УДК 517.911.5+517.928.7+517.929.5

АНАЛОГ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ Н. Н. БОГОЛЮБОВА – Н. М. КРЫЛОВА В ПРИНЦИПЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е. В. Иконникова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 03.04.2015 г.

Аннотация. В теории нелинейных колебаний широко применяется классический принцип усреднения Н. Н. Боголюбова - Н. М. Крылова. В настоящее время существует много различных вариантов теоремы о сходимости решений усредненной системы к решениям исходной. Один из таких результатов получен в работе М. И. Каменского и Ж.-Ф. Кушерона [1], где доказывается существование периодических решений в конечномерном пространстве для дифференциальных уравнений нейтрального типа с запаздыванием следующего вида: $y'(\tau) = \Phi\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau - h(\varepsilon)), y'(\tau - h(\varepsilon)), \varepsilon\Big)$. Предполагается, что в рассматриваемом случае отображение Φ в правой части уравнения непрерывно, периодично по первой переменной и удовлетворяет условию Липшица по третьей переменной. В настоящей статье доказан вариант принципа усреднения для дифференциальных включений с быстро осциллирующей правой частью, являющийся обобщением результата М. И. Каменского и Ж.-Ф. Кушерона.

Ключевые слова: принцип усреднения, дифференциальное включение с быстро осциллирующей правой частью, мера некомпактности, метрика Хаусдорфа, интеграл Аумана.

AN ANALOGUE OF THE SECOND THEOREM OF N. N. BOGOLYUBOV–N. M. KRYLOV IN AVERAGING PRINCIPLE FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF NEUTRAL TYPE WITH HIGH OSCILLATIONS IN RIGHT-HAND SIDE

E. V. Ikonnikova

Abstract. The classical averaging principle of N. N. Bogolyubov - N. M. Krylov is widely applied in the theory of nonlinear fluctuations. At the present time there are many various versions of the theorem about convergence of average system's decisions to solutions of the initial one. One of such results is received in M. I. Kamensky and J.-F. Kusheron's work where existence of periodic solutions in finite-dimensional space for the differential equations of neutral type with delay: $y'(\tau) = \Phi\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau - h(\varepsilon)), y'(\tau - h(\varepsilon)), \varepsilon\Big)$ is proved. In the case under consideration the map Φ in the righthand side of equation is supposed continuous, T-periodic in its first variable and lipschitz in its third variable. In the present article there is proved the averaging principle for the differential inclusions with high oscillation in the righthand side terms. The obtained results generalize the recent result of M. I. Kamenskii, J.-F. Couchouron.

Keywords: averaging method, differential inclusion with high oscillation in the righthand side terms, Hausdorff metric, measure of noncompactness, Aumann integral.

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

В настоящей статье рассматривается задача об усреднении для дифференциальных включений с быстро осциллирующей правой частью вида

$$z'(\tau) \in F\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, z(\tau - h(\varepsilon)), z'(\tau - h(\varepsilon)), \varepsilon\Big).$$

Работа является обобщением результата М. И. Каменского и Ж.-Ф. Кушерона [1]. Установлено, что в принципе усреднения возникает дополнительное по сравнению с однозначным случаем из [2] условие отличия от нуля некоторого многозначного векторного поля на границе области.

Статья состоит из трех частей. В первом разделе сформулированы необходимые понятия и факты, во втором – приведена формулировка теоремы, в третьем – доказательство ключевых утверждений и основной результат.

Введем обозначения и некоторые понятия теории многозначных отображений, которые будут использоваться в настоящей работе. Пусть E, E_0 и E_1 – вещественные банаховы пространства, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$. Через $K(E)$ ($Kv(E)$) обозначим набор всех непустых компактных (компактных выпуклых) подмножеств пространства E, $P(E)$ – множество всех непустых подмножеств из E; $Cb(E)$ – набор всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства E. Ниже $\mathrm{B}_E(a, r)$ – шар в пространстве E с центром в точке a радиуса r ($\mathrm{B}_E = \mathrm{B}_E(0, 1)$).

Определение 1 [2, стр. 7]. Мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$ множества $\Omega \in Cb(E)$ называется инфимум тех d, при которых Ω имеет в E конечную d-сеть.

Определение 2 [3, стр. 6]. Метрикой Хаусдорфа на множестве $Cb(E)$ называется функция $\mathbf{h} : Cb(E) \times Cb(E) \to \mathbb{R}_+$ следующего вида:

$$\mathbf{h}(N_1, N_2) = inf\{\sigma : N_1 \subset B_\sigma(N_2), N_2 \subset B_\sigma(N_1)\},$$

где $B_\sigma(N_i), i = 1, 2$ – раздутие множества N_i.

Определение 3 [3, стр.44]. Пусть $X \subseteq E$, Λ – пространство параметров и $k \in \mathbb{R}_+$. Многозначное отображение $F : X \to K(E)$ или семейство многозначных отображений $G : \Lambda \times X \to K(E)$ называется (k, χ)-уплотняющим, если, соответственно, $\chi(F(\Omega)) \leqslant k\chi(\Omega)$ или $\chi(G(\Lambda \times \Omega)) \leqslant k\chi(\Omega)$ для каждого $\Omega \in Cb(X)$.

Теорема 1 [3, стр. 46]. Пусть $X \subseteq E$ и многозначное отображение $\mathfrak{B} : X \times E \to K(E)$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) для всех $x \in X$ многозначное отображение $\mathfrak{B}(x, \cdot) : E \to K(E)$ удовлетворяет k-условию Липшица относительно метрики Хаусдорфа $\mathbf{h}$ в $K(E)$, т.е. $\mathbf{h}_E(\mathfrak{B}(x, y_0), \mathfrak{B}(x, y_1)) \leqslant k \parallel y_0 - y_1 \parallel_E$ для всех $y_0, y_1 \in E$, где $k \in \mathbb{R}_+$ не зависит от x.

(ii) множество $\mathfrak{B}(\Omega \times \{y\})$ является относительно компактным в E для любого $\Omega \in Cb(X)$ и $y \in E$.

Тогда диагональный оператор $A : X \to K(E)$, определяемый равенством $A(x) = \mathfrak{B}(x, x)$, является (k, χ)- уплотняющим на X, т.е. для каждого $\Omega \in Cb(X)$ выполнено соотношение $\chi(A(\Omega)) \leqslant k\chi(\Omega)$.

Предложение 1. Пусть выполнены условиях Теоремы 1, тогда если многозначное отображение $\mathfrak{B}(\cdot, y)$ полунепрерывно сверху по первой переменной при любом $y \in E$, то диагональный оператор $A(\cdot)$ также полунепрерывен сверху.

Доказательство. Рассмотрим последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$, сходящиеся к x^0 и y_0 соответственно. Пусть селекторы $b_n \in \mathfrak{B}(x_n, y_m)$. В силу полунепрерывности сверху по первой переменной многозначного отображения $\mathfrak{B}(\cdot, y_m)$, для любого $\gamma_n > 0$ при каждом фиксированном m найдутся такие n_m и $\eta_{m,n} > 0$, что $\mathfrak{B}(x_n, y_m) \subset \mathfrak{B}(x^0, y_m) + \gamma_n \mathrm{B}_E$, для всех $n \geqslant n_m$ и $0 < \eta \leqslant \eta_{n,m}$, где $\|x_n - x^0\| < \eta$. Также, в силу выполнения условия (i), верно включение $\mathfrak{B}(x^0, y_m) \subset \mathfrak{B}(x^0, y_0) + \delta_m \mathrm{B}_E$, где $\|y_m - y_0\| \leqslant \frac{\delta_m}{k}$. Следовательно, $\mathfrak{B}(x_n, y_m) \subset \mathfrak{B}(x^0, y_0) + \delta_m \mathrm{B}_E + \gamma_n \mathrm{B}_E$. Таким образом, для каждого селектора $b_n \in \mathfrak{B}(x_n, y_m)$ выполнено $b_n \in \mathfrak{B}(x^0, y_0) + \delta_m \mathrm{B}_E + \gamma_n \mathrm{B}_E$. Из вышеприведенных рассуждений следует, что оператор $\mathfrak{B}(\cdot, \cdot)$ является полунепрерывным сверху по совокупности переменных.

Положим $y_0 = x^0$, тогда в силу построения, диагональный оператор $A(\cdot)$ также полунепрерывен сверху. ∎

Определение 4 [4]. Пусть $\mathcal{I} = [0, T]$ и $F : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ – многозначное отображение. Пусть $\mathfrak{F} = \{f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n : f$ интегрируемы на $\mathcal{I}$ и $f(t) \in F(t)$ почти для всех $t \in \mathcal{I}\}$. Тогда интеграл от многозначного отображения, определенный как множество $\int\limits_{\mathcal{I}} F ds = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \int\limits_{\mathcal{I}} f(s) ds, f \in \mathfrak{F}\}$, называется интегралом Аумана.

Далее через $C_T(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство непрерывных $T-$периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C_T} = \sup\limits_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$. Через $L^p([a, b], \mathbb{R}^n)$ ($L^p_T(\mathbb{R}^n)$) обозначим пространство функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ($T-$периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$), суммируемых со степенью $1 < p < \infty$ на $[a, b]$ (на $[0, T]$). Нормы в пространствах $L^p([a, b], \mathbb{R}^n)$ и $L^p_T(\mathbb{R}^n)$ определим равенствами: $\|x\|_{L^p([a,b])} = \left(\int\limits_a^b \|x(s)\|^p_{\mathbb{R}^n} ds\right)^{\frac{1}{p}}$ и $\|x\|_{L^p_T} = \left(\int\limits_0^T \|x(s)\|^p_{\mathbb{R}^n} ds\right)^{\frac{1}{p}}$, соответственно. Через $W^1_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ ($W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)$) обозначим пространство функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ($T-$периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$), суммируемых со степенью $1 < p < \infty$ и имеющих обобщенные производные первого порядка, суммируемые в $\mathbb{R}^n$ с данной степенью p. Норму в пространстве $W^1_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ определим равенством: $\|x\|_{W^1_p([a,b])} = \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x'\|_{L^p([a,b])}$, в пространстве $W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)$: $\|x\|_{W^1_{p,T}} = \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x'\|_{L^p_T}$. Под нормой в пространстве $\mathbb{R}^n$ для элемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем понимать норму: $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$.

Следующую теорему приведем в формулировке, удобной для дальнейшего доказательства.

Теорема 2 [4, стр. 10] . Пусть $X \subseteq E$ и $F(\cdot, y) : X \to Kv(L^p_T(\mathbb{R}^n))$ – многозначное отображение, полунепрерывное сверху по первой переменной при фиксированной второй, тогда интеграл $\int\limits_{\mathcal{I}} F(\cdot, y) d\tau$ также полунепрерывен сверху по первой переменной при каждом фиксированном $y \in E$ и почти всех $\tau \in \mathcal{I}$.

Введем понятие степени отображения для многозначных векторых полей (k, χ)-уплотняющих операторов. Более подробно данный вопрос изложен в [2], [5], [6].

Пусть $X \subseteq E, U \subseteq E$ – непустое открытое ограниченное множество, $\overline{U}, \partial U$ – соответственно замыкание и граница множества U.

Определение 5 [5, стр.58]. Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой многозначного отображения $F : X \to E$, если $x \in F(x)$. Множество всех неподвижных точек F обозначим $FixF$.

Определение 6 [5, стр.62]. Многозначным векторным полем, соответствующим многозначному отображению $F : X \to P(E)$, называется многозначное векторное поле $\Phi : X \to P(E)$, определяемое по формуле $\Phi(x) = x - F(x)$. Ниже для простоты обозначений будем писать $\Phi = I - F$. Точка $x \in X$ такая, что $0 \in \Phi(x)$, называется особой точкой многозначного векторного поля Φ. Ясно, что особые точки многозначного векторного поля $\Phi = I - F$ являются неподвижными точками многозначного отображения F, и обратно. Если $FixF = \varnothing$, то

$\Phi = I - F$ невырождено.

Пусть $F_0, F_1 : \partial U \to Kv(E)$ – полунепрерывные сверху (k,χ)- уплотняющие многозначные отображения, $FixF_i = \varnothing, i = 0, 1$.

Определение 7 [3, стр.58]. Многозначные векторные поля $\Phi_0 = I - F_0$ и $\Phi_1 = I - F_1$ называются (k,χ)-гомотопными, $\Phi_0 \sim \Phi_1$, если существует такое полунепрерывное сверху (k,χ)-уплотняющее семейство многозначных векторных полей $G : \partial U \times [0,1] \to Kv(E)$, что

1) $x \notin G(x,\lambda)$ при $x \in \partial U$ и $\lambda \in [0,1]$;

2) $G(\cdot,0) = F_0, G(\cdot,1) = F_1$.

Семейство G называется гомотопией, связывающей многозначные векторные поля Φ_0 и Φ_1.

Каждому полунепрерывному сверху (k,χ)-уплотняющему многозначному векторному полю $\Phi = I - F$ может быть сопоставлена целочисленная характеристика – степень отображения $deg(\Phi,\partial U)$, обладающая следующими основными свойствами [3, стр.52]:

$(D1)$ (свойство нормализации). Если $F(x) \equiv L$ для всех $x \in \partial U$, то

$$deg(\Phi,\partial U) = \begin{cases} 1, & \text{если } L \bigcap U \neq \varnothing; \\ 0, & \text{если } L \bigcap \overline{U} = \varnothing. \end{cases}$$

$(D2)$ (гомотопическая инвариантность). Если $\Phi_0, \Phi_1 : \partial U \to Kv(E)$ и $\Phi_0 \sim \Phi_1$, то $deg(\Phi_0,\partial U) = deg(\Phi_1,\partial U)$.

$(D3)$ (аддитивная зависимость от области). Пусть $\{U_j\}_{(j\in\mathcal{J})}$ – семейство открытых попарно не пересекающихся подмножеств U и $F : \overline{U} \to Kv(E)$ не имеет неподвижных точек на $\overline{U} \setminus \bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} U_j$. Тогда степени отображения $deg(\Phi,\partial U_j)$ отличны от нуля лишь для конечного числа индексов $j \in \mathcal{J}$ и $deg(\Phi,\partial U) = \sum\limits_{j\in\mathcal{J}} deg(\Phi,\partial U_j)$.

$(D4)$ (основной принцип неподвижной точки). Пусть полунепрерывное сверху (k,χ)-уплотняющее многозначное отображение $F : \overline{U} \to Kv(E)$ не имеет неподвижных точек на ∂U и $deg(I - F,\partial U) \neq 0$. Тогда F имеет в U неподвижную точку.

$(D5)$ **Принцип сужения отображения.**

Теорема 3. Пусть полунепрерывное сверху (k,χ)-уплотняющее многозначное отображение $F : \partial U \to Kv(E)$ не имеет неподвижных точек на границе ∂U и $F(\partial U) \subset E'$, где E' – подпространство E. Тогда

$$deg(I - F,\partial U) = deg|_{E'}(I - F,\partial U'),$$

где $U' = U \bigcap E'$, а $deg|_{E'}$ обозначает степень отображения, вычисляемую в подпространстве E'.

Всюду далее для каждого многозначного отображения $\Gamma : E_1 \to E_2$ множество селекторов $\{f \in E_2 : f(\tau) \in \Gamma(\tau)\}$ будем обозначать S_Γ.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ

Пусть $F : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ – многозначное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

A1) Функция F является T-периодической по первой переменной, то есть $F(\tau+T,u,v,\varepsilon) \equiv F(\tau,u,v,\varepsilon)$ для всех $(\tau,u,v,\varepsilon) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0,1]$;

A2) $F(\tau,\cdot,v,\cdot) : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ – равномерно относительно всех переменных полунепрерывно сверху по второй и четвертой переменным, если вторая и третья переменные лежат в ограниченных множествах;

A3) $F(\tau,u,\cdot,\varepsilon)$ – удовлетворяет условию Липшица по метрике Хаусдорфа $\mathbf{h}$ в $Kv(\mathbb{R}^n)$ с константой $0 < k < 1$.

A4) При каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in [0,1]$ для многозначной функции $F(\cdot, u, v, \varepsilon) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ существуют измеримые селекторы.

A5) Для любой константы $M > 0$ из неравенства $\|u\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant M$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^1$ и $\varepsilon \in [0,1]$ выполнена оценка $\|F(\tau, u, 0, \varepsilon)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \Phi_M$, где Φ_M – некоторая константа, соответствующая M.

Рассмотрим задачу об εT-периодических решениях для включения

$$z'(\tau) \in F\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, z(\tau - h(\varepsilon)), z'(\tau - h(\varepsilon)), \varepsilon\Big), \tag{1}$$

где $F : \mathbb{R}^1 \times C_{\varepsilon T}(\mathbb{R}^n) \times L^p_{\varepsilon T}(\mathbb{R}^n) \times [0,1] \to Kv(L^p_{\varepsilon T}(\mathbb{R}^n))$, $h : [0,1] \to \mathbb{R}^1_+$ – произвольное отображение и F удовлетворяет условиям $A1) - A5)$. Введем оператор

$$\Psi_\varepsilon(z, w) = \Big\{ f \in L^p_{\varepsilon T} : f(\tau) \overset{\text{п.в.}}{\in} F\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, z(\tau - h(\varepsilon)), w(\tau - h(\varepsilon)), \varepsilon\Big)\Big\}. \tag{2}$$

Очевидно, в силу выполнения условия A5), при z, удовлетворяющих неравенству $\|z\|_{C_{\varepsilon T}} \leqslant \leqslant M$, для оператора $\Psi_\varepsilon(z, w)$ будет верна оценка:

$$\|\Psi_\varepsilon(z, 0)(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \Phi_M. \tag{3}$$

Напомним, что $\|\Psi_\varepsilon(z, 0)(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} = \sup\{\|y\|_{\mathbb{R}^n} : y \in \Psi_\varepsilon(z, 0)(\tau)\}$.

Покажем, что в пространстве $L^p_{\varepsilon T}(\mathbb{R}^n)$ введенный оператор $\Psi_\varepsilon(z, w)$ полунепрерывен сверху по первой переменной и удовлетворяет k-условию Липшица по метрике Хаусдорфа по второй переменной.

В силу периодичности $F\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, z(\tau - h(\varepsilon)), w(\tau - h(\varepsilon)), \varepsilon\Big)$ по первой переменной, можно рассмотреть сужение функции $\Psi_\varepsilon(z, w)(\cdot)$ на $[0, \varepsilon T]$. Для этого определим оператор $\widetilde{\Psi}_\varepsilon$ с образами в $Kv(L^p([0, \varepsilon T], \mathbb{R}^n))$:

$$\widetilde{\Psi}_\varepsilon(z, w) = \Psi_\varepsilon(z, w)|_{[0,\varepsilon T]} = \Big\{ \widetilde{f} \in L^p([0, \varepsilon T], \mathbb{R}^n) : \\ \widetilde{f}(\tau) \overset{\text{п.в.}}{\in} F\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, z(\tau - h(\varepsilon)), w(\tau - h(\varepsilon)), \varepsilon\Big), \tau \in [0, \varepsilon T]\Big\}. \tag{4}$$

Зафиксируем вторую переменную w оператора $\widetilde{\Psi}_\varepsilon(\cdot, w)$. Пусть $\widetilde{C}$ – некоторая константа, $\widetilde{C} \in \mathbb{R}^1_+$. Обозначим через $\Theta_\varepsilon(\widetilde{C})$ множество тех $\tau \in [0, \varepsilon T]$, при которых выполнено соотношение $\|w(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} > \widetilde{C}$. В силу принадлежности w пространству $L^p_{\varepsilon T}(\mathbb{R}^n)$, очевидно, $mes\Theta_\varepsilon(\widetilde{C}) \xrightarrow[\widetilde{C} \to \infty]{} 0$. Тогда при $\tau \in [0, \varepsilon T] \setminus \Theta_\varepsilon(\widetilde{C})$ значения функции w будут лежать в шаре $B_{\mathbb{R}^n}(0, \widetilde{C})$.

Для оператора $\widetilde{\Psi}_\varepsilon(z, w)$ определим множество селекторов $\overline{S}_{\widetilde{\Psi}_\varepsilon(z,w)}$ таких, что

$$\overline{S}_{\widetilde{\Psi}_\varepsilon(z,w)} = \{\widetilde{f} \in L^p([0, \varepsilon T], \mathbb{R}^n) : \widetilde{f}(\tau) \in \widetilde{\Psi}_\varepsilon(z, w)(\tau), \tau \in [0, \varepsilon T] \setminus \Theta_\varepsilon(\widetilde{C})\},$$

где без ограничения общности будем считать, что включение выполнено при всех $\tau \in [0, \varepsilon T] \setminus \Theta_\varepsilon(\widetilde{C})$.

Из условия A2) следует, что при каждых фиксированных $\varepsilon \in (0,1)$, $\tau \in [0, \varepsilon T] \setminus \Theta_\varepsilon(\widetilde{C})$ и $w \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \widetilde{C})$ многозначное отображение $F(\tau, \cdot, w, \varepsilon)$ равномерно относительно всех переменных полунепрерывно сверху по второй переменной. Кроме того, в силу своей непрерывности, функция z_0, действующая на отрезке $[0, \varepsilon T]$, переводит компакт в компакт, поэтому для любого $\gamma > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что для всех $\tau \in [0, \varepsilon T] \setminus \Theta_\varepsilon(\widetilde{C})$ будет выполнено вложение

$$\widetilde{\Psi}_\varepsilon(z_0 + \eta B_{C_{\varepsilon T}}, w)(\tau) \subset \widetilde{\Psi}_\varepsilon(z_0, w)(\tau) + \gamma B_{\mathbb{R}^n}. \tag{5}$$

Пусть $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность из $C_{\varepsilon T}(\mathbb{R}^n)$, равномерно сходящаяся к z_0, тогда соотношение (5) можно записать следующим образом: для любого $\gamma > 0$ найдутся такие $\eta > 0$ и $i_0 > 0$, что для всех $i \geqslant i_0$, при которых выполнено неравенство $\|z_i - z_0\|_{C_{\varepsilon T}} < \eta$, можно выбрать селекторы $\widetilde{f}^{z_i} \in \overline{S}_{\widetilde{\Psi}_\varepsilon(z_i,w)}$, удовлетворяющие соотношению

$$dist(\widetilde{f}^{z_i}(\tau), \widetilde{\Psi}_\varepsilon(z_0,w)(\tau)) < \gamma \tag{6}$$

при каждом $\tau \in [0, \varepsilon T] \setminus \Theta_\varepsilon(\widetilde{C})$.

Заметим, что неравенство (6) остается верным в пространстве $L^p([0,\varepsilon T], \mathbb{R}^n)$, если вместо γ написать $\gamma_1 = (\varepsilon T)^{\frac{1}{p}}\gamma$. Далее, завершая доказательство полунепрерывности сверху многозначного отображения $\widetilde{\Psi}_\varepsilon(\cdot, w)$ в пространстве $L^p([0,\varepsilon T], \mathbb{R}^n)$ по первой переменной, рассуждениями, аналогичными проведенным в [3, стр. 125], с помощью Леммы Мазура и критерия Дистеля [3, стр. 109] можно показать, что слабый предел $\widetilde{f}^0$ селекторов $\widetilde{f}^{z_i}$ лежит в множестве $S_{\widetilde{\Psi}_\varepsilon(z_0,w)}$.

Также несложно видеть, что оператор (4) по второй переменной удовлетворяет k-условию Липшица по метрике Хаусдорфа в $L^p([0,\varepsilon T], \mathbb{R}^n)$.

Вернемся к оператору Ψ_ε путем построения εT-периодического продолжения для каждого селектора $\widetilde{f} \in \overline{S}_{\widetilde{\Psi}_\varepsilon(z,w)}$ на ось $\mathbb{R}^1$. Пусть Π_ε – есть εT-периодическое продолжение функции на $\mathbb{R}^1$, тогда

$$\Pi_\varepsilon \widetilde{\Psi}_\varepsilon(z,w) = \Pi_\varepsilon \Psi_\varepsilon(z,w)|_{[0,\varepsilon T]} = \Psi_\varepsilon(z,w).$$

Заметим, что, в силу выполнения оценки $\|\Pi_\varepsilon\| < 1$, из полунепрерывности сверху оператора $\Pi_\varepsilon \widetilde{\Psi}_\varepsilon(z,w)$ следует полунепрерывность оператора $\Psi_\varepsilon(z,w)$.

В операторе $\Psi_\varepsilon(z,w)$ сделаем замену переменных: $t = \frac{\tau}{\varepsilon}$, $\xi(t) = z(\varepsilon t)$, $\frac{1}{\varepsilon}\psi(t) = w(\varepsilon t)$ и переопределим его следующим образом:

$$\mathfrak{F}_\varepsilon\Big(\xi, \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big) = \Big\{ f \in L^p_T(\mathbb{R}^n) : f(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} F\Big(t, \xi\Big(t - \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(t - \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \varepsilon\Big)\Big\},$$

где $t \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in C_T(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L^p_T(\mathbb{R}^n)$, $h : [0,1] \to \mathbb{R}^1_+$ – произвольное отображение. Причем для оператора $\mathfrak{F}_\varepsilon : C_T(\mathbb{R}^n) \times L^p_T(\mathbb{R}^n) \to L^p_T(\mathbb{R}^n)$ выполнены следующие свойства:

*B*1) При каждых фиксированных $\varepsilon \in [0,1]$ и $\psi \in L^p_T(\mathbb{R}^n)$ $\mathfrak{F}_\varepsilon\Big(\cdot, \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big)$ полунепрерывно сверху по первой переменной, то есть для любого $\gamma > 0$ найдется такое $\eta > 0$, для каждой точки $\xi_0 \in C_T(\mathbb{R}^n)$ будет выполнено вложение

$$\mathfrak{F}_\varepsilon\Big(\xi_0 + \eta B_{C_T}, \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big) \subset \mathfrak{F}_\varepsilon\Big(\xi_0, \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big) + \gamma T^{\frac{1}{p}} B_{L^p_T}. \tag{7}$$

*B*2) $\mathfrak{F}_\varepsilon\Big(\xi, \cdot\Big)$ по второй переменной $\frac{1}{\varepsilon}\psi$ удовлетворяет условию Липшица с константой $0 < k < 1$ по метрике Хаусдорфа.

В соотношении (1) положим $t = \frac{\tau}{\varepsilon}$ и $x(t) = z(\varepsilon t)$, в результате чего перейдем к рассмотрению включения:

$$x'(t) \in \varepsilon F\Big(t, x\Big(t - \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \frac{1}{\varepsilon}x'\Big(t - \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \varepsilon\Big), \tag{8}$$

или, что то же самое,

$$x'(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} \varepsilon \mathfrak{F}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')(t). \tag{9}$$

Положим $\mathfrak{I}_0(\nu) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s, \nu, 0, 0)ds$, $\nu \in \mathbb{R}^n$. Введем оператор

$$H_{0,\varepsilon}(x) = x(0) + \varepsilon \mathfrak{I}_0(x(0)).$$

$B3$) Существует значение $\nu^* \in \mathbb{R}^n$ и некоторая ограниченная окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что

$$0 \in H_{0,\varepsilon}(\nu^*),\ \ \nu^* \in U \text{ и } deg(-H_{0,\varepsilon}, U) \neq 0.$$

Замечание. Положим $\widetilde{M} = \sup\{\|F(t,\nu,0,0)\|_{\mathbb{R}^n}, t \in \mathbb{R}^1, \nu \in \partial U\}$, и

$$\mathcal{M} = \{\psi \in L_T^p(\mathbb{R}^n) : \|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{\widetilde{M}}{1-k}\max\Big\{1; \frac{2}{T}\Big\}, \int\limits_0^T \psi(s)ds = 0\}.$$

Очевидно, $\widetilde{M} \leqslant \Phi_M$. Также определим оператор

$$\mathfrak{F}_0(\overline{\xi},\psi) = \{f \in L_T^p(\mathbb{R}^n) : f(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} F(t,\overline{\xi}(t),\psi(t),0)\}, \tag{10}$$

где $t \in \mathbb{R}^1, \overline{\xi}(t) \equiv \xi, \xi \in \partial U, \psi \in L_T^p(\mathbb{R}^n)$. Введем в рассмотрение многозначное отображение $Z : \partial U \to \mathbb{R}^n$, определенное следующим образом:

$$Z(x) = \Big\{z \in \mathbb{R}^n, z = \int\limits_0^T f_0^{(\overline{\xi},\psi)}(s)ds : f_0^{(\overline{\xi},\psi)} \in S_{\mathfrak{F}_0(\overline{\xi},\psi)}, \psi \in \mathcal{M}\Big\}.$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия $B1) - B3)$ и для всех $x \in \partial U$ верно соотношение

$$0 \notin \overline{co}Z(x). \tag{11}$$

Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$ что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ включение (9) имеет, по крайней мере, одно T-периодическое решение x_ε такое, что $x_\varepsilon(t) \in U$ и $\|x'_\varepsilon\|_{L_T^p} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов с помощью промежуточных Лемм и Предложений.

Рассмотрим сужение функции $\mathfrak{F}_\varepsilon\Big(\xi, \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big)(\cdot)$ на $[0,T]$, определив его через оператор $\widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon$, образы которого лежат в $Kv(L^p([0,T],\mathbb{R}^n))$:

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon(\xi, \frac{1}{\varepsilon}\psi) = \mathfrak{F}_\varepsilon\Big(\xi, \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big)|_{[0,T]} = \Big\{\widetilde{f} \in L^p([0,T],\mathbb{R}^n) :$$
$$\widetilde{f}(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} F\Big(t, \xi\Big(t - \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(t - \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \varepsilon\Big)\Big\},$$

где $t \in [0,T]$, $\xi \in C_T(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L_T^p(\mathbb{R}^n)$, $h : [0,1] \to \mathbb{R}^1_+$.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$ и введем в рассмотрение многозначный интегральный оператор H_ε следующего вида:

$$H_\varepsilon(x,y) = x(0) + \{J_\varepsilon(\widetilde{\zeta},\widetilde{f}) : \widetilde{\zeta} \in \widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}y'), \widetilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x'), x, y \in W_{p,T}^1\},$$

где $t \in [0,T]$ и $J_\varepsilon(\widetilde{\zeta},\widetilde{f})(t) = \varepsilon \int\limits_0^t \widetilde{\zeta}(s)ds - \varepsilon\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\int\limits_0^T \widetilde{f}(s)ds$.

Нетрудно видеть, что оператор H_ε действует из $W_{p,T}^1(\mathbb{R}^n) \times W_{p,T}^1(\mathbb{R}^n)$ в $Kv(W_p^1([0,T],\mathbb{R}^n))$. Также можно показать, что по второй переменной $H_\varepsilon(x,\cdot)$ удовлетворяет k-условию Липшица по метрике Хаусдорфа при любых фиксированных $\varepsilon \in (0,1)$. Кроме того, из свойств интеграла Аумана [4, стр.10] следует, что $H_\varepsilon(\cdot,y)$ полунепрерывен сверху по первой переменной.

Зафиксируем вторую переменную y оператора H_ε, обозначив ее через $\widetilde{y}$. Так как $\widetilde{y}' \in L^p_T(\mathbb{R}^n)$, то можно выбрать некоторую константу $\widetilde{C} \in \mathbb{R}^1_+$ и множество $\Theta(\widetilde{C})$ тех $t \in [0, \varepsilon T]$, для которых выполнено соотношение $\|\widetilde{y}'(t)\|_{\mathbb{R}^n} > \widetilde{C}$. Очевидно, $mes\Theta(\widetilde{C}) \xrightarrow[\widetilde{C}\to\infty]{} 0$. Тогда при $t \in [0,T] \setminus \Theta(\widetilde{C})$ значения функции $\widetilde{y}'$ будут лежать в шаре $B_{\mathbb{R}^n}(0, \widetilde{C})$.

Выберем $\widetilde{y} = x$ и обозначим через $\overline{S}_{\widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')}$ множество селекторов таких, что $\overline{S}_{\widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')} = \{\widetilde{f} \in L^p([0,T], \mathbb{R}^n) : \widetilde{f}(t) \in \widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')(t), t \in [0,T] \setminus \Theta(\widetilde{C}), x \in W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)\}$. Тогда многозначное отображение $H_\varepsilon(x,x)$ примет вид:

$$H_\varepsilon(x,x)(t) = x(0) + \{J_\varepsilon(\widetilde{f}, \widetilde{f})\} =$$

$$= x(0) + \{\varepsilon \int\limits_0^t \widetilde{f}(s)ds - \varepsilon \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) \int\limits_0^T \widetilde{f}(s)ds : \widetilde{f} \in \overline{S}_{\widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')}\}. \qquad (12)$$

Покажем, что семейство операторов $H_\varepsilon(\cdot, x)$ при фиксированных $\varepsilon \in (0,1)$ является (k,χ)-уплотняющим по первой переменной в пространстве $W^1_p([0,T], \mathbb{R}^n)$ с константой k относительно метрики некомпактности Хаусдорфа χ. Как было показано ранее, многозначное отображение $H_\varepsilon(\cdot, x)$ полунепрерывно сверху по первой переменной, поэтому переводит относительно компактное множество в относительно компактное. Так как для любого множества $\Omega \in Cb(W^1_p([0,T], \mathbb{R}^n))$ при всех $\{x\}$ множество $\Omega \times \{x\}$ относительно компактно, то $H_\varepsilon(\Omega \times \{x\})$ также относительно компактно. Таким образом, построенный диагональный оператор $H_\varepsilon(x,x)$ удовлетворяет всем условиям **Теоремы 1**, а значит, является (k,χ)-уплотняющим.

Построим T-периодическое продолжение многозначной функции $H_\varepsilon(x,x)(\cdot)$ на ось $\mathbb{R}^1$, для чего рассмотрим оператор Π, ставящий в соответствие каждому селектору $\widetilde{f} \in \overline{S}_{\widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')}$ его T-периодическое продолжение на $\mathbb{R}^1$, т.е. $\Pi\widetilde{f} = f$. Понятно, что при этом также будет выполнено

$$\Pi\widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x') = \Pi\mathfrak{F}_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}x'\Big)|_{[0,T]} = \mathfrak{F}_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}x'\Big).$$

Определим оператор $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)$ следующим образом:

$$\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x) = x(0) + \{J_\varepsilon(\Pi\widetilde{f}, \Pi\widetilde{f}) : \widetilde{f} \in \overline{S}_{\widetilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')}\} =$$
$$= x(0) + \{J_\varepsilon(f,f) : f \in S_{\mathfrak{F}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')}\}. \qquad (13)$$

Очевидно, $\mathfrak{B}_\varepsilon : W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n) \times W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n) \to Kv(W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n))$ и, в силу построения, все свойства оператора $H_\varepsilon(x,x)$ переносятся на $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)$.

Лемма 1. Неподвижные точки оператора $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)$ и только они являются T-периодическими решениями включения (9).

Доказательство. Пусть функция x является T-периодическим решением включения (9). Тогда $\varepsilon \int\limits_0^T \mathfrak{F}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')(s)ds \ni \varepsilon \int\limits_0^T x'(s)ds = x(T) - x(0) = 0$, поэтому $x(t) \in \mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)(t)$. Таким образом, T-периодические решения включения (9) являются неподвижными точками оператора $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)$.

И наоборот, пусть x есть неподвижная точка оператора $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)$ в $W^1_{p,T}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $x(0) = x(T) \in x(0) + \frac{1}{2}\varepsilon\{\int\limits_0^T f(s)ds : f \in S_{\mathfrak{F}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')}\}$, откуда следует, что $0 \in \int\limits_0^T \mathfrak{F}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')(s)ds =$

$\{\int\limits_0^T f(s)ds : f \in S_{\mathfrak{F}_\varepsilon(x,\frac{1}{\varepsilon}x')}\}$, а значит,

$$x(t) \in x(0) + \varepsilon \int\limits_0^t \mathfrak{F}_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}x'\Big)(s)ds,$$

что и требовалось доказать.

Предложение 2. Существует такое $\varepsilon_0 \in (0,1)$, что операторы $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)$ и $H_{0,\varepsilon}(x)$ линейно гомотопны на некотором множестве U при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$G^\varepsilon(\lambda,x) = \lambda\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x) + (1-\lambda)H_{0,\varepsilon}(x) \tag{14}$$

и покажем, что он определяет гомотопию.

Отображения $\mathfrak{B}_\varepsilon(x,x)$ и $H_{0,\varepsilon}(x)$ являются (k,χ)-уплотняющими по метрике Хаусдорфа и, кроме того, оператор (14) непрерывен, поэтому достаточно показать, что $G^\varepsilon(\lambda,x)$ не имеет неподвижных точек на границе множества ∂U при всех $\lambda \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$. Предположим противное. Пусть существуют сходящиеся последовательности:$\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$, $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ и $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ такие, что $\varepsilon_m \to 0, \varepsilon_m > 0$, $\lambda_m \to \lambda_0, \lambda_m \in [0,1]$, и

$$x_m \in \lambda_m\mathfrak{B}_{\varepsilon_m}(x_m,x_m) + (1-\lambda_m)H_{0,\varepsilon_m}(x_m(0)), x_m \in \partial U. \tag{15}$$

Включение (15) представим следующим образом:

$$x_m(t) \in \lambda_m x_m(0) + \lambda_m\varepsilon_m \int\limits_0^t \mathfrak{F}_{\varepsilon_m}(x_m, \frac{1}{\varepsilon_m}x'_m)(s)ds - \lambda_m\varepsilon_m\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^T \mathfrak{F}_{\varepsilon_m}(x_m, \frac{1}{\varepsilon_m}x'_m)(s)ds + (1-\lambda_m)\Big(x_m(0) + \varepsilon_m\mathfrak{I}_0(x_m(0))\Big). \tag{16}$$

Положим $t = T$ во включении (16) и, воспользовавшись равенством $x_m(0) = x_m(T)$, получим

$$0 \in \frac{1}{2}\lambda_m\varepsilon_m \int\limits_0^T \mathfrak{F}_{\varepsilon_m}(x_m, \frac{1}{\varepsilon_m}x'_m)(s)ds + (1-\lambda_m)\varepsilon_m\mathfrak{I}_0(x_m(0)) \tag{17}$$

Очевидно, существуют селекторы $\overline{f}^{x_m} \in S_{\mathfrak{F}_{\varepsilon_m}(x_m,\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m)}$ и $\overline{g}^m \in S_{\mathfrak{I}_0(x_m(0))}$, реализующие равенство для включения (17):

$$-(1-\lambda_m)\overline{g}^m \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{1}{2}\lambda_m \int\limits_0^T \overline{f}^{x_m}(s)ds. \tag{18}$$

Продиффиренцируем включение (16) и результат разделим на ε_m:

$$\frac{x'_m(t)}{\varepsilon_m} \in \lambda_m\mathfrak{F}_{\varepsilon_m}(x_m, \frac{1}{\varepsilon_m}x'_m)(t) - \lambda_m\frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathfrak{F}_{\varepsilon_m}(x_m, \frac{1}{\varepsilon_m}x'_m)(s)ds. \tag{19}$$

Для селекторов, удовлетворяющих соотношению (18), включение (19) примет вид:

$$\frac{x'_m(t)}{\varepsilon_m} \overset{\text{п.в.}}{=} \lambda_m\overline{f}^{x_m}(t) + \frac{2}{T}(1-\lambda_m)\overline{g}^m. \tag{20}$$

Лемма 2. Последовательность $\{\frac{x'_m(t)}{\varepsilon_m}\}_{m=1}^{\infty}$ относительно компактна в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Покажем сначала, что последовательность $\{\frac{x'_m(t)}{\varepsilon_m}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathbb{R}^n$. В силу выполнения условий $A2)$ и $A5)$ при почти всех $t \in \mathbb{R}^1$ будет верна оценка: $\|F\Big(t, x_m\Big(t - \frac{h_m(\varepsilon_m)}{\varepsilon_m}\Big), 0, 0\Big)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \Phi_M$ или

$$\|\mathfrak{F}_0(x_m, 0)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \Phi_M. \tag{21}$$

Тогда и для оператора $\mathfrak{I}_0(x_m(0))$ также будет выполнено:

$$\|\mathfrak{I}_0(x_m(0))\|_{\mathbb{R}^n} = \|\frac{1}{T}\int_0^T F(s, x_m(0), 0, 0)ds\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{1}{T}T\Phi_M \leqslant \Phi_M. \tag{22}$$

Из неравенств (21) и (22) следует, что для любых селекторов $f_{\varepsilon_m}^{(x_m,0)} \in S_{\mathfrak{F}_{\varepsilon_m}(x_m,0)}$ и $g^m \in S_{\mathfrak{I}_0(x_m(0))}$ выполнены соотношения: $\|f_{\varepsilon_m}^{(x_m,0)}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \Phi_M$ и $\|g^m\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \Phi_M$. Оценим $\frac{x'_m(t)}{\varepsilon_m}$ в равенстве (20)

$$\|\frac{x'_m(t)}{\varepsilon_m}\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \lambda_m\|\overline{f}^{x_m}(t) - f_{\varepsilon_m}^{(x_m,0)}(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|f_{\varepsilon_m}^{(x_m,0)}(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \frac{2}{T}(1-\lambda_m)\|\overline{g}^m\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_m k\|\frac{x'_m(t)}{\varepsilon_m}\|_{\mathbb{R}^n} + \Phi_M + \frac{2}{T}(1-\lambda_m)\Phi_M, \tag{23}$$

откуда получим

$$\|\frac{x'_m(t)}{\varepsilon_m}\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{\Phi_M}{(1-k)}\left\{1, \frac{2}{T}\right\}. \tag{24}$$

В пространстве $L_T^p(\mathbb{R}^n)$ оценка (24) примет вид:

$$\|\frac{x'_m}{\varepsilon_m}\|_{L_T^p} \leqslant \frac{\Phi_M T^{\frac{1}{p}}}{(1-k)}\left\{1, \frac{2}{T}\right\}, \tag{25}$$

откуда следует, что $x'_m \xrightarrow[m\to\infty]{L_T^p} 0$. Также будет верно

$$\|x_m\|_{W_{p,T}^1} = \|x_m(0)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x'_m\|_{L_T^p} \leqslant M + \frac{\varepsilon_m\Phi_M T^{\frac{1}{p}}}{(1-k)}\left\{1, \frac{2}{T}\right\}, \tag{26}$$

отсюда и из теоремы Арцела следует относительная компактность последовательности $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве $W_{p,T}^1(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, в силу сходимости x'_m к нулю, без ограничения общности можно предполагать, что $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{W_{p,T}^1} \widetilde{x}$, где $\widetilde{x}$ есть функция-константа со значениями, лежащими на границе ∂U.

Выберем некоторое $\rho > 0$ и положим, что $\{z_i, i = 0, \ldots n\}$ – конечная ρ-сеть в $L_T^p(\mathbb{R}^n)$ для $\left\{\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m\right\}_{m=1}^{\infty}$. Построим относительно компактную $k\rho$-сеть Ω для множества $\left\{\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m\right\}_{m=1}^{\infty}$, откуда, в силу оценки $k < 1$, будет следовать относительная компактность $\left\{\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m\right\}_{m=1}^{\infty}$.

Для построения соответствующей $k\rho$-сети рассмотрим подмножество $W \subset L_T^p(\mathbb{R}^n)$, определенное как $W = \{w_{i,m}; i = 1, \ldots, p; m \in \mathbb{N}\}$, $w_{i,m}(t) = z_i(t - \frac{h(\varepsilon_m)}{\varepsilon_m})$. Очевидно, W относительно компактна в $L_T^p(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$\omega_{i,m}(t) \in \lambda_m\mathfrak{B}_{\varepsilon_m}(x_m, z_{i,m})(t) + \frac{1}{T}(1-\lambda_m)H_{0,\varepsilon_m}(x_m(0))$$

и $\Omega = \{\omega_{i,m}, i = 1, \dots, p; m \in \mathbb{N}\}$. Тогда, в силу выполнения $B1) - B3)$, множество Ω относительно компактно в $L^p_T(\mathbb{R}^n)$ и верна следующая оценка:

$$\|\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m(t) - \omega_{i,m}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \lambda_m\|\overline{f}^{x_m}(t) - f^{(x_m,z_{i,m})}_{\varepsilon_m}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_m k\Big\|\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m\Big(t - \frac{h(\varepsilon_m)}{\varepsilon_m}\Big) - z_{i,m}\Big(t - \frac{h(\varepsilon_m)}{\varepsilon_m}\Big)\Big\|_{\mathbb{R}^n}, \quad (27)$$

где $f^{(x_m,z_{i,m})}_{\varepsilon_m} \in S_{\mathfrak{F}_{\varepsilon_m}(x_m,z_{i,m})}$. Так как $\{z_i, i = 0, \dots n\}$ есть ρ-сеть в $L^p_T(\mathbb{R}^n)$ множества $\left\{\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m\right\}_{m=1}^{\infty}$, то $\inf_{i=(1,\dots,p)} \|\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m(t) - \omega_{i,m}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant k\rho$, следовательно, Ω является относительно компактной $k\rho$-сетью множества $\left\{\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ в L^p_T. Последнее рассуждение завершает доказательство Леммы 2.

Пусть $w \in \mathbb{R}^n$ – предельная точка последовательности $\left\{\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m\right\}_{m=1}^{\infty}$, без ограничения общности можно полагать, что расстояние

$$dist\Big(\frac{h(\varepsilon_m)}{\varepsilon_m}, h_0 + T\mathbb{N}\Big) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0, h_0 \in [0, T].$$

В силу ограниченности в $\mathbb{R}^n$ множества селекторов $\overline{S}_{\widetilde{\mathfrak{F}}_{\varepsilon_m}(x_m,\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m)}$ при всех $t \in [0, T] \setminus \Theta(\widetilde{C})$ и периодичности продолжения множество $S_{\mathfrak{F}_{\varepsilon_m}(x_m,\frac{1}{\varepsilon_m}x'_m)}$ также будет ограничено в $\mathbb{R}^n$ при почти всех $t \in \mathbb{R}^1$ и, кроме того, компактно, а значит, и слабо компактно. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность селекторов $\{\overline{f}^{x_{m_k}}\}_{k=1}^{\infty}$, слабо сходящуюся к некоторому пределу $\overline{f}^{\infty}$ и удовлетворяющую равенству (20). И снова, воспользовавшись леммой Мазура и проведя рассуждения, аналогичные [3, стр.125], можно показать, что $\overline{f}^{\infty} \in \mathfrak{F}_0(\widetilde{x}, w)$ и $\overline{g}^{\infty} \in \mathfrak{I}_0(\widetilde{x})$.

Таким образом, при переходе к пределу в равенстве (20) получим

$$w(t) = \lambda_0\overline{f}^{\infty}(t) + \frac{2}{T}(1 - \lambda_0)\overline{g}^{\infty}(t), \quad (28)$$

где $\overline{f}^{\infty} \in \mathfrak{F}_0(\widetilde{x}, w)$ и $\overline{g}^{\infty} \in \mathfrak{I}_0(\widetilde{x})$ при почти всех $t \in \mathbb{R}^1$, следовательно, для включения (19) предельное включение будет иметь вид:

$$w(t) \in \lambda_0\mathfrak{F}_0(\widetilde{x}, w)(t) + (1 - \lambda_0)\mathfrak{I}_0(\widetilde{x}) \quad (29)$$

для почти всех $t \in \mathbb{R}^1$. Из равенства (28) и неравенства треугольника следует $\|w(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \lambda_0 k\|w(t_0 - h_0)\|_{\mathbb{R}^n} + \lambda_0\widetilde{M} + \frac{2}{T}(1 - \lambda_0)\widetilde{M}$. Таким образом, для $\|w(t_0)\|_{\mathbb{R}^n}$ получена оценка:

$$\|w(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{\widetilde{M}}{1 - k}\max\{1; \frac{2}{T}\}. \quad (30)$$

Заметим также, что в силу периодичности и ограниченности $\frac{1}{\varepsilon}x'_m(t)$ при почти всех $t \in \mathbb{R}^1$, по свойству интеграла Лебега, для предельной функции также будет верно равенство $\int\limits_0^T w(s)ds = 0$. Таким образом, $w \in \mathcal{M}$ и, очевидно, $w(\cdot - h_0) \in \mathcal{M}$.

Перейдем к пределу в равенстве (18):

$$\frac{1}{2}\lambda_0\int\limits_0^T \overline{f}^{\infty}(s)ds + (1 - \lambda_0)\overline{g}^{\infty} \overset{\text{п.в.}}{=} 0. \quad (31)$$

Положим $z_0 := \int\limits_0^T \overline{f}^\infty(s)ds \in Z(\widetilde{x})$. Тогда равенство (31) перепишется в виде $\frac{1}{2}\lambda_0 z_0 + (1 - \lambda_0)\overline{g}_\infty \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, причем $\overline{g}^\infty \in Z(\widetilde{x})$, и, следовательно,

$$\lambda_0 z_0 + (1 - \lambda_0)\overline{g}^\infty \in \overline{co}Z(\widetilde{x}). \tag{32}$$

Но включение (32) противоречит условию $0 \notin coZ(x)$. Действительно, рассмотрим произвольный линейный функционал $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, строго положительный на $\overline{co}Z(\widetilde{x})$. Воспользовавшись соотношением (32), получим:

$$0 = \varphi(\frac{1}{2}\lambda_0 z_0 + (1 - \lambda_0)\overline{g}^\infty) = \frac{1}{2}\varphi(\lambda_0 z_0 + (1 - \lambda_0)\overline{g}^\infty) + (1 - \lambda_0)\frac{1}{2}\varphi(\overline{g}^\infty) > 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство **Предложения 2**.

Перейдем к завершению доказательства **Теоремы 4**. В силу свойства $D2$, $deg_{L^p_T}(I - \mathfrak{B}_\varepsilon, V(\nu^*) \times \mathrm{B}_{L^p_T}(0, r)) = deg_{L^p_T}(I - H_{0,\varepsilon}, V(\nu^*) \times \mathrm{B}_{L^p_T}(0, r))$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Заметим также, что $(I - H_{0,\varepsilon})(0) = -\varepsilon\mathfrak{I}_0(x_0(0))$ для всех функций-констант x_0. Применяя принцип сужения отображения, получим

$$\begin{aligned} deg_{L^p_T}(I - \mathfrak{B}_\varepsilon, V(\nu^*) \times \mathrm{B}_{L^p_T}(0, r)) = deg_{L^p_T}(I - H_{0,\varepsilon}, V(\nu^*) \times \mathrm{B}_{L^p_T}(0, r)) = \\ = deg_{\mathbb{R}^n}(-\varepsilon\mathfrak{I}_0(x_0(0)), V(\nu^*) \times \mathrm{B}_{L^p_T}(0, r)). \end{aligned} \tag{33}$$

В силу условия (11) Теоремы 4, можно утверждать, что отображения $-\varepsilon\mathfrak{I}_0(x_0(0))$ и $-\mathfrak{I}_0(x_0(0))$ гомотопны в $\mathbb{R}^n$, откуда следует соотношение

$$deg_{L^p_T}(I - \mathfrak{B}_\varepsilon, V(\nu^*) \times \mathrm{B}_{L^p_T}(0, r)) = deg_{\mathbb{R}^n}(-\mathfrak{I}_0(x_0(0)), V(\nu^*) \times \mathrm{B}_{L^p_T}(0, r)) \neq 0 \tag{34}$$

для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Таким образом, из теории степени отображения следует, что $\mathfrak{B}_\varepsilon(x, x)$ имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку $x_\varepsilon(t) \in V(\nu^*)$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, т.е. включение (9) имеет T-периодическое решение $x_\varepsilon(\cdot)$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $x_\varepsilon(t) \in V(\nu^*)$ при $t \in \mathbb{R}$. Последнее утверждение завершает доказательство Теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Couchouron, J.-F. Averaging method for neutral differential equations in finite dimension / J.-F. Couchouron, M. Kamenskii // Topological methods in nonlinear analysis. — 2010. — V. 35, № 2. — P. 221–234.

2. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров [и др.]. — Новосибирск : Наука, 1986. — 265 с.

3. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin; New York: de Gruyter, 2001. — 231 p.

4. Aumann R. J. Integrals of Set-Valued Functions / R. J. Aumann // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1965. — № 12. — P. 1–12.

5. Введение в теорию многозначных отображений / Ю. Г. Борисович [и др.]. — Воронеж : Издательство ВГУ, 1986. — 104 с.

6. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский // Успехи математических наук. — 1980. — Т. 35, № 1. — С. 59–126.

REFERENCES

1. Couchouron J.-F., Kamenskii M. Averaging method for neutral differential equations in finite dimension. Topological methods in nonlinear analysis, 2010, vol. 35, no. 2, pp. 221–234.

2. Ahmerov R.R., Kamenskii M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskii B.N. Measures of noncompactness and condensing operators. [Ahmerov R.R., Kamenskii M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskii B.N. Mery nekompaktnosti i uplotnjajushhie operatory]. Novosibirsk: Nauka, 1986, 265 p.

3. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin; New York: de Gruyter, 2001, 231 p.

4. Aumann R.J. Integrals of Set-Valued Functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1965, no. 12, pp. 1-12. Aumann R. J. Integrals of Set-Valued Functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1965, no. 12, pp. 1–12.

5. Borisovich Y.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the theory of multivalued maps. [Borisovich Y.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Vvedenie v teoriju mnogoznachnyh otobrazhenij]. Voronezh: VSU publishing house, 1986, 104 p.

6. Borisovich Y.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Topological methods in the fixed-point theory of multivalued maps. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskij V.V. Topologicheskie metody v teorii nepodvizhnyh tochek mnogoznachnyh otobrazhenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1980, vol. 35, no. 1, pp. 59–126.

Иконникова Елена Владимировна, аспирант, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: uralochka_87@mail.ru
Тел.: +7(473)220–87–71

Ikonnikova Elena Vladimirovna, Graduate student, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: uralochka_87@mail.ru
Tel.: +7(473)220–87–71