УДК 517.911.5

НАПРАВЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ НА ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ В ЗАДАЧЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕВЫПУКЛОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ*

С. В. Корнев

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 04.04.2015 г.

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию периодической задачи для нелинейных объектов, описываемых дифференциальными включениями, правая часть которых не является выпуклозначной. А именно, в работе рассматриваются дифференциальные включения, правая часть которых является нормальным мультиотображением с компактными значениями, а также случай, когда правая часть является ограниченным непрерывным мультиотображением с компактными значениями. Применение теории мультиотображений и метода направляющих потенциалов на заданном множестве позволяет установить разрешимость рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: дифференциальное включение, направляющая функция, периодические решения.

GUIDING FUNCTIONS ON A GIVEN SET IN THE PERIODIC PROBLEM OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH NONCONVEX RIGHT-HAND SIDE

S. V. Kornev

Abstract. The present paper is devoted to the study of periodic problem to nonlinear systems described by differential inclusions with nonconvex right-hand side. More precisely, in this paper we consider the differential inclusions, the right-hand side of which is regular multimap with compact values as well as the case when the right-hand side is bounded continuous multimap with compact values. Applying the multimap theory and the method of guiding potential on a given set provides the solvability of the problem.

Keywords: differential inclusion, guiding function, periodic solutions.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о существовании периодических колебаний является одной из классических задач теории дифференциальных уравнений. Одним из наиболее эффективных и геометрически наглядных способов решения этой задачи является метод направляющих функций, общие принципы которого сформулировали еще в середине XX века М. А. Красносельский и А. И. Перов (см. [1], [2]).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14–01–00468), Минобрнауки России в рамках базовой части госзадания (проект № 3488) и Российского научного фонда (проект № 14–21–00066) (теоремы 1, 2).

За более, чем полувековую историю своего существования, метод был развит целым рядом исследователей в различных направлениях. Одно из них в основе своей имеет понятие направляющей функции на заданном множестве, впервые введенное Ж. Мовеном (см. [3]) применительно к задаче о существовании вынужденных колебаний дифференциальных уравнений.

В восьмидесятые годы XX века метод направляющих функций был распространен на случай дифференциальных включений — математический аппарат, описывающий нелинейные управляемые системы с обратной связью, системы автоматического регулирования, системы с разрывными и импульсными характеристиками и другие объекты современной инженерии, механики, физики (см., например, [4], [5]).

В классических работах по методу направляющих функций, как правило, предполагается, что эти функции являются гладкими на всем фазовом пространстве (см., например, [1–4]). Это условие может представиться ограничительным, например, в таких ситуациях, когда направляющие потенциалы различны в различных областях пространства. Обобщению представленных методов на негладкий случай посвящен целый ряд работ (см., например, [5–10]).

В настоящей работе предлагается применить метод негладких направляющих функций на заданном множестве к задаче о существовании периодических колебаний в нелинейных объектах, описываемых дифференциальными включениями с невыпуклой правой частью. А именно, в работе рассматриваются дифференциальные включения, правая часть которых является нормальным мультиотображением с компактными значениями, а также случай, когда правая часть является ограниченным непрерывным мультиотображением с компактными значениями.

Некоторые другие обобщения метода направляющих функций см., например, в [11], [12].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (см., например, [4], [5], [13], [14]). Напомним некоторые из них.

Пусть E – сепарабельное банахово пространство; $L^1([a,b];E)$ обозначает банахово пространство суммируемых по Бохнеру функций $f : [a,b] \to E$.

Определение 1. Непустое множество $M \subset L^1([a,b];E)$ называется разложимым, если для любых $f, g \in M$ и любого измеримого по Лебегу множества $m \subset [a,b]$ выполнено

$$f\chi_m + g\chi_{([a,b]\setminus m)} \in M,$$

где χ_m – характеристическая функция множества m.

Пусть X, Y – произвольные множества, многозначное отображение (мультиотображение) F множества X в множество Y – это такое соответствие, которое сопоставляет каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое образом (или значением) x.

Пусть теперь (X,d_X) и (Y,d_Y) – метрические пространства. Символами $P(Y)$, $C(Y)$ и $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых и компактных подмножеств пространства Y. Если Y – нормированное пространство, то символом $Kv(Y)$ обозначается совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y.

Определение 2. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0,x) < \delta$ следует, что $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ U_ε обозначает ε-окрестность множества.

Определение 3. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется пн. св., если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

Определение 4. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным снизу (пн. сн.) в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $F(x') \cap V \neq \varnothing$ для любого $x' \in U(x_0)$.

Определение 5. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется пн. сн., если оно пн. сн. в каждой точке $x \in X$.

Определение 6. Если мультиотображение $F : X \to P(Y)$ полунепрерывно и сверху и снизу, то оно называется непрерывным.

Определение 7. Пусть $F : X \to P(Y)$ – некоторое мультиотображение. Множество Γ_F в декартовом произведении $X \times Y$,

$$\Gamma_F = \{(x,y) \mid \ (x,y) \in X \times Y, \quad y \in F(x)\}$$

называется графиком мультиотображения F.

Определение 8. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется замкнутым, если его график Γ_F есть замкнутое множество в пространстве $X \times Y$.

Определение 9. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется компактным, если область значений $F(X)$ относительно компактна в Y, т.е. $\overline{F(X)}$ компактно в Y.

Мультиотображение будем называть мультифункцией, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

Определение 10. Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется сечением мультиотображения F, если

$$f(x) \in F(x) \quad \text{для каждого} \ \ x \in X.$$

В дальнейшем используется следующее утверждение Брессана-Коломбо-Фрышковского о непрерывном сечении (см., например, [15], [16]).

Лемма 1. *Пусть X – сепарабельное метрическое пространство. Тогда любое пн. сн. мультиотображение $F : X \multimap L^1([a,b]; E)$ с замкнутыми разложимыми значениями имеет непрерывное сечение.*

Пусть I – замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

Определение 11. Мультифункция $F : I \to K(Y)$ называется измеримой, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз

$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$$

– измеримое подмножество I.

Замечание 12. Всякая пн. сн. мультифункция измерима.

Замечание 13. Всякая измеримая мультифункция $F : I \to K(Y)$ обладает измеримым сечением, то есть существует такая измеримая функция $f : I \to Y$, что $f(t) \in F(t)$ почти для всех (п.в.) $t \in I$.

Определение 14. Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ называется почти пн. сн., если существует последовательность непересекающихся компактных множеств $\{I_n\}$, $I_n \subseteq I$, таких, что

(i) $\mu(I \setminus \bigcup\limits_n I_n) = 0$, где μ – мера Лебега;

(ii) сужение F на каждое множество $J_n = I_n \times Y$ является пн. сн. мультиотображением.

Определение 15. Говорят, что мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ удовлетворяет верхним (нижним) условиям Каратеодори, если:

(i) для каждого $x \in X$ мультифункция $F(\cdot,x) : I \to K(Y)$ измерима;

(ii) почти для каждого $t \in I$ мультиотображение $F(t,\cdot) : X \to K(Y)$ пн. св. (пн. сн.).

Определение 16. Если мультиотображение F удовлетворяет и верхним и нижним условиям Каратеодори, то оно называется удовлетворяющим условиям Каратеодори.

Определение 17. Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ удовлетворяет условию подлинейного роста, если существует положительная суммируемая по Лебегу на I функция $\alpha(\cdot)$ такая, что п.в. $t \in I$

$$\|F(t,x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \leqslant \alpha(t)(1 + \|x\|).$$

Определение 18. Ограниченное мультиотображение $R : I \times \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ называется нормальным, если найдется мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, называемое нормальным квазисечением мультиотображения R, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) мультиотображение F удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;

(ii) $F(t,x) \cap R(t,x) \neq \varnothing$ для всех $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) каждое решение $x : I \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения $x'(t) \in F(t,x(t))$ является также решением включения $x'(t) \in R(t,x(t))$.

Замечание 19. Всякое ограниченное мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста, является нормальным.

Замечание 20. (см., например, [17]). Всякое ограниченное почти пн. сн. мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным. Кроме того, всякое ограниченное мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее условиям Каратеодори, является нормальным.

Определение 21. Множество $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ называется конусом, если $\mathcal{K}$ является непустым выпуклым замкнутым подмножеством пространства $\mathbb{R}^n$ таким, что

(i) если $x \in \mathcal{K}$, $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda x \in \mathcal{K}$;

(ii) $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{0\}$.

Определение 22. (см., например, [5], [18]). Пусть $\mathcal{K}$ является конусом в $\mathbb{R}^n$, а (Y,d_Y) – метрическим пространством. Отображение $f : \mathbb{R}^n \to Y$ называется $\mathcal{K}$-непрерывным в точке $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d_Y(f(x), f(\overline{x})) < \varepsilon$ для всех $x \in B(\overline{x},\delta) \cap (\overline{x} + \mathcal{K})$.

Определение 23. Отображение f называется $\mathcal{K}$-непрерывным на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, если оно $\mathcal{K}$-непрерывно в каждой точке $\overline{x} \in G$.

Справедливо следующее утверждение (см., например, [5], [18]).

Лемма 2. *Пусть $F : \mathbb{R}^n \to C(Y)$ является пн. сн. мультиотображением. Тогда для каждого конуса $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ мультиотображение F допускает $\mathcal{K}$-непрерывное сечение.*

3. СЛУЧАЙ ВЫПУКЛОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Будем рассматривать сначала периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in F(t,x(t)), \tag{1}$$

$$x(0) = x(T), \tag{2}$$

предполагая, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и T-периодично ($T > 0$) по первому аргументу:

$$F(t,x) = F(t+T,x) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать мультиотображение F заданным на $[0,T] \times \mathbb{R}^n$).

Замечание 24. При сделанных предположениях определен мультиоператор суперпозиции $P_F : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to P(L^1([0,T];\mathbb{R}^n))$, сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $F(t,x(t))$. Известно, что этот мультиоператор замкнут (см., например, [4]).

Всюду в дальнейшем под решением задачи (1), (2) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot)$, удовлетворяющую почти в каждой точке включению (1) и условию периодичности (2).

Для изучения задачи (1), (2) будем использовать топологическую степень совпадения пары отображений в следующей ситуации (см., например, [19–22]).

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $U \subset E_1$ – открытое ограниченное множество; $l : \operatorname{dom} l \subseteq E_1 \to E_2$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что $\operatorname{Im} l \subset E_2$ замкнуто.

Рассмотрим непрерывные линейные операторы проектирования $p : E_1 \to E_1$ и $q : E_2 \to E_2$ такие, что $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} l$, $\operatorname{Im} l = \operatorname{Ker} q$. Символом l_p обозначается сужение оператора l на $\operatorname{dom} l \cap \operatorname{Ker} p$.

Далее, пусть непрерывный оператор $k_{p,q} : E_2 \to \operatorname{dom} l \cap \operatorname{Ker} p$ задан соотношением $k_{p,q}(y) = l_p^{-1}(y - q(y))$, $y \in E_2$.

Определение 25. Мультиотображение $\mathcal{G} : \overline{U} \to Kv(E_2)$ называется l-компактным, если
(i) $\mathcal{G}(U)$ – ограниченное множество;
(ii) $k_{p,q} \circ \mathcal{G} : \overline{U} \to Kv(E_1)$ является компактным мультиотображением.

Далее, пусть $\mathcal{G} : \overline{U} \to Kv(E_2)$ – замкнутый l-компактный мультиоператор такой, что $lx \notin \mathcal{G}x$ для всех $x \in \partial U$.

Тогда определена целочисленная топологическая характеристика – степень совпадения $\deg(l,\mathcal{G},\overline{U})$ пары $(l,\mathcal{G})$, которая обладает всеми основными свойствами топологической степени (см., например, [19–23]). Напомним некоторые из них.

$\mathbf{1^0}$) Аддитивная зависимость от области.

Если $\{U_j\}_{j\in J}$ – семейство открытых непересекающихся подмножеств U такое, что

$$l(x) \notin \mathcal{G}(x) \quad \text{для всех } \ x \in \operatorname{dom}\ l \cap \overline{U} \setminus \bigcup_{j\in J} U_j,$$

то

$$\deg(l,\mathcal{G},\overline{U}) = \sum_{j\in J} \deg(l,\mathcal{G},\overline{U}_j).$$

$\mathbf{2^0}$) Гомотопическая инвариантность. Если l-компактное мультиотображение $\mathcal{G} : (\text{dom } l \cap \overline{U}) \times [0,1] \to Kv(E_2)$ таково, что

$$l(x) \notin \mathcal{G}(x,\lambda) \quad \text{для всех } (x,\lambda) \in (\text{dom } l \cap \partial U) \times [0,1]\,,$$

то степень совпадения $\deg\left(l,\mathcal{G}(\cdot,\lambda),\overline{U}\right)$ не зависит от $\lambda \in [0,1]$.

$\mathbf{3^0}$) Принцип сужения отображения. Если $U_1 \subset U$ – открытое множество такое, что

$$l(x) \notin \mathcal{G}(x) \quad \text{для всех } x \in \text{dom } l \cap \left(\overline{U} \backslash U_1\right),$$

то

$$\deg\left(l,\mathcal{G},\overline{U}\right) = \deg\left(l,\mathcal{G},\overline{U_1}\right).$$

$\mathbf{4^0}$) Свойство точки совпадения. Если

$$\deg\left(l,\mathcal{G},\overline{U}\right) \neq 0,$$

то существует точка совпадения $x \in \text{dom } l \cap U$:

$$l(x) \in \mathcal{G}(x).$$

В частности, когда l – тождественный оператор, то степень совпадения является классической топологической степенью.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – непустое множество. Обозначим символом C_T – пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$ и пусть L^1_T – пространство суммируемых T-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|f\|_{L^1_T} = \int_0^T \|f(s)\|ds$.

Обозначим теперь

$$\Gamma(G) := \{x \in C_T : x(t) \in G \quad \text{для всех } t \in [0,T]\}.$$

Для функции $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ и для любого $r \in \mathbb{R}$ пусть

$$V^{-1}(M) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \in M\}, \quad \mathcal{V}_r := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) > r\}.$$

Для $M \subset \mathbb{R}^n$ символом χ_M обозначается характеристическая функция множества M и $M_\delta = \bigcup_{x\in M} B^n(x,\delta)$, где $B^n(x,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ – открытый шар с центром в точке x и радиуса $\delta > 0$.

Развивая понятия, введенные в [1], [3], дадим следующие определения.

Определение 26. Непрерывно дифференцируемая функция $V : G \to \mathbb{R}$ называется невырожденным потенциалом, если

$$\nabla V(x) \neq 0 \quad \textit{для всех } x \in G.$$

Определение 27. Невырожденный потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется направляющей функцией на множестве G для включения (1), если выполнено условие

$$\langle \nabla V(x),y\rangle \geqslant 0 \quad \textit{для всех } x \in G,\, y \in F(t,x). \tag{3}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 28. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– такая непрерывно дифференцируемая функция, что выполнены следующие условия:*

(i) $\mathcal{V}_0$ *является непустым, открытым и ограниченным множеством;*

(ii) V *является направляющей функцией для включения (1) на множестве* $V^{-1}(0)$*;*

(iii) $\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

Тогда задача (1), (2) имеет T*-периодическое решение* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)$.

Доказательство. (j) Покажем сначала, что утверждение теоремы справедливо, когда условие (ii) предполагается выполненным на множестве $V^{-1}([0,\varepsilon])$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Для невырожденного потенциала V определим отображение $Y_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$Y_V(x) = \begin{cases} \nabla V(x), & \text{если } \|\nabla V(x)\| \leqslant 1, \\ \frac{\nabla V(x)}{\|\nabla V(x)\|}, & \text{если } \|\nabla V(x)\| > 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что отображение Y непрерывно.

Зададим мультиотображение $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$H(t,x,\lambda) = (1-\lambda)Y_V(x) + \lambda F(t,x(t)).$$

Рассмотрим периодическую задачу

$$x'(t) \in H(t,x,\lambda), \quad \lambda \in [0,1), \tag{4}$$

$$x(0) = x(T). \tag{5}$$

Пусть $\lambda \in [0,1)$ и x – некоторое решение (4), (5) такое, что $x \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$. Покажем, что $x \in \Gamma(\mathcal{V}_0)$, то есть, что $V(x(t)) > 0$, для всех $t \in [0,T]$. Предположим, что при некотором $\tau \in [0,T]$ имеем $V(x(\tau)) = 0$. Это означает, что $x(\tau) \in V^{-1}(0)$ и в силу условия (ii) $\nabla V(x(\tau)) \neq 0$. Следовательно, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\nabla V(x(t)) \neq 0 \quad \text{для всех } \ t \in [\tau-\delta,\tau+\delta] \cap [0,T].$$

Предположим без ограничения общности, что $\tau - \delta \in (0,T)$ и что $V(x(t)) \in [0,\varepsilon]$ для всех $t \in [\tau-\delta,\tau]$. Тогда имеем:

$$0 \geqslant V(x(\tau)) - V(x(\tau-\delta)) = \int\limits_{\tau-\delta}^{\tau} \langle \nabla V(x(t)), x'(t) \rangle dt =$$

$$= \int\limits_{\tau-\delta}^{\tau} \left[(1-\lambda)\langle \nabla V(x(t)), Y_V(x(t)) \rangle + \lambda (\nabla V(x(t)), f(t)) \right] dt > 0$$

для каждого сечения $f(t) \in F(t,x(t))$. Получили противоречие. Таким образом, или задача (1), (2) имеет решение на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_0)$ и в этом случае теорема доказана, или для любого $\lambda \in [0,1]$ задача (4), (5) не имеет решения на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_0)$.

Тогда определим оператор

$$l : \operatorname{dom} l := \{x \in C_T : x - \text{абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^1_T,$$

$$lx = x'$$

и при каждом $\lambda \in [0,1]$ мультиоператор суперпозиции $\mathcal{G}(\cdot,\lambda) = P_H(\cdot,\lambda) : C_T \to P(L^1_T)$. Нетрудно проверить, что l – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $\mathcal{G}(\cdot,\lambda)$ – семейство замкнутых l-компактных мультиоператоров.

Запишем (4) в абстрактном виде как

$$lx \in \mathcal{G}(x,\lambda),$$

или

$$lx = (1-\lambda)Y_V(x) + \lambda f$$

при каждом $f \in P_F$. По свойству гомотопической инвариантности топологической степени совпадения

$$\deg(l,H(\cdot,1),\Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)) = \deg(l,H(\cdot,0),\Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)).$$

Из условий (i), (iii) и леммы VI.1 из [19] следует, что

$$|\deg(l,H(\cdot,0),\Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0))| = |\deg(\nabla V,\overline{\mathcal{V}}_0)| \neq 0.$$

Тогда из свойства существования точки совпадения заключаем, что

$$l(x) \in \mathcal{G}(x,\lambda) \quad \text{для } \ x \in \Gamma(\mathcal{V}_0).$$

(jj) Пусть теперь условие (ii) имеет место на множестве $V^{-1}(0)$.

Так как $V^{-1}(0)$ – компактное множество и $\nabla V(x) \neq 0$ для всех $x \in V^{-1}(0)$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $\nabla V(x) \neq 0$ для всех $x \in V^{-1}(0)_\delta$. Подберем функцию $\nu \in C^1(R^n,[0,1])$ так, чтобы $\nu = 1$ на $V^{-1}(0)_{\delta/2}$ и $\nu = 0$ на $R^n \setminus V^{-1}(0)_\delta$.

Так как мультиотображение F удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, то (см., например, [24]) для каждого $\varepsilon_m > 0$ существует мультиотображение $F_{\varepsilon_m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ такое, что:

(а) мультиотображение F_{ε_m} по первому аргументу T-периодично;

(б) $F_{\varepsilon_m}(t,z) \subset F(t,z)$ п.в. $(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

(в) существует замкнутое подмножество J_{ε_m} промежутка $J = [0,T]$ такое, что $\mu(J \backslash J_{\varepsilon_m}) \leqslant \varepsilon_m$ (где μ – мера Лебега) и мультиотображение $F_{\varepsilon_m}|_{J_{\varepsilon_m} \times \mathbb{R}^n}$ пн. св.;

(г) если $u,w : J \to \mathbb{R}^n$ измеримы и $w(t) \in F(t,u(t))$ п.в. $t \in J$, то $w(t) \in F_{\varepsilon_m}(t,u(t))$ п.в. $t \in J$.

Образуем множество $\theta_m = \bigcup_{i=m+1}^{\infty} J_{\varepsilon_i}$ такое, что $\mu(\theta_m) < \frac{1}{m}$, $\theta_{m+1} \subset \theta_m$ для каждого $m \in N$ и $\mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} \theta_m) = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{m\to\infty} \chi_{\theta_m}(t) = 0$ для всех $t \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} \theta_m$ и множество $[0,T] \setminus \theta_m$ является компактным.

Построим для каждого $m \in N$ и $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ мультиотображение

$$F_m(t,x) = F(t,x) + \nu(x)\left(\alpha(t)(1+\|x\|)\chi_{\theta_m}(t) + \frac{1}{m}\right)Y_V(x),$$

где функция $\alpha(\cdot)$ та же, что и в условии подлинейного роста. Нетрудно видеть, что мультиотображения F_m также удовлетворяют верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста.

Покажем теперь, что для каждого дифференциального включения

$$x'(t) \in F_m(t,x(t)) \tag{6}$$

условие (ii) выполнено на множестве $V^{-1}([0,\varepsilon])$.

Действительно, для каждых $(t,x) \in \theta_m \times \left(V^{-1}(0)_{\delta/2} \cap \overline{\mathcal{V}}_0\right)$ и $y_m \in F_m(t,x)$ имеем:

$$\langle \nabla V(x), y_m \rangle = \langle \nabla V(x), y \rangle + \left(\alpha(t)(1+\|x\|)\chi_{\theta_m}(t) + \frac{1}{m}\right)\|\nabla V(x)\| \geqslant 0,\ y \in F(t,x),$$

так как $\nu = 1$ на $V^{-1}(0)_{\delta/2}$.

Пусть теперь $t \in [0,T] \setminus \theta_m$. Тогда для каждых $x \in V^{-1}(0)$ и $y_m \in F_m(t,x)$ получаем

$$\langle \nabla V(x), y_m \rangle = \langle \nabla V(x), y \rangle + \nu(x) \left(\alpha(t)(1 + \|x\|)\chi_{\theta_m}(t) + \frac{1}{m} \right) \|\nabla V(x)\| > 0,\ y \in F(t,x).$$

Так как мультиотображение

$$(t,x) \multimap \{\langle \nabla V(x), y_m \rangle :\ y_m \in F_m(t,x)\}$$

является пн. св. на компактном множестве $([0,T] \setminus \theta_m) \times \overline{V^{-1}(0)_\delta}$, то найдется $\varepsilon_n > 0$ такое, что

$$\langle \nabla V(x), y_m \rangle \geqslant 0$$

для каждых $t \in [0,T] \setminus \theta_m, x \in V^{-1}[0,\varepsilon_n] \subset V^{-1}(0)_{\delta/2}$ и $y_m \in F_m(t,x)$. Таким образом для $\varepsilon = \min(\varepsilon_n,\delta/2)$ условие (ii) будет выполнено на множестве $V^{-1}([0,\varepsilon])$ и по доказанному каждое из дифференциальных включений (6) будет иметь T-периодическое решение $x_m^*(\cdot)$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем искомое решение $x^*(\cdot)$ включения (1) как предельную точку последовательности $x_m^*(\cdot)$ решений включения (6). Теорема доказана.

Некоторое усиление условия (3) также позволяет обосновать принцип существования T-периодического решения.

Определение 29. Невырожденный потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется обобщенной направляющей функцией на множестве G для включения (1), если для всех $x \in G$ выполнено условие

$$\langle \nabla V(x), y \rangle \geqslant 0 \quad \textit{хотя бы для некоторого } \ y \in F(t,x). \tag{7}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 30. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – такая непрерывно дифференцируемая функция, что выполнены следующие условия:*

(i) $\mathcal{V}_0$ *является непустым, открытым и ограниченным множеством;*

(ii) V *является обобщенной направляющей функцией для включения (1) на множестве* $V^{-1}(0)$*;*

(iii) $\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

Тогда задача (1), (2) имеет T-периодическое решение $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)$.

Доказательство. Определим мультиотображение $B : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$B(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : (\gamma(x)\nabla V(x), y) \geqslant 0\},$$

где $\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ x \notin V^{-1}(0), \\ 1, & \text{если } \ x \in V^{-1}(0). \end{cases}$

Нетрудно видеть, что B является замкнутым мультиотображением.

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$x'(t) \in F_B(t,x(t)) = F(t,x(t)) \cap B(x(t)). \tag{8}$$

Отметим, что правая часть включения (8) удовлетворяет верхним условиям Каратеодори (см., например, [4]).

Для включения (8) соотношение (7) будет справедливо уже для всех $y \in F_B(t,x)$ и решения включения (8) будут являться решениями исходного включения (1).

Следовательно, функция V является направляющей функцией для включения (8) на множестве $V^{-1}(0)$ в смысле определения 22. Тогда по теореме 1 включение (8) имеет T-периодическое решение $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)$. Теорема доказана.

4. СЛУЧАЙ НОРМАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Будем рассматривать теперь периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in R(t,x(t)), \tag{9}$$

$$x(0) = x(T), \tag{10}$$

в предположении, что мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным и удовлетворяет условию T-периодичности по первому аргументу.

Определение 31. Невырожденный потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется направляющей функцией на множестве G для включения (9), если выполнено условие

$$\langle \nabla V(x), y \rangle \geqslant 0 \quad \textit{для всех } \; x \in G, \, y \in R(t,x). \tag{11}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 32. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– такая непрерывно дифференцируемая функция, что выполнены следующие условия:*

(i) $\mathcal{V}_0$ *является непустым, открытым и ограниченным множеством;*

(ii) V *является направляющей функцией для включения (9) на множестве* $V^{-1}(0)$*;*

(iii) $\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

Тогда задача (9), (10) имеет T*-периодическое решение* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_0)$.

Доказательство. Пусть мультиотображение F является нормальным квазисечением мультиотображения R, т.е.:

(j) мультиотображение $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;

(jj) $F(t,x) \cap R(t,x) \neq \varnothing$ для всех $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(jjj) каждое решение $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ задачи

$$x'(t) \in F(t,x(t)), \tag{12}$$

$$x(0) = x(T), \tag{13}$$

является решением исходной задачи (9), (10).

В силу (jjj) достаточно показать, что задача (12), (13) имеет решение.

Заметим, что в общем случае функция V не является направляющей функцией для включения (12).

Определим мультиотображение $\widetilde{F} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\widetilde{F}(t,x) = \begin{cases} F(t,x), & x \notin V^{-1}(0); \\ F(t,x) \cap C(x), & x \in V^{-1}(0), \end{cases}$$

где мультиотображение $H : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ задано как

$$C(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla V(x), y\rangle \geqslant 0\}.$$

Легко видеть, что C является замкнутым мультиотображением. Тогда мультиотображение $\widetilde{F}(t,x) = F(t,x) \cap C(x)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и имеет выпуклые компактные значения (см., например, [4]).

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$x'(t) \in \widetilde{F}(t,x(t)). \tag{14}$$

Осталось показать теперь, что функция V является направляющей функцией для включения (14). Действительно, для произвольных $t \in [0,T],\ x \in V^{-1}(0)$ возьмем $y \in F(t,x) \cap R(t,x)$. Тогда имеем

$$\langle \nabla V(x), y\rangle \geqslant 0.$$

Поэтому $y \in \widetilde{F}(t,x)$. Следовательно, функция V является направляющей функцией для включения (14) в смысле определения 22. Из теоремы 1 тогда следует, что включение (14) имеет T-периодическое решение, которое является решением задачи (12), (13) и, следовательно, решением исходной задачи (9), (10). Теорема доказана.

5. СЛУЧАЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим в заключение периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in R(t,x(t)), \tag{15}$$

$$x(0) = x(T), \tag{16}$$

предполагая, что ограниченное мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является непрерывным и удовлетворяет условию T-периодичности по первому аргументу.

Замечание 33. В силу леммы 2 для каждого конуса $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ ограниченное непрерывное мультиотображение $R : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ допускает ограниченное $\mathcal{K}$-непрерывное сечение $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Нам понадобится следующее утверждение (см., например, [5], [17]).

Лемма 3. *Пусть $R : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ – ограниченное непрерывное мультиотображение, а $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – его ограниченное $\mathcal{K}$-непрерывное сечение. Пусть мультиотображение $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ задано следующим образом*

$$F(t,x) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co}\, f(B((t,x),\delta)),$$

где $B((t,x),\delta) = \{(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \mid |s-t| < \delta,\ \|y-x\| < \delta\}$. Тогда

(j) *F является ограниченным пн. св. мультиотображением с выпуклыми компактными значениями;*

(jj) *множество решений задачи*

$$x'(t) = f(t,x(t)), \tag{17}$$

$$x(0) = x(T) \tag{18}$$

совпадает с множеством решений задачи

$$x'(t) \in F(t,x(t)), \tag{19}$$

$$x(0) = x(T). \tag{20}$$

Напомним некоторые понятия негладкого анализа (см., например, [25]).

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана локально липшицева функция $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ обобщенная производная Кларка $\Phi^0(x;\nu)$ функции $\Phi(\cdot)$ в точке x по направлению ν задается выражением

$$\Phi^0(x;\nu) = \varlimsup_{\substack{z\to x\\ t\to 0+}} \frac{\Phi(z+t\nu)-\Phi(z)}{t},$$

где $z \in \mathbb{R}^n$. Тогда обобщенный градиент Кларка $\partial\Phi(x)$ функции $\Phi(\cdot)$ в точке x определяется следующим образом:

$$\partial\Phi(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \quad \langle y,\nu\rangle \leqslant \Phi^0(x;\nu) \quad \text{для всех } \ \nu \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Известно, что мультиотображение $\partial\Phi : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ имеет выпуклые компактные значения и пн. св. (см., например, [25]). В частности, это означает, что для каждой непрерывной функции $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ множество суммируемых сечений мультифункции $t \multimap \partial\Phi(x(t))$ непусто. Напомним, что локально липшицева функция $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется регулярной, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $\Phi'(x,\nu)$, равная $\Phi^0(x,\nu)$. Известно, в частности, что выпуклые функции являются регулярными.

Определение 34. Локально липшицева функция $V : G \to \mathbb{R}$ называется прямым потенциалом на G, если

$$(\upsilon,\widetilde{\upsilon}) > 0 \quad \text{для всех } \ \upsilon,\widetilde{\upsilon} \in \partial V(x),\, x \in G.$$

Если функция V является прямым потенциалом, то с помощью топологической степени многозначных отображений (см., например, [4], [5]) для нее естественным образом определяется топологический индекс на бесконечности $\operatorname{ind}(V,\infty)$.

Определение 35. Прямой потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется негладкой направляющей функцией на G для включения (15), если для каждых $x \in G$, $\upsilon \in \partial V(x)$, $y \in R(t,x)$ и $t \in [0,T]$ выполнено

$$\langle \upsilon,y\rangle \geqslant 0. \tag{21}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 36. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная функция такая, что выполняются следующие условия:*

(i) *$\mathcal{V}_0$ является непустым, открытым и ограниченным множеством;*

(ii) *V является негладкой направляющей функцией для включения (15) на множестве $V^{-1}(0)$;*

(iii) $\deg(\partial V, \overline{\mathcal{V}_0}) \neq 0$.

Тогда задача (15), (16) имеет T-периодическое решение $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$.

Доказательство. Возьмем произвольные $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Так как мультиотображение R непрерывно, то найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $(s,y) \in B((t,x),\delta)$ будет следовать $R(s,y) \subset R(t,x) + B^n(\varepsilon)$.

Тогда имеем

$$F(t,x) \subset \overline{co}\, f(B((t,x),\delta)) \subset \overline{co}\, R(t,x) + B^n(\varepsilon)$$

и в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем

$$F(t,x) \subset \overline{co}\, R(t,x).$$

Из условия теоремы следует, что для каждого $x \in V^{-1}(0)$

$$\langle v,y \rangle \geqslant 0 \quad \textit{для всех } v \in \partial V(x),\, y \in R(t,x).$$

Тогда, очевидно, получаем для каждого $x \in V^{-1}(0)$

$$\langle v,т\overline{y} \rangle \geqslant 0 \quad \textit{для всех } v \in \partial V(x),\, \overline{y} \in F(t,x).$$

Таким образом, функция V является негладкой направляющей функцией для включения (19). Из [26] тогда вытекает, что задача (19), (20) имеет T-периодическое решение $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$. Следовательно, ввиду (jj) леммы 3, имеет T-периодическое решение и задача (15), (16). Теорема доказана.

Автор глубоко признателен профессору В.В. Обуховскому за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Наука, 1966. — 332 с.

2. Красносельский, М. А. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский, А. И. Перов // ДАН СССР. — 1958. — Т. 123, № 2. — С. 235–238.

3. Mawhin, J. Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations / J. Mawhin, R. James, Jr. Ward // Discrete and continuous dynamical systems. — 2002. — V. 8, № 1. — С. 39–54.

4. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: Либроком, 2011. — 226 с.

5. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / L. Górniewicz. — Berlin: Springer, 2006. — 556 p.

6. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076 / V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev. — Berlin: Springer, 2013. — 177 p.

7. De Blasi, F.S. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions / F. S. De Blasi, L. Górniewicz, G. Pianigiani // Nonlinear Anal. — 1999. — V. 37. — P. 217–245.

8. Корнев, С. В. О негладких многолистных направляющих функциях / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 11. — С. 1497–1502.

9. Kornev, S. On some developments of the method of integral guiding functions / S. Kornev, V. Obukhovskii // Functional Differential Equations. — 2005. — V. 12, № 3–4. — P. 303–310.

10. Корнев, С. В. Негладкие направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Автоматика и телемеханика. — 2007, № 1. – С. 3–12.

11. Корнев, С. В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 1. — С. 1–6.

12. Kornev, S. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions / S. Kornev, V. Obukhovskii, J. C. Yao // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. — 2014. — V. 34, Iss. 2. — P. 219–227.

13. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001. — 231 p.

14. Kisielewicz, M. Differential inclusions and optimal control / M. Kisielewicz. — Kluwer, Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991.

15. Bressan, A. Extensions and selections of maps with decomposable values / A. Bressan, G. Colombo // Studia Math. — 1988. — V. 90. — P. 69–86.

16. Fryszkowski, A. Fixed point theory for decomposable sets / A. Fryszkowski. — Kluwer AP, Dordrecht, 2004.

17. Bressan, A. Upper and lower semicontinuous differential inclusions. A unified approach in: H. Sussmann (Ed.) / A. Bressan // Controlability and optimal control. New York: Dekker. — 1989. — P. 21–31.

18. Bressan, A. Directionally continuous selections and differential inclusions / A. Bressan // Funkcial. Ekvac. — 1988. — V. 31. — P. 459–470.

19. Mawhin, J.L. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems / J.L. Mawhin // CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Amer. Math. Soc. Providence, R.I. — 1977. — № 40.

20. Pruszko, T. A coincidence degree for L-compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem for orientor fields / T. Pruszko // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci math. — 1979. — V. 27, № 11–12. — P. 895–902.

21. Pruszko, T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems / T. Pruszko // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. — 1981. — V. 5, № 9. — P. 959–970.

22. Tarafdar, E. On the existence of solutions of the equation $\mathcal{L}x \in Nx$ and a coincidence degree theory / E. Tarafdar, S.K. Teo // J. Austral. Math. Soc. — 1979. — V. A28, № 2. — P. 139–173.

23. Корнев, С. В. О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Сборник трудов мат. факультета ВГУ. — 2004. — Вып. 8. — С. 56–74.

24. Deimling, K. Multivalued Differential Equations / K. Deimling. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. — 260 p.

25. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М.: Наука, 1988. — 280 с.

26. Корнев, С. В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Известия ВУЗов. Математика. — 2009. — № 5. — С. 23–32.

REFERENCES

1. Krasnosel'skii M.A. The Operator of Translation along the Trajectories of Differential Equations. [Krasnosel'skii M.A. Oparator sdviga po traektoriam differential'nych uravnenij]. Moscow: Nauka, 1966, 332 p.

2. Krasnosel'skii M.A., Perov A.I. On existence principle for bounded, periodic and almost periodic solutions to the systems of ordinary differential equations. [Krasnosel'skii M.A., Perov A.I. Ob odnom prinzipe sushestvovania ogranichennyx, periodicheskih b pochti periodicheskix reshenij u system obiknovennyx differenzial'nyx uravnenij]. *Doklady Akademii Nauk SSSR — Reports of the USSR academy of sciences*, 1958, vol. 123, no. 2, pp. 235–238.

3. Mawhin J., Ward James R. Jr. Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations. Discrete and continuous dynamical systems, 2002, vol. 8, no. 1, pp. 39–54.

4. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobragenij i differenzial'nyx vklyuchenij]. Moscow: Librokom, 2011, 226 p.

5. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Berlin: Springer, 2006, 556 p.

6. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076, Berlin: Springer, 2013, 177 p.

7. De Blasi F.S., Górniewicz L., Pianigiani G. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions. Nonlinear Analysis, 1999, vol. 37, pp. 217–245.

8. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. On nonsmooth multivalent guiding functions. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. O negladkix mnogolistnyx napravljaushix funkzijax]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2003, vol. 39, no 11, pp. 1497–1502.

9. Kornev S., Obukhovskii V. On some developments of the method of integral guiding functions. Functional Differential Equations, 2005, vol. 12, no. 3–4, pp. 303–310.

10. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Nonsmooth guiding functions in the problem of forced oscillations. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Negladkie napravljaushie funkzii v zadachax o vynugdennyx kolebanijax]. *Avtomatika i telemehanika — Automation and Remote Control*, 2007, no. 1, pp. 3–12.

11. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Asymptotic behavior of solutions to differential inclusions and the method of guiding functions. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Assimptoticheskoe povedenie reshenij differenzial'nyx vklyuchenij i metod napravljaushix funkzij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 1–6.

12. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.C. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions. Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization, 2014, vol. 34, iss. 2, pp. 219–227.

13. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001, 231 p.

14. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control, Kluwer, Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991.

15. Bressan A., Colombo G. Extensions and selections of maps with decomposable values. Studia Math, 1988, vol. 90, pp. 69–86.

16. Fryszkowski A. Fixed point theory for decomposable sets, Kluwer AP, Dordrecht, 2004.

17. Bressan A. Upper and lower semicontinuous differential inclusions. A unified approach in: H. Sussmann (Ed.), Controlability and optimal control. New York: Dekker, 1989, pp. 21–31.

18. Bressan A. Directionally continuous selections and differential inclusions, Funkcial. Ekvac., 1988, vol. 31, pp. 459–470.

19. Mawhin J.L. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems. CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1977, no. 40.

20. Pruszko T. A coincidence degree for L-compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem for orientor fields. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci math., 1979, vol. 27, no. 11–12, pp. 895–902.

21. Pruszko T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 1981, vol. 5, no. 9, pp. 959–970.

22. Tarafdar E., Teo S.K. On the existence of solutions of the equation $\mathcal{L}x \in Nx$ and a coincidence degree theory. J. Austral. Math. Soc., 1979, vol. A28, no. 2, pp. 139–173.

23. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. On some versions of the theory of topological degree for nonconvex-valued multimap. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. O nekotoryx variantax teotii topologicheskoi stpeni dlja nevypukloznachnyx multiotobragenij]. *Sbornik trudov*

matematicheskogo fakulteta VGU — , 2004, iss. 8, pp. 56–74.

24. Deimling K. Multivalued Differential Equations, Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992, 260 p.

25. Clark F. Optimization and nonsmooth analysis. [Clark F. Optimizaciya i negladkij analiz]. Moscow: Nauka, 1988, 280 p.

26. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. On localization of the method of guiding functions in the periodic problem to differential inclusions. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. O lkalizacii methoda napravljaushix funkzij v zadache o periodicheskix rehenijax differenzial'nyx vklyuchenij]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2009, no. 5, pp. 23–32.

Корнев Сергей Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, физико-математический факультет, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Тел.: (473)255–36–63

Kornev Sergei Viktorovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Physics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Tel.: (473)255–36–63