\eta_1, \eta_2, V) \cdot W + U_1(\eta_1, \eta_2, V) \cdot V\right) d\delta \tag{15}$$

с начальными данными (11). Значение ω на кривой, заданной уравнением $x_2 = \varphi(x_1)$ полагаем равным нулю, т.е. $\omega(x_1, \varphi(x_1)) = 0$.

Одним из основных условий разрешимости является условие $\varphi' u - 1 \neq 0$. Вывод этого условия есть в [4], [5], [9], [13]. В данной статье рассмотрим случай, когда $\sup|\varphi'| \cdot \sup|u| < 1$. Это условие выполняется, когда на исходные данные наложено условие $\sup|\varphi'| \cdot \sup|\gamma| < 1$.

Сформулируем условия на L, при выполнении которых справедливы нижеприведенные утверждения. Пусть линия L, несущая начальные данные, задается дважды непрерывно дифференцируемой и ограниченной вместе со своей производной функцией $x_2 = \varphi(x_1)$. Для каждой точки A из области Ω_1 существует ровно одна точка B на кривой L, что расстояние от A до B наименьшее. Будем называть такую кривую в дальнейшем однонаправлено регулярной.

Будем обозначать $C(\Omega_*)$ и $C^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(\Omega_*)$ – пространства функций определенных и непрерывных (соответственно вместе со своими производными до порядка α_i по i-му аргументу, $i=1,2,\ldots,n$) на некотором подмножестве Ω_* евклидова пространства R^n, $n=1,2,\ldots$.

Далее, введем такие обозначения: $\mu_1 = x_1-\eta_1, \mu_2 = x_2-\eta_2$, $f_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \frac{\partial f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial \xi_j}$, $j=1,2,3$; $R(\Omega_\beta K) = \Omega_\beta \times [-K;K]$, где K — произвольно зафиксированное положительное число,

$$M(K) =$$
$$= \max\left\{ \begin{array}{cc} \sup|U(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_3|, & (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in R(\Omega_\beta K), \\ \sup|\xi_4^2 + A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_4 + U_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_3|, & (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\in R(\Omega_\beta K)\times[-K;K] \end{array} \right\},$$

$$M_j(K) = \max\left\{ \begin{array}{c} \sup|(U(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_3)_j|, \\ \sup|(\xi_4^2 + A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_4 + U_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_3)_j|, \\ (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\in R(\Omega_\beta K)\times[-K;K]. \end{array} \right\}, j=1,2,3,4.$$

Здесь $|\xi_3| \equiv |V| \leqslant 10N_\gamma$, а также $|\xi_4| \equiv |W| \leqslant 10N_\gamma$,

$$N'_\varphi = \sup_{x_1\in(-\infty;+\infty)} \left|\varphi'(x_1)\right|,$$

$$N_\gamma = \max\left\{ \sup_{x_1\in(-\infty;+\infty)} |\gamma(x_1)|, \sup_{x_1\in(-\infty;+\infty)} \left|\gamma'(x_1)\right|, \sup_{x_1\in(-\infty;+\infty)} \left|\gamma''(x_1)\right| \right\},$$

$$N_\varphi = \max\left\{ \sup_{x_1\in(-\infty;+\infty)} |\varphi(x_1)|, \sup_{x_1\in(-\infty;+\infty)} \left|\varphi'(x_1)\right| \right\},$$

$$Q = \left\{(x_1,x_2,u) : (x_1,x_2)\in\Omega_\beta, |u|\leqslant 10N_\gamma\right\},$$

$$P_i(K) = \sup\{(UV^{n-1})_i\}, P_{ij}(K) = \sup\{(UV^{n-1})_{ij}\}, i,j=1,2,3,$$

$$\Omega_1 = \{(x_1,x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \varphi(x_1)\leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1) + \omega^*(1-10N_\gamma N'_\varphi)\}.$$

Будем искать решение задачи (2) – (3) при условии, что $|u| \leqslant 10N_\gamma$. Сформулируем те утверждения в виде лемм, которые дают понятие о взаимосвязи задач (2) – (3) и (11) – (15). Эти леммы составляют основу МДА и доказаны в работах [5], [9], [10], [13].

Лемма 1. Непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений (11) – (15) дает решение задачи Коши (2) – (3).

Лемма 2. Пусть $\gamma \in \bar{C}^2(R^1), U(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \bar{C}^{0,2,2}(R(\Omega_\beta K))$, причем $|\omega|$ и K подобраны таким образом, что выполняется неравенство

$$N_\gamma + |\omega| M(K) \leqslant K. \tag{16}$$

Тогда при $0\leqslant|\omega|\leqslant\omega^*$, где $\omega^* = \min\left\{\frac{K-N_\gamma}{M(K)}L_1; \frac{K-N_\gamma}{M(K)}M_4(K)\right\}$ система уравнений (14) – (15) имеет единственное решение $V(s,x_1,x_2), W(s,x_1,x_2)\in C(Q)$.

Лемма 3. При выполнении условий леммы 2 $V(s,x_1,x_2) \in \bar{C}^{1,2,1}(Q), W(s,x_1,x_2) \in \bar{C}^{1,1,1}(Q)$.

Из доказанных лемм 1 - 3 следует теорема о локальной разрешимости задачи (2) – (3).

Теорема 1. Пусть $\gamma(x_1) \in \bar{C}^2(-\infty,+\infty), U(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \bar{C}^{2,1,2}(R(\Omega_\beta K))$, где $R(\Omega_\beta K) = \Omega_\beta\times[-K;K]$, $K = 10N_\gamma$ — произвольно зафиксированное положительное число; L — однонаправлено регулярная кривая $x_2 = \varphi(x_1)$; выполнено основное условие разрешимости $\sup|\varphi'|\cdot\sup|\gamma| < 1$. Тогда при $0\leqslant|\omega|\leqslant\omega^*$, где $\omega^* = \min\left\{\dfrac{K-N_\gamma}{M(K)}L_1; \dfrac{K-N_\gamma}{M(K)}M_4(K); \dfrac{K-N_\gamma}{M(K)}L_3\right\}$, где

$$L_1 = \max\left\{M_1(K), M_2(K), \frac{1+M_3(K)(1-N_\varphi K)+N_\varphi+N_\gamma}{(1-N_\varphi K)}\right\},$$

$$L_3 = \max\left\{P_1(K), P_2(K), \frac{N_\gamma + N_\varphi + 1 + P_3(K)(1 - N_\varphi K)}{1 - N_\varphi K}\right\},$$

задача Коши (2) – (3) имеет единственное решение $u(x_1, x_2) \in \bar{C}^{2,1}(Q)$, которое при $s = \omega$ совпадает с функцией $V(s, x_1, x_2)$, определяемой из системы (11) – (15).

Определим условия, при выполнении которых задача (11) – (15), а, следовательно, и (2) – (3) будет иметь решение в области Ω_1.

Перейдем к выводу глобальных оценок.

Запишем для задачи (7), (8), (9), (11) соответствующую систему интегральных уравнений в следующем виде:

$$\eta_1 = x_1 - \int\limits_s^{\omega(x_1,x_2)} V(\delta, x_1, x_2)d\delta, \tag{17}$$

$$\eta_2 = x_2 - \omega(x_1, x_2) + s, \tag{18}$$

$$V(s, x_1, x_2) = \gamma(\eta_1(0, x_1, x_2)) \cdot \exp\left(-\int\limits_0^s U(\eta_1, \eta_2, V)d\delta\right). \tag{19}$$

Запишем первое условие:

$$U(x_1, x_2, y) \leqslant 0 \tag{20}$$

для $-\infty < x_1 < +\infty$, $\varphi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1) + \beta_0$, $|y| \leqslant C_\gamma$, где $C_\gamma = \sup\limits_{x_1 \in (-\infty;+\infty)} |\gamma(x_1)|$.

Из (20) следует первая глобальная оценка:

$$|V| \leqslant C_\gamma. \tag{21}$$

Из (19) следует, что $\sup|u| \leqslant C_\gamma = \sup|\gamma|$. Выведем глобальную оценку для W и определим условия, при каких она осуществима. Правая часть (10) — квадратный трехчлен относительно W: $-W^2 - A \cdot W - U_1 \cdot V = 0$. Домножим его на (-1): $W^2 + A \cdot W + U_1 \cdot V = 0$. Найдем корни этого уравнения: $W_{1,2} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4U_1V}}{2}$.

За следующее условие разрешимости примем неравенство

$$A^2 - 4U_1V > 0 \tag{22}$$

при всех $0 \leqslant s \leqslant \omega(x_1, x_2) \leqslant \omega^*$, $-\infty < \eta_1 < +\infty$, $\varphi(\theta(x_1, x_2)) \leqslant \eta_2 \leqslant \varphi(\theta(x_1,x_2)) + \omega^*$, $|V| \leqslant C_\gamma$.

Обозначим $W_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4U_1V}}{2}, W_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4U_1V}}{2}$.

Уравнение (10) перепишем в виде:

$$\frac{dW}{ds} = -(W - W_1)(W - W_2). \tag{23}$$

Для уравнения (23) построим мажорантные и минорантные уравнения, решения которых дадут искомую глобальную оценку.

Пусть $\widetilde{W_1} = \min\limits_{s \in [0;\omega^*]} W_1, \overline{W_1} = \max\limits_{s \in [0;\omega^*]} W_1, \overline{W_2} = \min\limits_{s \in [0;\omega^*]} W_2, \widetilde{W_2} = \max\limits_{s \in [0;\omega^*]} W_2$.

За следующее условие глобальной разрешимости примем, что при всех x_1, x_2:

$$\widetilde{W_2} < \widetilde{W_1}. \tag{24}$$

Для компактности записи обозначим $x_{01} = \eta_1(0, x_1, x_2)$.

Мажорантные и минорантные уравнения будем строить по-разному в зависимости от взаимного расположения $\gamma'(x_{01})$ и $\widetilde{W_1}, \overline{W_1}, \overline{W_2}, \widetilde{W_2}$.

Пусть $\widetilde{W}_2 < \gamma'(x_{01}) < \widetilde{W}_1$.

В качестве миноратного возьмем следующее уравнение:

$$\frac{d\widetilde{W}}{ds} = -(\widetilde{W} - \widetilde{W}_1)(\widetilde{W} - \widetilde{W}_2). \tag{25}$$

Для $\widetilde{W}$ зададим то же начальное условие, что и для W: $\widetilde{W}|_L = W|_L = \gamma'(x_{01})$.

Лемма 4. Если

$$\widetilde{W}_2 < \gamma'(x_{01}) < \widetilde{W}_1, \tag{26}$$

то на всем промежутке существования решения задачи (7) – (11) справедлива оценка

$$\widetilde{W}_2 \leqslant \widetilde{W} \leqslant W. \tag{27}$$

Доказательство. В силу (26) для s, близких к 0, будем иметь следующее неравенство $W_2 \leqslant \widetilde{W}_2 < W < \widetilde{W}_1 \leqslant W_1$.

Проверим, что уравнение (25) будет минорантным уравнением для (23):

$$|W - \widetilde{W}_1| \leqslant |W - W_1| \Rightarrow -(W - \widetilde{W}_1) \leqslant -(W - W_1);$$

$$W - \widetilde{W}_2 \leqslant W - W_2.$$

Умножим первое неравенство на второе и, преобразовав полученное неравенство, будем иметь:

$$-(W - \widetilde{W}_1)(W - \widetilde{W}_2) + (W - W_1)(W - W_2) \leqslant 0. \tag{28}$$

Вычтем из равенства (25) равенство (23), а затем прибавим и вычтем $(W - \widetilde{W}_1)(W - \widetilde{W}_2)$ к получившемуся уравнению:

$$\frac{d\widetilde{W}}{ds} - \frac{dW}{ds} = -(\widetilde{W} - \widetilde{W}_1)(\widetilde{W} - \widetilde{W}_2) + (W - W_1)(W - W_2) + (W - \widetilde{W}_1)(W - \widetilde{W}_2) - (W - \widetilde{W}_1)(W - \widetilde{W}_2).$$

В силу неравенства (28), будем иметь:

$$\frac{d(\widetilde{W} - W)}{ds} \leqslant -(\widetilde{W} - \widetilde{W}_1)(\widetilde{W} - W) - (W - \widetilde{W}_2)(\widetilde{W} - W).$$

Преобразовав неравенство, получим:

$$\frac{d(\widetilde{W} - W)}{ds} \leqslant (\widetilde{W}_1 + \widetilde{W}_2 - \widetilde{W} - W)(\widetilde{W} - W). \tag{29}$$

Докажем, что $\widetilde{W} \leqslant W$. В точке $s = 0$ выполняется равенство $\widetilde{W} = W$ (в силу начальных данных). Пусть, начиная с некоторого номера s_0, будет $\widetilde{W} > W$ (в частности, для $s_0 = 0$). Тогда $\widetilde{W} - W > 0$ в некоторой правосторонней окрестности точки s_0, а в самой точке s_0 выполняется $\widetilde{W} - W = 0$. Тогда из (29) вытекает, что:

$$\frac{d(\widetilde{W} - W)}{ds} \leqslant |\widetilde{W}_1 + \widetilde{W}_2 - \widetilde{W} - W|(\widetilde{W} - W).$$

В силу леммы Гронуолла получаем $\widetilde{W} = W$. Мы получили противоречие. Следовательно, $\widetilde{W} \leqslant W$.

Решим уравнение (25). Запишем это уравнение в виде:

$$\frac{d\widetilde{W}}{(\widetilde{W} - \widetilde{W}_1)(\widetilde{W} - \widetilde{W}_2)} = -ds.$$

Множитель перед $d\widetilde{W}$ в левой части данного уравнения преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{(\widetilde{W}-\widetilde{W}_1)(\widetilde{W}-\widetilde{W}_2)}=\frac{1}{(\widetilde{W}-\widetilde{W}_1)(\widetilde{W}_1-\widetilde{W}_2)}-\frac{1}{(\widetilde{W}-\widetilde{W}_2)(\widetilde{W}_1-\widetilde{W}_2)}.$$

Используя полученное равенство, будем иметь:

$$\frac{d(\widetilde{W}-\widetilde{W}_1)}{\widetilde{W}-\widetilde{W}_1}-\frac{d(\widetilde{W}-\widetilde{W}_2)}{\widetilde{W}-\widetilde{W}_2})=-(\widetilde{W}_1-\widetilde{W}_2)ds.$$

Решая полученное уравнение при $\widetilde{W}_2<\widetilde{W}<\widetilde{W}_1$ с начальным условием $\widetilde{W}|_L=\gamma'(x_{01})$, имеем: $\frac{\widetilde{W}-\widetilde{W}_1}{\widetilde{W}-\widetilde{W}_2}=\frac{\gamma'(x_{01})-\widetilde{W}_1}{\gamma'(x_{01})-\widetilde{W}_2}\exp\Big(-(\widetilde{W}_1-\widetilde{W}_2)s\Big)$.

Введем обозначение: $K=\frac{\gamma'(x_{01})-\widetilde{W}_1}{\gamma'(x_{01})-\widetilde{W}_2}\exp\Big(-(\widetilde{W}_1-\widetilde{W}_2)s\Big)$. Исходя из условия леммы, будем иметь, что $K<0$.

С введенным обозначением, получим:

$$\widetilde{W}=\frac{\widetilde{W}_1-K\widetilde{W}_2}{1-K}. \tag{30}$$

Обозначим $z=-K$. Из (30) имеем: $\widetilde{W}=\frac{\widetilde{W}_1+z\widetilde{W}_2}{1+z}$. Изучая полученное уравнение, получим, что $\widetilde{W}$ убывает. Это означает, что $\widetilde{W}_2\leqslant\widetilde{W}$.

Ранее было доказано, что $\widetilde{W}\leqslant W$. Тем самым мы получили утверждение леммы, которое нам требовалось доказать, то есть $\widetilde{W}_2\leqslant\widetilde{W}\leqslant W$.

Пусть $\widetilde{W}_2<\gamma'(x_{01})\leqslant\overline{W_1}$. Построим для уравнения (23) мажорантное уравнение при этом условии. Чтобы случай $\gamma'(x_{01})=\overline{W_1}$ был включен в рассмотрение, рассмотрим функцию $\overline{W}_{1,\varepsilon}=\overline{W_1}+\varepsilon,\varepsilon>0$ двух переменных x_1 и x_2.

В качестве мажорантного уравнения возьмем уравнение:

$$\frac{d\overline{W}}{ds}=-(\overline{W}-\overline{W}_{1,\varepsilon})(\overline{W}-\overline{W_2}). \tag{31}$$

Для $\overline{W}$ зададим то же начальное условие, что и для W: $\overline{W}|_L=W|_L=\gamma'(x_{01})$.

Лемма 5. Если

$$\widetilde{W}_2<\gamma'(x_{01})\leqslant\overline{W_1}, \tag{32}$$

то на всем промежутке существования решения задачи (7) – (11) справедлива оценка

$$W\leqslant\overline{W}\leqslant\overline{W_1}. \tag{33}$$

Рассмотрим случай, когда $\gamma'(x_{01})\leqslant\widetilde{W}_1$. Чтобы случай $\gamma'(x_{01})=\widetilde{W}_1$ был включен в рассмотрение, введем функцию $\widetilde{W}_{1,\varepsilon}=\ \widetilde{W}_1-\varepsilon,\varepsilon>0$ двух переменных x_1 и x_2.

В качестве минорантного уравнения возьмем уравнение:

$$\frac{d\breve{W}}{ds}=-(\breve{W}-\widetilde{W}_{1,\varepsilon})(\breve{W}-\overline{W_2}). \tag{34}$$

Для $\breve{W}$ зададим то же начальное условие, что и для W: $\breve{W}|_L=W|_L=\gamma'(x_{01})$.

Лемма 6. Если

$$\widetilde{W}_1\leqslant\gamma'(x_{01}), \tag{35}$$

то на всем промежутке существования решения задачи (7) – (11) справедлива оценка

$$\widetilde{W}_1\leqslant\ \breve{W}\leqslant W. \tag{36}$$

Рассмотрим случай, когда $\gamma'(x_{01}) > \overline{W_1}$, для вывода оценки сверху.

В качестве мажорантного уравнения возьмем уравнение:

$$\frac{d\widehat{W}}{ds} = -(\widehat{W} - \overline{W_1})(\widehat{W} - \widetilde{W}_2). \tag{37}$$

Для $\widehat{W}$ зададим то же начальное условие, что и для W: $\widehat{W}|_L = W|_L = \gamma'(x_{01})$.

Лемма 7. Если

$$\overline{W_1} < \gamma'(x_{01}), \tag{38}$$

то на всем промежутке существования решения задачи (7) – (11) справедлива оценка

$$W \leqslant \widehat{W} \leqslant \gamma'(x_{01}). \tag{39}$$

Для вывода оценки сверху при $\gamma'(x_{01}) = \widetilde{W}_2$ рассмотрим мажорантное уравнение:

$$\frac{d\ddot{W}}{ds} = -(\ddot{W} - \overline{W_1})(\ddot{W} - W_\kappa), \text{ где } W_\kappa < \overline{W_2}. \tag{40}$$

Для $\ddot{W}$ зададим то же начальное условие, что и для W: $\ddot{W}|_L = W|_L = \gamma'(x_{01})$.

Лемма 8. Если

$$\gamma'(x_{01}) = \widetilde{W}_2, \tag{41}$$

то на всем промежутке существования решения задачи (7) – (11) справедлива оценка

$$W \leqslant \ddot{W} \leqslant \overline{W_1}. \tag{42}$$

Изменим начальное условие исходного уравнения на бесконечно малую положительную величину ε. Для вывода оценки снизу при $\gamma'(x_{01}) = \widetilde{W}_2$ рассмотрим минорантное уравнение:

$$\frac{dW}{ds} = -(W - \widetilde{W}_1)(W - \widetilde{W}_2). \tag{43}$$

Для W зададим то же начальное условие, что и для W: $W|_L = W|_L = \gamma'(x_{01}) + \varepsilon$.

Лемма 9. Если

$$\gamma'(x_{01}) = \widetilde{W}_2, \tag{44}$$

то на всем промежутке существования решения задачи (7) – (11) справедлива оценка

$$\gamma'(x_{01}) \leqslant W \leqslant W. \tag{45}$$

Доказательство лемм 5–9 аналогично доказательству леммы 4.

На основе оценок, установленных в леммах, запишем искомую глобальную оценку для $W(s, x_1, x_2)$.

Введем множество: $\Omega_V = \{(x_1, x_2, V) : -\infty < x_1 < +\infty, \varphi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1) + \beta_0, |V| \leqslant C_\gamma\}$.

Обозначим $W_1^0 = \sup\limits_{\Omega_V} |\overline{W_1}|, W_2^0 = \sup\limits_{\Omega_V} |\widetilde{W}_2|, W_3^0 = \sup\limits_{\Omega_V} |\widetilde{W}_1|, W_4^0 = \sup\limits_{\Omega_V} |\gamma'(\eta_1(0, x_1, x_2))|$, $N_W = \max\limits_{i=\overline{1,4}}\{W_i^0\}$.

В силу (27), (33), (36), (39), (42) и (45) будем иметь:

$$|W| \leqslant N_W. \tag{46}$$

Основным условием, при котором (46) имеет место, кроме сформулированных выше, является выполнение неравенства:

$$\widetilde{W}_2 \leqslant \gamma'(\eta_1(0, x_1, x_2)) \tag{47}$$

при всех (x_1, x_2, V) из Ω_V.

Оценки (21), (46) справедливы при всех $0 \leqslant s \leqslant \omega$, в том числе и при $s = \omega$, то есть они сохраняются для $u(x_1, x_2) = V(\omega, x_1, x_2), q(x_1, x_2) = W(\omega, x_1, x_2)$:

$$|u(x_1, x_2)| \leqslant C_\gamma, \tag{48}$$

$$|q(x_1, x_2)| \leqslant N_W. \tag{49}$$

Прежде, чем перейти к выводу глобальной оценки для $\partial_{x_1} W$, докажем важное для теории МДА тождество:

$$V(s, x_1, x_2) = V(s, \eta_1(s, x_1, x_2), \eta_2(s, x_1, x_2)) = u(\eta_1(s, x_1, x_2), \eta_2(s, x_1, x_2)). \tag{50}$$

Дифференцируя $u(\eta_1(s, x_1, x_2), \eta_2(s, x_1, x_2))$ по s, получим:

$$\frac{du(\eta_1, \eta_2)}{ds} = -U(\eta_1, \eta_2, u(\eta_1, \eta_2)) \cdot u(\eta_1, \eta_2) - (u(\eta_1, \eta_2) - V(s, x_1, x_2)) \cdot q(\eta_1, \eta_2). \tag{51}$$

Вычтем (9) из (51) и преобразуем полученное выражение:

$$\frac{d(u(\eta_1, \eta_2) - V(s, x_1, x_2))}{ds} = -U(\eta_1, \eta_2, u(\eta_1, \eta_2)) \cdot [u(\eta_1, \eta_2) - V(s, x_1, x_2)] +$$

$$+[U(\eta_1, \eta_2, V(s, x_1, x_2)) - U(\eta_1, \eta_2, u(\eta_1, \eta_2))] \cdot V(s, x_1, x_2) - [u(\eta_1, \eta_2) - V(s, x_1, x_2)] \cdot q(\eta_1, \eta_2).$$

Интегрируя от 0 до s и учитывая, что $u(\eta_1(0, x_1, x_2), \eta_2(0, x_1, x_2)) = \gamma(\eta_1(0, x_1, x_2)) = V(0, x_1, x_2)$, придем к интегральному уравнению относительно $u(\eta_1, \eta_2) - V(s, x_1, x_2)$:

$$u(\eta_1, \eta_2) - V(s, x_1, x_2) = -\int_0^s (U(\eta_1, \eta_2, u(\eta_1, \eta_2)) \cdot [u(\eta_1, \eta_2) - V(\delta, x_1, x_2)] +$$

$$+[U(\eta_1, \eta_2, V(\delta, x_1, x_2)) - U(\eta_1, \eta_2, u(\eta_1, \eta_2))] \cdot V(\delta, x_1, x_2) -$$

$$-[u(\eta_1, \eta_2) - V(\delta, x_1, x_2)] \cdot q(\eta_1, \eta_2))\, d\delta.$$

Оценим правую часть полученного уравнения:

$$|u(\eta_1, \eta_2) - V(s, x_1, x_2)| = N_{u-V} \int_0^s |u(\eta_1, \eta_2) - V(\delta, x_1, x_2)|\, d\delta, \text{ где } N_{u-V} = C_U + C_U^{(2)} C_\gamma + N_W.$$

В силу леммы Гронуолла $u(\eta_1, \eta_2) = V(s, x_1, x_2)$.

С учетом того, что $V(s, x_1, x_2) = V(s, \eta_1, \eta_2) = u(\eta_1, \eta_2)$, уравнение (7) можно записать в виде:

$$\frac{d\eta_1(s, x_1, x_2)}{ds} = u(\eta_1(s, x_1, x_2), \eta_2(s, x_1, x_2)). \tag{52}$$

Дифференцируя (52) по x_1, получим: $\frac{d\partial_{x_1}\eta_1(s,x_1,x_2)}{ds} = \frac{\partial u(\eta_1,\eta_2)}{\partial x_1} \cdot \partial_{x_1}\eta_1(s, x_1, x_2)$, откуда, получим $\frac{d\partial_{x_1}\eta_1(s,x_1,x_2)}{ds} = q(\eta_1, \eta_2) \cdot \partial_{x_1}\eta_1(s, x_1, x_2)$.

Проинтегрируем полученное выражение в пределах от s до ω, с учетом $\partial_{x_1}\eta_1(s, x_1, x_2)|_{s=\omega} = 1$, будем иметь: $\partial_{x_1}\eta_1(s, x_1, x_2) = \exp\left(\int_s^\omega q(\eta_1, \eta_2) d\delta\right)$. Откуда получаем:

$$|\partial_{x_1}\eta_1(s, x_1, x_2)| \leqslant N_{\eta_1}, \tag{53}$$

где $N_{\eta_1} = \exp(N_W \omega^*)$.

Теперь мы можем оценить $\partial_{x_1} V(s, x_1, x_2) = \partial_{x_1}(u(\eta_1, \eta_2)) = \partial_{x_1} u(\eta_1, \eta_2)\partial_{x_1}\eta_1 = q(\eta_1, \eta_2)\partial_{x_1}\eta_1$, следовательно:

$$|\partial_{x_1}\eta_1(s, x_1, x_2)| \leqslant N_W N_{\eta_1}. \tag{54}$$

Проинтегрируем (8) по x_1, получим $\frac{d\partial_{x_1}\eta_2(s,x_1,x_2)}{ds} = 0$, следовательно $\partial_{x_1}\eta_2(s, x_1, x_2) = C_{\eta_2}$. Тогда:

$$|\partial_{x_1}\eta_2(s, x_1, x_2)| \leqslant C^{+}_{\eta_2}. \tag{55}$$

Перейдем к выводу глобальной оценки для $\partial_{x_1} W(s, x_1, x_2)$. Продифференцируем уравнение (10) и начальное условие (11) по x_1. Для краткости записи производные от функций V, η_1, η_2, W будем обозначать нижними индексами.

Также через $A_1(x, y, z)$ обозначим производную функции $A(x, y, z)$ по x, через $A_2(x, y, z)$ — производную функции $A(x, y, z)$ по z, через $A_3(x, y, z)$ – производную функции $A(x, y, z)$ по y. Для вторых производных введем следующие обозначения:

$$U_{12}(x, y, z) = \partial_x\partial_z U(x, y, z), U_{22}(x, y, z) = \partial_z^2 U(x, y, z), U_{23}(x, y, z) = \partial_y\partial_z U(x, y, z).$$

Таким образом, мы получим:

$$A_1(x, y, z) = U_1(x, y, z) + U_{12}(x, y, z)\cdot z, A_3(x, y, z) = U_3(x, y, z) + U_{23}(x, y, z)\cdot z,$$

$$A_2(x, y, z) = U_2(x, y, z) + U_{22}(x, y, z)\cdot z + U_2(x, y, z) = 2U_2(x, y, z) + U_{22}(x, y, z)\cdot z.$$

Обозначим:

$$C^{(ij)}_U = \sup_{\Omega_V} |U_{ij}(x_1, x_2, u)|, i = 1, 2, j = 1, 2, 3; C^{(k)}_U = \sup_{\Omega_V} |U_k(x_1, x_2, u)|, k = 1, 3.$$

С введенными обозначениями будем иметь:

$$\begin{gathered}|A_1(\eta_1, \eta_2, V)| \leqslant |U_1(\eta_1, \eta_2, V)| + |U_{12}(\eta_1, \eta_2, V)|\cdot|V| \leqslant C^{(1)}_U + C^{(12)}_U C_\gamma,\\ |A_2(\eta_1, \eta_2, V)| \leqslant 2|U_2(\eta_1, \eta_2, V)| + |U_{22}(\eta_1, \eta_2, V)|\cdot|V| \leqslant 2C^{(2)}_U + C^{(22)}_U C_\gamma,\\ |A_3(\eta_1, \eta_2, V)| \leqslant |U_3(\eta_1, \eta_2, V)| + |U_{23}(\eta_1, \eta_2, V)|\cdot|V| \leqslant C^{(3)}_U + C^{(23)}_U C_\gamma.\end{gathered} \tag{56}$$

В результате дифференцирования задачи (10), (11) получим дифференциальное уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{dW_{x_1}}{ds} = -2WW_{x_1} - A(\eta_1, \eta_2, V)W_{x_1} - U_1(\eta_1, \eta_2, V)V_{x_1}-\\ -A_1(\eta_1, \eta_2, V)W\eta_{1x_1} - A_2(\eta_1, \eta_2, V)WV_{x_1} - A_3(\eta_1, \eta_2, V)W\eta_{2x_1}-\\ -U_{11}(\eta_1, \eta_2, V)V\eta_{1x_1} - U_{12}(\eta_1, \eta_2, V)VV_{x_1} - U_{23}(\eta_1, \eta_2, V)V\eta_{2x_1}\end{gathered} \tag{57}$$

с начальным условием

$$W_{x_1}|_L = \gamma''(\eta_1(0, x_1, x_2))\cdot\eta_{1x_1}(0, x_1, x_2). \tag{58}$$

Обозначим

$$F = U_1(\eta_1, \eta_2, V)V_{x_1} + A_1(\eta_1, \eta_2, V)W\eta_{1x_1} + A_2(\eta_1, \eta_2, V)WV_{x_1} + A_3(\eta_1, \eta_2, V)W\eta_{2x_1}+$$

$$+U_{11}(\eta_1, \eta_2, V)V\eta_{1x_1} + U_{12}(\eta_1, \eta_2, V)VV_{x_1} + U_{23}(\eta_1, \eta_2, V)V\eta_{2x_1}, \quad P = 2W + A(\eta_1, \eta_2, V).$$

Для всех входящих в F и P функций получены глобальные оценки, следовательно $|F| \leqslant N_F, |P| \leqslant N_P$, где

$$N_F = C_U^{(1)} N_W N_{\eta_1} + (C_U^{(1)} + C_U^{(12)} C_\gamma) \cdot N_W N_{\eta_1} + (2C_U^{(2)} + C_U^{(22)} C_\gamma) \cdot N_W^2 \cdot N_{\eta_1} +$$

$$+ (C_U^{(3)} + C_U^{(23)} C_\gamma) \cdot N_W C_{\eta_2}^+ + C_U^{(11)} C_\gamma N_{\eta_1} + C_U^{(12)} C_\gamma N_W N_{\eta_1} + C_U^{(23)} C_\gamma C_{\eta_2}^+,$$

$$N_P = 2N_W + C_U + C_U^{(2)} C_\gamma.$$

Из задачи Коши (57) – (58) для W_{x_1} следует явное выражение:

$$W_{x_1} = \gamma''(\eta_1(0, x_1, x_2)) \cdot \eta_{1x_1}(0, x_1, x_2) \cdot \exp\left(-\int\limits_0^s P d\delta\right) -$$

$$-\left(\int\limits_0^s F \cdot \exp\left(\int\limits_0^\sigma P d\delta\right) d\sigma\right) \cdot \exp\left(-\int\limits_0^s P d\delta\right),$$

которое дает возможность записать глобальную оценку для $W_{x_1}(s, x_1, x_2) = \partial_{x_1} W(s, x_1, x_2)$:

$$|\partial_{x_1} W(s, x_1, x_2)| \leqslant N_W^1, \tag{59}$$

где $N_W^1 = C_U^{(2)} N_{\eta_1} \exp(N_P \omega^*) + \omega^* N_F \exp(N_P \omega^*)$.

Оценка (59) справедлива для всех $s \in [0; \omega] \subset [0; \omega^*]$, поэтому она остается справедливой и для $\partial_{x_1} q(x_1, x_2) = \partial_{x_1} W(\omega, x_1, x_2)$:

$$|\partial_{x_1} q(x_1, x_2)| \leqslant N_W^1.$$

Так как $q(x_1, x_2) = \partial_{x_1} u(x_1, x_2)$, то также получена оценка для $\partial_{x_1}^2 u(x_1, x_2)$:

$$|\partial_{x_1}^2 u(x_1, x_2)| \leqslant N_W^1.$$

Полученные глобальные оценки для $u, \partial_{x_1} u = q, \partial_{x_1 x_1} u = \partial_{x_1} q$ дают возможность продолжить решение на всю заданную область Ω_β.

Беря в качестве начального значения $u(x_1, x_2)|_{L_1} = \gamma_1(x_1)$, продлим решение на область $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \varphi_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi_1(x_1) + \omega^*(1 - 10N'_\varphi N_\gamma)\}$, где $\varphi_1(x_1) = \varphi(x_1) + \omega^*(1 - 10N'_\varphi N_\gamma)$. Затем беря в качестве начального значения $u(x_1, x_2)|_{L_2} = \gamma_2(x_1)$, продлим решение на область $\Omega_3 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \varphi_2(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi_2(x_1) + \omega^*(1 - 10N'_\varphi N_\gamma)\}$, где $\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1) + \omega^*(1 - 10N'_\varphi N_\gamma)$. Данный процесс будем продолжать до тех пор, пока не продолжим решение на всю область Ω_β за конечное число шагов. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется глобальными оценками, справедливыми в любой области разрешимости.

В частности начальные значения $\gamma_k(x_1) \in \bar{C}^2(-\infty, +\infty), |\gamma_k(x_1)| \leqslant C_\gamma, |\gamma'_k(x_1)| \leqslant N_W$, $|\gamma''_k(x_1)| \leqslant N_W^{(1)}$ для всех $k = \overline{0, n}$, $-\infty < x_1 < +\infty$, где $\gamma_0(x_1) = \gamma(x_1)$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\gamma(x_1) \in \bar{C}^2(-\infty, +\infty), U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \bar{C}^{2,1,2}(R(\Omega_\beta K))$, где $R(\Omega_\beta K) = \Omega_\beta \times [-K; K], K = 10N_\gamma$ — произвольно зафиксированное положительное число; L — однонаправлено регулярная кривая $x_2 = \varphi(x_1)$; выполнено основное условие разрешимости $\sup|\varphi'| \cdot \sup|\gamma| < 1$. При выполнении условий $U(x_1, x_2, y) \leqslant 0$, $A^2 - 4U_1 V > 0$, $\widetilde{W}_2 < \widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_2 \leqslant \gamma'(\eta_1(0, x_1, x_2))$ задача Коши (2)–(3) имеет единственное решение $u \in \bar{C}^{2,1}(\Omega_\beta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеенко, С. Н. Применение метода дополнительного аргумента к исследованию разрешимости "одноосной" задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка / С. Н. Алексеенко // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2009. — Вып. 11. — С. 40–49.

2. Алексеенко, С. Н. Доказательство сходимости последовательных приближений, построенных с помощью метода дополнительного аргумента в "одноосной" задаче Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка / С. Н. Алексеенко // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2010. — Вып. 12. — С. 51–57.

3. Алексеенко, С. Н. Применение метода дополнительного аргумента к исследованию нелокальной разрешимости задачи Коши для уравнения первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени / С. Н. Алексеенко, Е. А. Елькина // Труды Нижегородского гос. технического университета им. Р. Е. Алексеева. — 2011. — Вып. 2(87). – С. 320–329.

4. Алексеенко, С. Н. Построение основной разрешающей системы интегральных уравнений для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных / С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2011. — Вып. 13. — С. 61–70.

5. Алексеенко, С. Н. Доказательство локальной разрешимости резольвентной системы интегральных уравнений, соответствующей квазилинейному уравнению в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных / С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2012. —- Вып. 14. — С. 41–51.

6. Иманалиев, М. И. К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Доклады АН. — 1993. — Т. 329, № 5. — С. 543–546.

7. Иманалиев, М. И. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Доклады РАН. — 2001. — Т. 379, № 1. — С. 16–21.

8. Иманалиев, М. И. Метод дополнительного аргумента / М. И. Иманалиев, П. С. Панков, С. Н. Алексеенко // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. Специальный выпуск. — 2006. — № 1. — С. 60–64.

9. Алексеенко, С. Н. Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины / С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова // Журнал Средневолжского математического общества. — 2012. — Вып. 14, № 3. — С. 21–28.

10. Алексеенко, С. Н. Доказательство теоремы о локальной разрешимости квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины / С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова // Журнал Средневолжского математического общества. — 2013. — Вып. 15, № 2. — С. 27–37.

11. Алексеенко, С. Н. Исследование условий нелокальной разрешимости уравнения диссипативных стационарных структур / С. Н. Алексеенко, С. Н. Нагорных, Е. А. Елькина // Вестник университета им. Н. И. Лобачевского. — 2012. — Вып. 1, Часть 1. — С. 122–128.

12. Иманалиев, М. И. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Доклады АН. — 1992. — Т. 323, № 3. — С. 410–414.

13. Платонова, Л. Е. Доказательство регулярной локальной разрешимости задачи Коши

для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины / Л. Е. Платонова // Журнал Средневолжского математического общества. — 2014. — Вып. 16, № 3. — С. 77–86.

14. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

15. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

REFERENCES

1. Alekseenko S.N. The application of the method of additional argument to the study of solvability "uniaxial" the Cauchy problem for quasilinear equations of the first order. [Alekseenko S.N. Primenenie metoda dopolnitel'nogo argumenta k issledovaniyu razreshimosti "odnoosnoj" zadachi Koshi dlya kvazilinejnyx uravnenij v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona — Mathem. vestnik pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region*, 2009, iss. 11, pp. 40–49.

2. Alekseenko S.N. The proof of convergence of the successive approximations constructed by the method of additional argument in the "uniaxial" the Cauchy problem for quasilinear equations of the first order. [Alekseenko S.N. Dokazatel'stvo sxodimosti posledovatel'nyx priblizhenij, postroennyx s pomoshh'yu metoda dopolnitel'nogo argumenta v "odnoosnoj" zadache Koshi dlya kvazilinejnyx uravnenij v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona — Mathem. vestnik pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region*, 2010, iss. 12, pp. 51–57.

3. Alekseenko S.N., Elkina E.A. Applying the method of anadditional argument to an investigation of a nonlocal solvability of the Cauchy problem for first order equations with differential operator of total derivative with respect to time type. [Alekseenko S.N., El'kina E.A. Primenenie metoda dopolnitel'nogo argumenta k issledovaniyu nelokal'noj razreshimosti zadachi Koshi dlya uravneniya pervogo poryadka s differencial'nym operatorom tipa polnoj proizvodnoj po vremeni]. *Trudy Nizhegorodskogo gos. texnicheskogo universiteta im. R. E. Alekseeva — Transactions of Nizhny Novgorod state technical university n.a. R. Y. Alekseev*, 2011, vol. 2(87), pp. 320–329.

4. Alekseenko S.N., Platonova L.E. The main building of the resolving system of integral equations for quasi-linear first-order partial differential equation of first order in the case of a parametric type the initial data. [Alekseenko S.N., Platonova L.E. Postroenie osnovnoj razreshayushhej sistemy integral'nyx uravnenij dlya kvazilinejnogo uravneniya v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka v sluchae parametricheskogo zadaniya nachal'nyx dannyx]. *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona — Mathem. vestnik pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region*, 2011, iss. 13, pp. 61–70.

5. Alekseenko S.N., Platonova L.E. Proof of local solvability of the resolvent of a system of integral equations corresponding to the quasi-linear equation in partial derivatives of first order in the case of a parametric type the initial data. [Alekseenko S.N., Platonova L.E. Dokazatel'stvo lokal'noj razreshimosti rezol'ventnoj sistemy integral'nyx uravnenij, sootvetstvuyushhej kvazilinejnomu uravneniyu v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka v sluchae parametricheskogo zadaniya nachal'nyx dannyx]. *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona — Mathem. vestnik pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region*, 2012, iss. 14, pp. 41–51.

6. Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. The theory of nonlinear differential equations with operator type full time derivative. [Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. K teorii nelinejnyx uravnenij s

differencial'nym operatorom tipa polnoj proizvodnoj po vremeni]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1993, vol. 329, no. 5, pp. 543–546.

7. Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. To the question of the existence of a smooth bounded solution for a system of two nonlinear first order partial differential equations. [Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. K voprosu sushhestvovaniya gladkogo ogranichennogo resheniya dlya sistemy dvux nelinejnyx differencial'nyx uravnenij v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2001, vol. 379, no. 1, pp. 16–21.

8. Imanaliev M.I., Pankov P.S., Alekseenko S.N. Method of an additional argument. [Imanaliev M.I., Pankov P.S., Alekseenko S.N. Metod dopolnitel'nogo argumenta]. *Vestnik KazNU. Seriya matematika, mexanika, informatika. Special'nyj vypusk — The KazNU Journal. Mathematics, Mechanics and Computer Science Edition. Special edition*, 2006, no. 1, pp. 60–64.

9. Alekseenko S.N., Platonova L.E. A first-order partial differential equation of the common type with initial data in Cartesian coordinates on an infinite length line. [Alekseenko S.N., Platonova L.E. Differencial'noe uravnenie v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka obshhego vida s nachal'nymi dannymi v dekartovyx koordinatax na linii beskonechnoj dliny]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshhestva — Journal of Srednevolzhsky mathematical society*, 2012, vol. 14, no. 3, pp. 21–28.

10. Alekseenko S.N., Platonova L.E. The proof of a local solvability theorem for a quasi-linear first-order partial differential equation of the common type with initial data in Cartesian coordinates on an infinite length line. [Alekseenko S.N., Platonova L.E. Dokazatel'stvo teoremy o lokal'noj razreshimosti kvazilinejnogo uravneniya v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka obshhego vida s nachal'nymi dannymi v dekartovyx koordinatax na linii beskonechnoj dliny]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshhestva — Journal of Srednevolzhsky mathematical society*, 2013, vol. 15, no. 2, pp. 27–37.

11. Alekseenko S.N., Nagornyh S.N., Elkina E.A. A study of nonlocal solvability conditions for the equation of stationary dissipative. [Alekseenko S.N., Nagornyh S.N., Elkina E.A. Issledovanie uslovij nelokal'noj razreshimosti uravneniya dissipativnyx stacionarnyx struktur]. *Vestnik universiteta im. N. I. Lobachevskogo — Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*, 2012, vol. 1, part 1, pp. 122–128.

12. Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. The theory of nonlinear integro-differential equations of Whitham type. [Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. K teorii nelinejnyx integro-differencial'nyx uravnenij v chastnyx proizvodnyx tipa Uizema]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1992, vol. 323, no. 3, pp. 410–414.

13. Platonova L.E. Proof of regular local solvability of the Cauchy problem for differential equations in partial derivatives of the first order with initial data in Cartesian coordinates on line infinite length. [Platonova L.E. Dokazatel'stvo regulyarnoj lokal'noj razreshimosti zadachi Koshi dlya differencial'nogo uravneniya v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka s nachal'nymi dannymi v dekartovyx koordinatax na linii beskonechnoj dliny]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshhestva — Journal of Srednevolzhsky mathematical society*, 2014, vol. 16, no. 3, pp. 77–86.

14. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon. About the Uniqueness of the Solution of a Mathematical Model of the Forced Oscillations of String with Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon. O edinstvennosti matematicheskoj modeli vynuzdennyx kolebanyj struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 50–55.

15. Baev A. D., Shabrov S. A., Golovaneva F. V., Meach Mon About unique classical solution mathematical model of forced vibrations rod system with singularities. [Baev A. D., Shabrov S. A., Golovanyova F. V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo*

gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2014, no. 2, pp. 74–80.

Платонова Любовь Евгеньевна, старший преподаватель кафедры математики и математического образования, Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина, Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: lexfer@mail.ru

Platonova Lyubov Evgenievna, the senior lecturer of the mathematics and mathematical education chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University named Kozma Minin, Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: lexfer@mail.ru