УДК 517.958

РАЗРЕШИМОСТЬ АЛЬФА-МОДЕЛЕЙ ГИДРОДИНАМИКИ*

А. В. Звягин, В. Г. Звягин, Д. М. Поляков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 23.05.2016 г.

Аннотация. Данная работа содержит обзор результатов по разрешимости альфа-моделей гидродинамики. Эти модели для исходной системы представляют собой своего рода "сглаженные" модели, зависящие от параметра α. При этом одним из важнейших свойств альфа-моделей является, в первую очередь, их применение к исследованию эффектов турбулентности для потоков жидкости. В статье описаны теоремы существования для следующих альфа-моделей: Навье-Стокса, Кларка, Лере, Бардина, Максвелла и Джеффриса-Олдройда. Приведены результаты существования, как сильных и обобщенных решений, так и слабых и диссипативных решений (подробно введено и описано понятие диссипативного решения), для альфа-моделей гидродинамики.

Ключевые слова: альфа-модели гидродинамики, начально-краевая задача, обобщенное решение, диссипативное решение, теорема существования.

SOLVABILITY OF ALPHA-MODEL OF HYDRODYNAMICS

A. V. Zvyagin, V. G. Zvyagin, D. M. Polyakov

Abstract. This paper is contained review on solvability of alpha-model of hydrodynamics. These models represent a kind of "smoothness" depending on the parameter α for the original system. Wherein the most important property of alpha-models is primarily to their application to the study of the effects of turbulence of a fluid flow. We describe the existence theorem for the following alpha-models: Navier-Stokes-α, Clark-α, Leray-α, Bardina-α, Maxwell-α and Jeffeys-Oldroyd-α. The existence results as strong solutions, as well as the weak and dissipative solutions (the concept of dissipative solutions introduced and described in detail) for alpha-models of hydrodynamics.

Keywords: initial-boundary value problem, α-model of hydrodynamics, regular solution, dissipative solution, existence theorem.

ВВЕДЕНИЕ

В последние 20 лет в математической гидродинамике стали активно развиваться так называемые альфа-модели, описывающие турбулентное движение среды. Эти модели для исходной системы представляют собой своего рода "сглаженные" модели, зависящие от параметра α. Исследовать эти модели существенно проще и численно, и аналитически. Кроме

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (проект 1.1539.2014/К) (разделы 2.1–2.3), РФФИ (проект № 16–31–60075–мол_а_дк) (разделы 2.4–2.6), Российского научного фонда (проект № 14–21–00066, выполняемый в Воронежском государственном университете) (разделы 3.1–3.3).

того, имеется определенная схожесть решений альфа-моделей с эмпирическими данными, полученными для исходных моделей [1], [2].

Одно из важнейших свойств альфа-моделей, связано, в первую очередь, с их применением к исследованию эффектов турбулентности для потоков жидкости [3]. Напомним, что турбулентностью жидкости называется такое явление, при котором в течении жидкости образуются многочисленные вихри различных размеров, вследствие чего гидродинамические и термодинамические свойства (скорость, плотность, давление, температура и др.) испытывают хаотичные колебания (т. е. изменяются от точки к точки нерегулярно). Также делались шаги по использованию альфа-моделей в исследованиях движения потоков воды в Атлантическом океане, циркуляции атмосферы для глобального моделирования климата [4]. Однако отметим, что помимо указанных приложений, применение альфа-моделей в других областях математической физики пока еще не разрабатывалось, что и отмечается авторами этих моделей (см. [4]).

Одной из первых работ, посвященной сглаженным системам была работа Ж. Лере [5]. Для доказательства существования слабого решения системы Навье-Стокса им была использована вспомогательная система, где скорость в ряде слагаемых была заменена на более гладкую вектор-функцию. Намного позже эта идея была использована для построения альфа-моделей Эйлера и Навье-Стокса [6], [7], [8]. Т. е. альфа-модели отличаются от классических моделей движения тем, что неизвестная функция скорости v в ряде слагаемых заменена на более гладкую вектор-функцию u, связанную с v эллиптической системой $v = u - \alpha^2 \Delta u$. Используемый здесь оператор $I - \alpha^2 \Delta$ представляет собой известный оператор Гельмгольца. Выбор в качестве аппроксимационного оператора именно этого оператора, связан с его хорошими математическими свойствами (является непрерывно обратимым оператором [9]). Параметр α в этом представлении имеет определенный физический смысл. Он отражает ширину шкалы пространственной фильтрации модели.

Основными направлениями, которые изучаются в настоящее время в теории альфа-моделей гидродинамики, являются: существование и единственность решений альфа-моделей, поведение этих решений, когда параметр α стремится к нулю, построение аттракторов, а также исследование физических характеристик, которые связаны с проблемой турбулентности (энергетический спектр, пограничный слой).

Данная работа посвящена обзору основных результатов, касающихся вопросов разрешимости известных на данный момент альфа-моделей.

Теперь мы остановимся на некоторых ключевых моментах. В качестве области $\mathfrak{S}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, мы зачастую будем рассматривать периодическую область. Для альфа-моделей самым распространенным и физически обусловленным граничным условием является периодическое граничное условие. Данная ситуация соответствует движению жидкости в каналах или трубах. Также достаточно интересным случаем является тот, где в качестве области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, рассматривается ограниченную область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В этой ситуации наиболее популярным граничным условием является условие прилипания частиц жидкости к границе области (или, более общо, что скорость стремится к нулю при приближении к границе):

$$v|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $v = (v_1, \dots, v_n)$ — скорость движения жидкости. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением этих двух случаев.

Также всюду будет предполагаться, что все рассматриваемые в этой работе среды являются несжимаемыми, т. е. выполнено условие

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Учитывая эти два ключевых момента, мы перейдем к формулировке результатов о разрешимости альфа-моделей гидродинамики.

Работа организована следующим образом. В первом параграфе будут введены все необходимые предварительные сведения и функциональные пространства. Второй параграф посвящен обзору результатов разрешимости альфа-моделей Эйлера, Навье-Стокса, а также пяти модификаций этих моделей. Наконец, в третьем параграфе будет обсуждаться результаты, касающиеся альфа-моделей неньютоновских сред. А именно, альфа-модели Максвелла и Джеффриса-Олдройда.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Как было отмечено во введении, через Ω будет обозначаться ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а через $\mathfrak{S}$ — периодическая область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.

Через $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-ой степенью. Через $H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, обозначается пространство Соболева функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, которые со своими производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_2(\Omega)$.

Скалярные произведения в $L_2(\Omega)$ и $H^m(\Omega)$ будут обозначаться соответственно через $(\cdot, \cdot)$ и $(\cdot, \cdot)_m$. Нормы в этих пространствах будем обозначать через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_m$ соответственно.

Через $C_0^\infty(\Omega)$ мы обозначим пространство бесконечно-дифференцируемых функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω. Через $H_0^m(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ обозначим замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $H^m(\Omega)$.

Пусть $\mathcal{V}$ множество соленоидальных функций $\{u \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}$. Символами H и V обозначим замыкания $\mathcal{V}$ в $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ соответственно. Мы также будем использовать пространство $V_3 = V \cap H^3(\Omega)$ со скалярным произведением, наследованным из $H^3(\Omega)$.

В пространстве V наряду со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_1$ мы будем использовать другое скалярное произведение

$$(u, v)_V = (u, v) + (\alpha \nabla u, \alpha \nabla v),$$

и соответствующую норму $\|\cdot\|_V$.

Также дополнительно мы рассмотрим пространства $\mathcal{V}^s = H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $s \geqslant 1$, и $\widetilde{\mathcal{V}}^s = \{u \in \mathcal{V}^s \,|\, \operatorname{div} u = 0\}$.

Теперь перейдем к обозначениям для случая периодической области. Мы рассмотрим следующее пространство

$$\mathcal{W} = \{\varphi : \varphi \text{ тригонометрический полином, определенный на } \mathfrak{S}, \operatorname{div} \varphi = 0, \int\limits_{\mathfrak{S}} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = 0\}.$$

Пространства $\mathbb{H}$, $\mathbb{V}$ и $\widetilde{\mathbb{V}}$ обозначают замыкания $\mathcal{W}$ по нормам $L_2(\mathfrak{S})$, $H^1(\mathfrak{S})$ и $H^2(\mathfrak{S})$ соответственно. Символом $\widehat{\mathbb{V}}$ обозначим пространство $\widehat{\mathbb{V}} = \mathbb{H} \cap H^1(\mathfrak{S})$.

Через $\langle f, \varphi \rangle$ будем обозначать действие функционала f из X^* на элемент φ из банахова пространства X.

Символами $C([0,T];F)$, $C_w([0,T];F)$, $L_2(0,T;F)$ мы обозначим банаховы пространства непрерывных, слабо непрерывных и суммируемых с квадратом функций на $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве F.

2. АЛЬФА-МОДЕЛИ ЭЙЛЕРА, НАВЬЕ-СТОКСА И ИХ МОДИФИКАЦИИ

2.1. Альфа-модель Эйлера

По всей видимости альфа-модель Эйлера была введена и изучена первой среди всех альфа-моделей. Ее вывод был осуществлен в работах Дж. Марсдена, Д. Хольма и Т. Ратио [6], [7]. Особенно выделим работу [7], в которой данная альфа-модель выводится несколькими различными подходами. Также отметим работу [1] важную с точки зрения приложений. В этой статье устанавливается связь между уравнением для альфа-модели Эйлера и турбулентными потоками в каналах и трубах.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Мы будем рассматривать следующую начально-краевую задачу, соответствующую альфа-модели Эйлера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \nabla u_i + \nabla p = f, \tag{1}$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \tag{3}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{5}$$

где $v = (v_1, \ldots, v_n)$ — скорость движения жидкости, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — модифицированная скорость, $p = p(t, x)$ — давление жидкости, $f = f(t, x)$ — плотность внешних сил. Также отметим, что (4) — граничные условия "прилипания", (5) — начальные условия.

Всюду в этом параграфе считается, что $f(x, t) \equiv f(x)$.

Несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию альфа-модели Эйлера (см. [10] и используемую там литературу), результатов касающихся разрешимости крайне мало. До сих пор не установлено ни существования сильного решения, ни существования слабого решения системы (1) – (5).

Если $\mathfrak{S}$ — периодическая область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, то ситуация и здесь кардинально не меняется. В трехмерном случае вопрос существования сильного или слабого решений является открытым. Однако, необходимо отметить недавний результат [11], в котором был получен критерий существования и единственности сильного решения для задачи (1) – (3), (5), где в качестве области принимается все пространство $\mathbb{R}^3$ и $f = 0$. Также отметим еще один результат М. Оливера и С. Школлера [12] о существовании и единственности слабого решения задачи (1) – (3), (5), в случае когда область $\mathfrak{S}$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^2$ и $f = 0$.

2.2. Альфа-модель Навье-Стокса

Данный параграф посвящен описанию одной из самой популярной альфа-модели гидродинамики — альфа-модели Навье-Стокса.[1)] Как и классическая модель Навье-Стокса, ее альфа-модель является наиболее популярной для исследования. Причем для нее удается получить достаточно много сильных и интересных результатов.

Мы будем рассматривать следующую задачу, которая соответствует альфа-модели Навье-Стокса:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \nabla u_i + \nabla p = f, \tag{6}$$

[1)] Иногда в литературе альфа-модель Навье-Стокса называется усредненной по Лагранжу альфа-моделью Навье-Стокса или моделью Камассы-Хольма с вязкостью

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{7}$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \tag{8}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{9}$$

где ν — кинематическая вязкость.

Впервые эта альфа-модель была введена в работах [1], [8], [13], [14]. В указанных статьях было установлено, что альфа-модель Навье-Стокса является моделью турбулентности потоков жидкости в каналах и трубах. Также в [14] был приведен вывод этой модели, основанный на применении известной теореме Кельвина о циркуляции [15, Гл. 1, § 13].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей класса C^3. Первый результат будет посвящен существованию слабого решения. Мы будем рассматривать систему (6) – (9), дополнив ее краевым условием прилипания на границе

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{10}$$

Сформулируем определение слабого решения.

Определение 1. Пусть $f \in L_2(\Omega)$ и $u_0 \in \widetilde{\mathcal{V}}^1$. Для любого $T > 0$ функция

$$u \in C([0,T]; \widetilde{\mathcal{V}}^1) \cap L_2(0,T; \mathcal{V}^2), \quad \frac{du}{dt} \in L_2(0,T; L_2(\Omega)) \cap L_\infty(0,T; \widetilde{\mathcal{V}}^1),$$

удовлетворяющая начальному условию (9), называется слабым решением начально-краевой задачи (6) – (10), если выполнено равенство

$$\left\langle \frac{dv}{dt}, w \right\rangle - \nu \langle \Delta v, w \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{3} v_i \nabla u_i, w \right\rangle = (f, w).$$

для каждого $w \in \mathcal{V}^2$ и для почти всех $t \in [0, T]$.

Основным результатом в ограниченной области является следующая

Теорема 2. *Для $f \in L_2(\Omega)$ и $u_0 \in \widetilde{\mathcal{V}}^1$ существует единственное слабое решение*

$$u \in C([0,\infty), \widetilde{\mathcal{V}}^1) \cap L_\infty((s,\infty), \widetilde{\mathcal{V}}^3), \quad s > 0,$$

начально-краевой задачи (6) – (10), непрерывно зависящее от начальных данных.

Частичное доказательство дано в [16, Теорема 2.1]. При этом был использован метод Фаэдо-Галеркина (см., например, [17, Глава III, § 1.1]). Кратко приведем основную идею этого метода. В выбранном функциональном пространстве, в котором рассматривается исходное уравнение, ищется базис, удовлетворяющий граничным условиям. Конкретный вид базисных векторов определяется из специфики задачи, но, как правило, основывается на хороших свойствах операторов (положительная определенность, самосопряженность), определяемых линейной частью уравнения, что бывает не всегда. Далее, выписывается приближенное решение этого уравнения, которое представляется в виде разложения по базису, и проверяется ортогональность полученной системы к базисным функциям. В силу линейной независимости базисных векторов, полученная система сводится к линейной системе с постоянными коэффициентами, которое единственным образом определяет коэффициенты разложения. На основе априорных оценок для "приближенной" задачи показывается, что из последовательности приближенных решений можно выделить подпоследовательность, которая в некотором смысле (слабом или в смысле распределений) сходится к решению исходной задачи.

Приведем еще один результат о существовании сильного решения для начально-краевой задачи (6) – (10) при $f = 0$.

Теорема 3. *Для* $u_0 \in \widetilde{\mathcal{V}}^s$ *и* $s \in [3,5)$ *существует единственное решение* u *в классе*

$$u \in C([0,\infty), \widetilde{\mathcal{V}}^s) \cap C^\infty((0,\infty), \Omega).$$

Частичное доказательство было приведено в [18, Теорема 5.2].

Теперь пусть $\mathfrak{S} = [0,L]^n$, $L > 0$, — периодическая область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$. Результат о существовании решения достаточно похож на соответствующий результат в случае ограниченной области. Для рассматриваемой задачи (6) – (9) мы сформулируем понятие обобщенного решения.

Определение 4. Пусть $f \in \mathbb{H}$ и $u_0 \in \mathbb{V}$. Для любого $T > 0$ функция

$$u \in C([0,T];\mathbb{V}) \cap L_2(0,T;H^2(\mathfrak{S}) \cap \mathbb{V}), \quad \frac{du}{dt} \in L_2(0,T;\mathbb{H}),$$

удовлетворяющая начальному условию (9), называется обобщенным решением начально-краевой задачи (6) – (9), если выполнено равенство

$$\left\langle \frac{dv}{dt}, w \right\rangle - \nu\langle \Delta v, w\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n v_i \nabla u_i, w \right\rangle = (f,w).$$

для каждого $w \in H^2(\mathfrak{S}) \cap \mathbb{V}$ для почти всех $t \in [0,T]$.

Теорема 5. *Для* $f \in \mathbb{H}$, $u_0 \in \mathbb{V}$ *и* $T > 0$ *существует единственное обобщенное решение* u *начально-краевой задачи (6) – (9), непрерывно зависящее от начальных данных.*

Доказательство этой теоремы, проводимое методом Фаэдо-Галеркина, приведено в [19, Теорема 2.1].

В заключении этого раздела, мы затронем вопрос связи альфа-модели Навье-Стокса с классической моделью. А именно, сходимость обобщенного решения альфа-модели Навье-Стокса к слабому решению классической системы при $\alpha \to 0$. Прежде напомним некоторые определения, связанные с классической системой Навье-Стокса.

Рассмотрим систему Навье-Стокса с периодическими краевыми условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \nabla p = f, \tag{11}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{12}$$

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{13}$$

Для этой системы сформулируем определение слабого решения (см. [17, Глава III, § 3.1]).

Определение 6. Пусть $f \in \mathbb{V}^*$ и $u_0 \in \mathbb{H}$. Для любого $T > 0$ функция $u \in L_2(0,T;\mathbb{V})$, удовлетворяющая начальному условию (9), называется слабым решением задачи (11) – (13), если выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}(v,w) + \nu(\nabla v, \nabla w) + \left\langle \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right\rangle = \langle f, w\rangle.$$

для каждого $w \in \mathbb{V}$ для почти всех $t \in [0,T]$.

Итак, для решений из определений 4 и 6 имеет место следующая связь.

Теорема 7. *Пусть $f \in \mathbb{H}$, $u_0 \in \mathbb{V}$. Если u_α и $v_\alpha = u_\alpha - \alpha^2 \Delta u_\alpha$ обозначают решения задачи (6) – (9), то существуют подпоследовательности u_{α_j}, v_{α_j} и функция u такие, что при $\alpha_j \to 0$ выполнены условия:*

(i) $u_{\alpha_j} \to u$ сильно в $L_2^{loc}([0,\infty), \mathbb{H})$;

(ii) $u_{\alpha_j} \to u$ слабо в $L_2^{loc}([0,\infty), \mathbb{V})$;

(iii) для каждого $T > 0$ и каждого $w \in \mathbb{H}$ имеет место равномерная на $[0,T]$ сходимость $(u_{\alpha_j}(t), w) \to (u(t), w)$;

(iv) $v_{\alpha_j} \to u$ слабо в $L_2^{loc}([0,\infty); \mathbb{H})$ и сильно в $L_2^{loc}([0,\infty); \mathbb{V}^*)$.

Здесь, u — слабое решение классической системы Навье-Стокса (11) – (13).

Доказательство этой теоремы приведено в [19, Теорема 6.1].

Перейдем к различным модификациям альфа-модели Навье-Стокса. В следующих разделах мы рассмотрим альфа-модели Кларка, Лере, Бардина и модифицированную альфа-модель Лере. Все указанные альфа-модели, так же как и альфа-модель Навье-Стокса, моделируют турбулентность потоков жидкости в каналах и трубах. Отметим, что отличительной чертой этих моделей является их совпадение с классической системой Навье-Стокса (11) – (13) при $\alpha = 0$.

2.3. Альфа-модель Кларка

В работе Р. Кларка, Дж. Ферзингера и У. Рейнольдса [20] для получения численных результатов турбулентности потоков жидкости была предложена следующая модификация классической системы Навье-Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \nabla \mathcal{K}(u) + \nabla p = 0, \tag{14}$$

где

$$\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{ij}), \quad \mathcal{K}_{ij} = \mathcal{K}_{ij}(u) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad i,j = \overline{1,3}.$$

Позднее рассматриваемая система стала называться моделью Кларка. В дальнейшем, она использовалась для численного моделирования турбулентных потоков жидкости (см. [21], [22] и используемую там литературу).

При дальнейшем развитии теории альфа-моделей, в работе [23] была рассмотрена альфа-модель Кларка, которая представляет собой определенную модификацию модели (14). В периодической области $\mathfrak{S} = [0, 2\pi L]^n$, $L > 0$, пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, мы будем рассматривать следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \alpha^2 \nabla (1 - \alpha^2 \Delta)^{-1} \mathcal{K}(u) + \nabla p = f, \tag{15}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{16}$$

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{17}$$

Перейдем к формулировке результатов, касающихся этой модели. Сформулируем определение обобщенного решения системы (15) – (17).

Определение 8. Пусть $T > 0$ и $f \in \mathbb{V}$. Функция u из класса

$$u \in C_w([0,T]; \widetilde{\mathbb{V}}) \cap L_2([0,T]; H^3(\mathfrak{S})), \quad \frac{du}{dt} \in L_2([0,T]; \mathbb{V})$$

называется обобщенным решением системы (15) – (17) на $[0,T]$, если u удовлетворяет равенствам (15) – (17).

Имеет место следующая теорема

Теорема 9. *Пусть $u_0 \in \mathbb{V}$ и $f \in \mathbb{V}$. Тогда существует единственное обобщенное решение системы (15) – (17) для всех $T > 0$, непрерывно зависящее от начальных данных.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [15, Теорема 5].

Замечание 10. Вопрос существования сильного или слабого решений в ограниченных областях из $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, до настоящего момента не исследовался.

2.4. Альфа-модель Лере

Перейдем к еще одной интересной модификации системы Навье-Стокса. Как отмечалось во введении, в работе [5] для доказательства существования слабых решений уравнения Навье-Стокса Ж. Лере была рассмотрена следующая аппроксимационная задача:

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} - \nu \Delta v^\alpha + \sum_{i=1}^{n} u_i^\alpha \frac{\partial v^\alpha}{\partial x_i} + \nabla p = f, \tag{18}$$

$$u^\alpha = \varphi_\alpha * v^\alpha, \tag{19}$$

$$\operatorname{div} v^\alpha = 0, \tag{20}$$

$$v^\alpha|_{t=0} = v_0^\alpha. \tag{21}$$

Здесь φ_α — гладкая функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, обеспечивающая стремление $u^\alpha \to v^\alpha$ при $\alpha \to 0$. Идея доказательства [5] заключалась в следующем. Задача (18) – (21) рассматривалась как вспомогательная (аппроксимационная) задача. После чего для этой системы были получены необходимые априорные оценки и осуществлен предельный переход при $\alpha \to 0$.

На основании такой аппроксимации А. Ческидов, Д. Хольм, Е. Ольсон и Э. Тити [24] предложили использовать в качестве сглаживающей функции — оператор Гельмгольца. Технически, альфа-модель Лере получается из системы (6) – (9) путем исключения слагаемого $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i \nabla u_i$. Также отметим, что альфа-модель Лере была использована при моделировании движения двойного круговорота теплого течения Гольфстрим в Атлантическом океане [25].

В периодической области $\mathfrak{S} = [0, 2\pi L]^n$, $L > 0$, пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, мы рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p = f, \tag{22}$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \tag{23}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{24}$$

$$v|_{t=0} = v_0. \tag{25}$$

Перейдем к формулировке понятия слабого решения.

Определение 11. Пусть $f \in \widehat{\mathbb{V}}^*$, $v_0 \in \mathbb{H}$. Функция v из класса

$$v \in L_\infty(0, T; \mathbb{H}) \cap L_2(0, T; \widehat{\mathbb{V}}) \cap C([0, T]; \mathbb{H}), \quad \frac{dv}{dt} \in L_2(0, T; \widehat{\mathbb{V}}^*),$$

называется слабым решением задачи (22) – (25), если она удовлетворяет начальному условию (25) и выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}\langle v, \varphi\rangle + \nu(\nabla v, \nabla \varphi) - \left\langle \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi\rangle,$$

для любой $\varphi \in \widehat{\mathbb{V}}$ в смысле распределений и $u = (1 - \alpha^2 \Delta)^{-1} v$.

Для альфа-модели Лере справедлива следующая

Теорема 12. *Пусть $T > 0$, $\nu > 0$ и $\alpha > 0$. Тогда:*

(i) Если $f \in \widehat{\mathbb{V}}^*$ и $v_0 \in \mathbb{H}$, то задача (22) – (25) имеет единственное слабое решение на $[0, T]$.

(ii) Если $f \in \mathbb{H}$, $v_0 \in \widehat{\mathbb{V}}$, $u = (1 - \alpha^2\Delta)^{-1}v$, то единственное слабое решение, определенное в (i) является сильным на $(0, T)$, т. е. функция v из класса

$$v \in C([0,T]; \widehat{\mathbb{V}}) \cap L_2(0,T; H^2(\mathfrak{S}) \cap \widehat{\mathbb{V}}), \quad \frac{dv}{dt} \in L_2(0,T;\mathbb{H}),$$

удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt}(v,\varphi) + \nu(\nabla v, \nabla\varphi) + \sum_{i=1}^{n}(u_i\frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi) = (f, \varphi),$$

для любой $\varphi \in \widehat{\mathbb{V}}$ в смысле распределений и начальному условию (25).

Доказательство этой теоремы было приведено [24, Теорема 2.1].

Теорема 12 имеет место и в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Доказательство было проведено Ж. Лере в [5].

2.5. Модифицированная альфа-модель Лере

Модифицированная альфа-модель Лере представляет из себя несколько измененную альфа-модель Лере. Пусть $\mathfrak{S} = [0, 2\pi L]^n$, $L > 0$, — периодическая область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \nabla p = f, \tag{26}$$

$$v = u - \alpha^2\Delta u, \tag{27}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{28}$$

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{29}$$

Таким образом, модифицированная альфа-модель Лере отличается от альфа-модели Лере заменой билинейного члена $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$ на $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Поэтому, для этой модели справедливы точно такие же свойства, как и для альфа-модели Лере. Следовательно, наряду с альфа-моделями Лере и Кларка модифицированная альфа-модель Лере может рассматриваться как модель движения турбулентных потоков жидкости. Насколько нам известно, впервые модифицированная альфа-модель Лере была рассмотрена в работе [26].

Определение 13. Пусть $f \in \mathbb{H}$, $u_0 \in \mathbb{V}$, и $T > 0$. Функция u из класса

$$u \in C([0,T); \mathbb{V}) \cap L_2(0,T; H^2(\mathfrak{S}) \cap \mathbb{V}), \quad \frac{du}{dt} \in L_2(0,T;\mathbb{H})$$

называется обобщенным решением задачи (26) – (29) на интервале $[0, T)$, если она удовлетворяет начальному условию (29) и имеет место равенство

$$\langle\frac{dv}{dt}, w\rangle - \nu\langle\Delta v, w\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial u}{\partial x_i}, w \right\rangle = (f, w),$$

для любой $w \in H^2(\mathfrak{S}) \cap \mathbb{V}$ для почти всех $t \in [0, T)$.

Сформулируем основной результат о существовании решения.

Теорема 14. *Пусть $f \in \mathbb{H}$, $u_0 \in \mathbb{V}$. Тогда для любого $T > 0$ задача (26) – (29) имеет единственное обобщенное решение u в $[0, T)$, непрерывно зависящее от начальных данных.*

Доказательство этой теоремы приведено в [26, Теорема 3].

Замечание 15. Вопрос о существовании решения для модифицированной альфа-модели Лере в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, до настоящего времени не рассматривался.

2.6. Упрощенная альфа-модель Бардина и невязкая упрощенная альфа-модель Бардина

Вязкая модель Бардина была впервые предложена Дж. Бардина в работе [27] для моделирования турбулентных потоков методом крупных вихрей (Large Eddy Simulation) (см. подробнее [28]). Эта модель представляет собой вариант усреднения уравнения Навье-Стокса. Как и в случае альфа-модели Кларка, на основе этой модели была построена альфа-модель Бардина [29] следующего вида.

Пусть $\mathfrak{S} = [0, 2\pi L]^n$, $L > 0$, — периодическая область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Мы будем рассматривать следующую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \nabla p = f, \tag{30}$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \tag{31}$$

$$\operatorname{div} u = \operatorname{div} v = 0 \tag{32}$$

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{33}$$

Сформулируем понятие слабого решения для этой задачи.

Определение 16. Пусть $f \in \mathbb{H}$, $u_0 \in \mathbb{V}$, и $T > 0$. Функция u из класса

$$u \in C([0, T]; \mathbb{V}) \cap L_2(0, T; H^2(\mathfrak{S}) \cap \mathbb{V}), \quad \frac{du}{dt} \in L_2(0, T; \mathbb{H}),$$

называется слабым решением (30) – (33) на $[0, T]$, если она удовлетворяет начальным условиям (33) и выполнено равенство

$$\langle \frac{dv}{dt}, w \rangle - \nu \langle \Delta v, w \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, w \right\rangle = (f, w)$$

для каждой $w \in H^2(\mathfrak{S}) \cap \mathbb{V}$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Имеет место следующая

Теорема 17. *Пусть $f \in \mathbb{H}$, $u_0 \in \mathbb{V}$. Тогда для любого $T > 0$ задача (30) – (33) имеет единственное слабое решение u на $[0, T]$.*

Доказательство этой теоремы проводится методом Фаэдо-Галеркина и было приведено в [29, Теорема 3].

Теперь перейдем к описанию еще одной похожей модели — так называемой невязкой альфа-модели Бардина. Эта модель является своего рода модификацией альфа-модели Эйлера. В этом случае вязкость ν равна 0. Следовательно, задача (30) – (33) перепишется в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \nabla p = f, \tag{34}$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \tag{35}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{36}$$

$$v|_{t=0} = v_0. \tag{37}$$

Как и ранее, $\mathfrak{S} = [0, 2\pi L]^n$, $L > 0$, — периодическая область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. В этом случае имеет место следующая

Теорема 18. *Пусть $f \in \mathbb{V}^*$, $v_0 \in \mathbb{V}^*$. Тогда задача (34) – (37) имеет единственное решение $v \in C^1((-\infty, \infty), \mathbb{V})$.*

Доказательство этой теоремы приведено в [29, Теорема 8].

Замечание 19. Вопрос существования сильного решения в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, ранее не исследовался ни для альфа-модели Бардина, ни для невязкой альфа-модели Бардина.

3. АЛЬФА-МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА И ДЖЕФФРИСА – ОЛДРОЙДА

Настоящий параграф посвящен описанию альфа-моделей для неньютоновских жидкостей. Различные модели неньютоновских сред были предложены в XIX веке Дж. Максвеллом, В. Кельвином, В. Фойгтом, а в XX веке Джеффрисом [30], Олдройдом [31], Ларсоном [32] и другими.

Что касается альфа-моделей, то все исследования, в основном, были связаны с задачами лишь ньютоновской жидкости. Это связано с тем, что математические модели неньютоновской гидродинамики сами по себе намного сложнее, соответственно для данных задач получено намного меньше результатов. Только в последнее время были получены результаты, касающиеся разрешимости двух классических моделей неньютоновской гидродинамики: альфа-модели Максвелла и альфа-модели Джеффриса-Олдройда. Эти результаты связаны с понятием диссипативного решения, о котором мы поговорим подробнее.

3.1. Диссипативное решение задачи Коши в гильбертовом пространстве

Понятие диссипативного решения было впервые введено П.-Л. Лионсом для уравнения Эйлера движения идеальной жидкости [33]. Оно использовалось для изучения слабых пределов решений Лере-Хопфа динамики уравнения Навье-Стокса при стремлении вязкости ν к нулю. Некоторые свойства диссипативных решений для уравнения Эйлера были приведены в обзоре [34].

В данном разделе мы обобщим понятие диссипативного решения для некоторого абстрактного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Здесь мы будем использовать идеи из [35, Приложение]. Пусть X — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Пусть $F : [0, \infty) \times X \to X$ — нелинейный оператор, который может не быть непрерывным. Предположим, что F удовлетворяет следующему условию

$$(F(t,x) - F(t,y), x - y) \leqslant d(t,y)\|x - y\|^2, \quad x, y \in X, \quad t \geqslant 0, \tag{38}$$

где $d(t, y)$, $t \geqslant 0$, $y \in X$, — локально ограниченная функция.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$u'(t) = F(t, u(t)), \quad t > 0, \tag{39}$$

$$u(0) = a \in X. \tag{40}$$

Пусть $\mathcal{R}$ — некоторое фиксированное множество дифференцируемых функций из $[0,\infty)$ на X. Решение $u:[0,T]\to X$, $T>0$, называется обобщенным решением задачи (39) – (40), если оно совпадает с сужением функции из множества $\mathcal{R}$ на интервал $[0,T]$. Предположим, что $\mathcal{R}$ достаточно большое, такое, что множество $\{u(0)|\, u\in\mathcal{R}\}$ плотно в X.

Возьмем решение $u\in\mathcal{R}$, а также некоторую функцию $v\in\mathcal{R}$. Тогда введем в рассмотрение следующую функцию

$$E(t,v(t)) = -v'(t) + F(t,v(t)).$$

Тогда (39) перепишется в виде

$$(u(t)-v(t))' = F(t,u(t)) - F(t,v(t)) + E(t,v(t)).$$

Следовательно, учитывая (38), мы получим

$$\frac{d}{dt}\|u-v\|^2 = 2(u'-v',u-v) = 2(F(t,u)-F(t,v),u-v) + 2(E(t,v),u-v) \leqslant \\ \leqslant 2d(t,v(t))\|u-v\|^2 + 2(E(t,v),u-v). \quad (41)$$

Теперь нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *[36, Лемма 3.1] Пусть f, χ, L, $M:[0,T]\to\mathbb{R}$ — скалярные функции, причем χ, L, $M\in L_1(0,1)$ и $f\in W_1^1(0,T)$. Если*

$$\chi(t)\geqslant 0, \quad L(t)\geqslant 0, \quad \text{и} \quad f'(t)+\chi(t)\leqslant L(t)f(t)+M(t)$$

для почти всех $t\in(0,T)$, то

$$f(t)+\int\limits_0^t \chi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \exp\left(\int\limits_0^t L(s)\,\mathrm{d}s\right)\left[f(0)+\int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_s^0 L(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)M(s)\,\mathrm{d}s\right]$$

для почти всех $t\in[0,T]$.

Применяя эту лемму к неравенству (41), мы получим

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \leqslant \exp\left(\int\limits_0^t 2d(s,v(s))\,\mathrm{d}s\right)\Bigg[\|a-v(0)\|^2 + \\ + 2\int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_s^0 2d(\xi,v(\xi))\,\mathrm{d}\xi\right)(E(s,v(s)),u(s)-v(s))\,\mathrm{d}s\Bigg]. \quad (42)$$

Теперь мы готовы сформулировать определение диссипативного решения.

Определение 20. Слабо непрерывная функция $u:[0,\infty)\to X$ называется диссипативным решением задачи (39) – (40), если выполнено неравенство (42) для всех $v\in\mathcal{R}$ и $t\geqslant 0$.

Полученное определение в последующих разделах будет приспособлено для конкретных альфа-моделей движения неньютоновских сред.

В заключении, мы приведем несколько свойств диссипативного решения.

Предложение 21. *(a) Если для некоторого $a\in X$ существует $T>0$ и обобщенное решение $u_T:[0,T]\to X$ задачи (39) – (40), то сужение любого диссипативного решения (с такими же начальными данными) на $[0,T]$ совпадает с u_T.*

(b) Любое обобщенное решение $u\in\mathcal{R}$ является единственным диссипативным решением.

(c) Любое диссипативное решение удовлетворяет начальному условию (40).

Доказательство этих свойств приведено в [35, Предложение 4.1].

3.2. Альфа-модель Максвелла

Перейдем к рассмотрению конкретных моделей. Первой исследованной альфа-моделю неньютоновской гидродинамики была альфа-модель Максвелла [35]. Модель Максвелла и ее реологическое соотношение широко используется для описания поведения различных материалов как бетон или 1,5 % раствор крахмала, а также бетона [37].

Напомним, что реологическое соотношение Максвелла с объективной производной Яуманна имеет следующий вид:

$$\sigma + \lambda\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \sigma W - W\sigma\right) = 2\eta\mathcal{E}(u),$$

где $\mathcal{E}(u)$ — тензор скоростей деформации, $\eta > 0$ — вязкость среды, $\lambda > 0$ — время релаксации. Через

$$W = (W_{ij}(u)), \quad W_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

обозначается тензор завихренности.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу, соответствующую альфа-модели Максвелла:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \nabla u_i + \nabla p = \mathrm{Div}\, \sigma + f, \tag{43}$$

$$\sigma + \lambda\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \sigma W - W\sigma\right) = 2\eta\mathcal{E}, \tag{44}$$

$$\mathrm{div}\, u = 0, \tag{45}$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \tag{46}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{47}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0, \tag{48}$$

где $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ — девиатор тензора напряжений. Дивергенция $\mathrm{Div}\, \sigma$ тензора σ является вектором с координатами $(\mathrm{Div}\, \sigma)_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$.

Переходим к вопросу существования решений для этой начально-краевой задачи. Существование слабого или сильного решения для исследуемой краевой задачи до сих является открытой проблемой. Однако, удается установить существование диссипативного решения.

Введем необходимые обозначения. Без ограничения общности будем считать, что внешняя сила $f = 0$. Пусть $\mu = \frac{\eta}{\lambda}$. Рассмотрим следующие выражения, где w и τ векторно- и матричнозначные функции по времени:

$$E_1(w, \tau) = -\frac{\partial \Delta_\alpha w}{\partial t} - P\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial \Delta_\alpha w}{\partial x_i} - P\sum_{i=1}^{n} (\Delta_\alpha w)_i \nabla w_i + P\mathrm{Div}\, \tau,$$

$$E_2(w, \tau) = -\frac{\tau}{\lambda} - \frac{\partial \tau}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial \tau}{\partial x_i} - \tau W(w) + W(w)\tau + 2\mu\mathcal{E}(w).$$

Здесь через Δ_α обозначается оператор Гельмгольца $\Delta_\alpha = I - \alpha^2\Delta$. Эти выражения получаются применением проектора Лере $P : L_2(\Omega) \to H$ к уравнениям (43) и (44).

Применяя схему построения диссипативного решения, описанную в предыдущем разделе, мы получим следующее определение.

Определение 22. Пусть $u_0 \in V$, $\sigma_0 \in L_2(\Omega)$. Пара функций u, σ из класса

$$u \in C_w([0,\infty); V), \quad \sigma \in C_w([0,\infty); L_2(\Omega)),$$

называется диссипативным решением начально-краевой задачи (43) – (48), если для некоторых функций $\xi \in C^1([0,\infty); V_3)$, $\theta \in C^1([0,\infty); H^2(\Omega))$ и некоторого $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$2\mu\|u(t)-\xi(t)\|_V^2 + \|\sigma(t)-\theta(t)\|^2 \leqslant \exp\biggl(\int\limits_0^t \Gamma(s)\,\mathrm{d}s\biggr)\biggl[2\mu\|u_0-\xi(0)\|_V^2 +$$
$$+\|\sigma_0-\theta(0)\|^2 + \int\limits_0^t \exp\biggl(\int\limits_s^0 \Gamma(\psi)\,\mathrm{d}\psi\biggr)[4\mu(E_1(\xi,\theta)(s), u(s)-\xi(s)) +$$
$$+2(E_2(\xi,\theta)(s), \sigma(s)-\theta(s))]\,\mathrm{d}s\biggr],$$

где

$$\Gamma(t) = \gamma \max\left\{1, \frac{1}{\alpha^2}\right\}\left(\|\Delta_\alpha \xi(t)\|_1 + \|\xi(t)\|_1 + \alpha^2\|\xi(t)\|_3 + \frac{(1+\mu)\|\theta(t)\|_2}{\mu}\right),$$

и γ — некоторая константа, зависящая от свойств области Ω.

Основной результат существования диссипативного решения и его связи с сильным решением заключается в следующем.

Теорема 23. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2 и $u_0 \in V$, $\sigma_0 \in L_2(\Omega)$. Тогда выполнены следующие условия:*

a) существует диссипативное решение начально-краевой задачи (43) – (48);

b) если для некоторых $u_0 \in V$, $\sigma_0 \in L_2(\Omega)$, существует $T > 0$ и сильное решение $u_T \in C^1([0,T]; V_3)$, $\sigma_T \in C^1([0,T]; H^2(\Omega))$, начально-краевой задачи (43) – (48), то сужение любого диссипативного решения (с такими же начальными данными) на $[0,T]$, совпадает с u_T, σ_T;

c) любое сильное решение $u_T \in C^1([0,\infty); V_3)$, $\sigma_T \in C^1([0,\infty); H^2(\Omega))$, является единственным диссипативным решением.

Доказательство этой теоремы было приведено в [35, Теорема 2.1]. Для доказательства этой теоремы был применен аппроксимационно-топологический метод, разработанный В.Г. Звягиным (см. [38] – [45]). Он заключается в следующем. Вначале находятся аппроксимации исходной начально-краевой задачи вспомогательными задачами с более хорошими свойствами. Затем на основе теории топологической степени вполне непрерывных векторных полей и априорных оценок решений устанавливается разрешимость вспомогательных аппроксимационных задач в некотором вспомогательном пространстве. Далее показывается, что из последовательности решений вспомогательных задач можно выделить подпоследовательность, которая в некотором смысле (слабом или в смысле распределений) сходится к решению исходной задачи в нужных пространствах.

Замечание 24. Доказательство существования сильного или слабого решений для начально-краевой задачи (43) – (48) до настоящего времени является открытой проблемой.

Замечание 25. Вопрос существования сильного, слабого или диссипативного решений задачи (43) – (48) в случае периодической области $\mathfrak{S}$ в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, до настоящего момента также не исследовался.

3.3. Альфа-модель Джеффриса-Олдройда

Перейдем к описанию еще одной альфа-модели — модели Джеффриса-Олдройда. Данная модель, в частности, описывает движение земной коры (см. [37]).

Напомним, что реологическое соотношение Джеффриса-Олдройда с объективной производной Яуманна имеет следующий вид:

$$\sigma+\lambda_1\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}+\sigma W-W\sigma\Big)=2\eta\Big(\mathcal{E}+\lambda_2\Big(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_i}+\mathcal{E}W-W\mathcal{E}\Big)\Big).$$

Здесь, $\eta>0$ — вязкость среды, λ_1 — время релаксации и λ_2 — время запаздывания, причем $0<\lambda_2<\lambda_1$.

Для определения реологического соотношения Джеффриса-Олдройда (а также и Максвелла) обычно применяется метод механических моделей. Применение этого метода для вывода исследуемых здесь двух моделей можно найти в [45, §1.2.2, 1.2.3]. Обзор известных результатов для модели Джеффриса-Олдройда был приведен в [46].

Теперь перейдем к изучению соответствующей альфа-модели. Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, с $\partial\Omega\subset C^2$. Мы будем рассматривать следующую начально-краевую задачу, соответствующую альфа-модель Джеффриса-Олдройда:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^n v_i\nabla u_i+\nabla p=\operatorname{Div}\sigma+f, \tag{49}$$

$$\sigma+\lambda_1\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}+\sigma W-W\sigma\Big)=2\eta\Big(\mathcal{E}+\lambda_2\Big(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x_i}+\mathcal{E}W-W\mathcal{E}\Big)\Big), \tag{50}$$

$$v=u-\alpha^2\Delta u, \tag{51}$$

$$\operatorname{div}u=0, \tag{52}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0, \tag{53}$$

$$u|_{t=0}=u_0,\quad \sigma|_{t=0}=\sigma_0. \tag{54}$$

Напомним, что через $f=f(t,x)$ здесь обозначается плотность внешних сил.

Как и для модели Максвелла, мы будем рассматривать вопрос о существовании диссипативного решения для начально-краевой задачи (49) – (54). Введем следующие обозначения: $\mu_1=\frac{\eta\lambda_2}{\lambda_1}$, $\mu_2=\frac{\eta-\mu_1}{\lambda_1}$, $\tau=\sigma-2\mu_1\mathcal{E}(u)$. С учетом этих замен, равенства (49) и (50) будут иметь следующую эквивалентную форму

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^n v_i\nabla u_i+\nabla p=\operatorname{Div}\tau+2\mu_1\operatorname{Div}\mathcal{E}+f, \tag{55}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}+\frac{\tau}{\lambda_1}+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial\tau}{\partial x_i}+\tau W-W\tau=2\mu_2\mathcal{E}. \tag{56}$$

Всюду в дальнейшем будем рассматривать уже преобразованную задачу (55), (56), (52) – (54).

Вновь применяя описанную в разделе 4.1 схему построения диссипативного решения, мы рассмотрим следующие формальные выражения, где w и ρ векторно- и матрично-значные функции по времени:

$$E_1(w,\rho)=-\frac{\partial\Delta_\alpha w}{\partial t}-P\sum_{i=1}^n w_i\frac{\partial\Delta_\alpha w}{\partial x_i}-P\sum_{i=1}^n(\Delta_\alpha w)_i\nabla w_i+P\operatorname{Div}\rho+Pf+2\mu_1P\operatorname{Div}\mathcal{E},$$

$$E_2(w,\rho) = -\frac{\rho}{\lambda_1} - \frac{\partial\rho}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial\rho}{\partial x_i} - \rho W + W\rho + 2\mu_2\mathcal{E}.$$

Теперь мы готовы дать определение диссипативного решения.

Определение 26. Пусть $u_0 \in V$, $\tau_0 \in L_2(\Omega)$. Пара (u,τ) из класса

$$u \in C_w([0,\infty);V), \quad \tau \in C_w([0,\infty);L_2(\Omega)),$$

называется *диссипативным решением* задачи (55), (56), (52) – (54), если для всех функций $k \in C^1([0,\infty);V_3)$, $\theta \in C^1([0,\infty);H^2(\Omega))$, и всех $t > 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
2\mu_2\|u(t)-k(t)\|_V^2 + \|\tau(t)-\theta(t)\|^2 \leqslant \exp\Big(\int_0^t \Gamma(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big[2\mu_2\|u_0-k(0)\|_V^2 + \\
+ \|\tau_0-\theta(0)\|^2 + \int_0^t \exp\Big(\int_s^0 \Gamma(\psi)\,\mathrm{d}\psi\Big)[4\mu_2(E_1(k,\theta)(s), u(s)-k(s)) + \\
+ 2(E_2(k,\theta)(s), \tau(s)-\theta(s))]\,\mathrm{d}s\Big],
\end{aligned}$$

где

$$\Gamma(t) = \gamma\max\{1, 1/\alpha^2\}\Big(\|\Delta_\alpha k(t)\|_1 + \|k(t)\|_1 + \alpha^2\|k(t)\|_3 + \frac{(1+\mu_2)\|\theta(t)\|_2}{\mu_2}\Big),$$

и $\gamma > 0$ — некоторая константа, зависящая только от свойств области Ω.

Основным результатом является следующая

Теорема 27. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, с гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2 и $u_0 \in V$, $\tau_0 \in L_2(\Omega)$. Тогда справедливы следующие условия:*

a) существует диссипативное решение начально-краевой задачи (55), (56), (52) – (54);

b) если для некоторых $u_0 \in V$, $\tau_0 \in L_2(\Omega)$, существует $T > 0$ и сильное решение $u_T \in C^1([0,T];V_3)$, $\tau_T \in C^1([0,T];H^2(\Omega))$, начально-краевой задачи (55), (56), (52) – (54), то сужение любого диссипативного решения (с такими же начальными данными) на $[0,T]$, совпадает с u_T, τ_T;

c) любое сильное решение $u_T \in C^1([0,\infty);V_3)$, $\tau_T \in C^1([0,\infty);H^2(\Omega))$, является единственным диссипативным решением.

Доказательство этого утверждения аппроксимационно-топологическим методом было проведено в [47], [48].

Замечание 28. Доказательство существования сильного или слабого решения для начально-краевой задачи (55), (56), (52) – (54), является открытой проблемой.

Замечание 29. Вопрос существования сильного, слабого или диссипативного решений для случая периодической области $\mathfrak{S}$ в $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, до настоящего времени не исследовался.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A connection between the Camassa-Holm equations and turbulent flows in channels and pipes / S. Chen, C. Foias, D. D. Holm et. al. // Phys. Fluids. — 1999. — V. 11. — P. 2343–2353.

2. Numerical simulations of the Lagrangian averaged Navier–Stokes equations for homogeneous isotropic turbulence / K. Mohseni, B. Kosovic, S. Shkoller, J. E. Marsden // Phys. Fluids. — 2003. — V. 15 (2). — P. 524–544.

3. The LANS-α model for computing turbulence origins, results, and open problems / D. D. Holm, C. Jeffery, S. Kurien et. al. // Los Alamos Science. — 2005. — № 29. — P. 152–172.

4. Implementation of the LANS-alpha turbulence model in a primitive equation ocean model / M. W. Hecht, D. D. Holm, M. R. Petersen, B. A. Wingate // J. Comput. Phys. — 2008. — V. 227 (11). — P. 5691–5716.

5. Leray, J. Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'space / J. Leray // Acta Math. — 1934. — V. 63. — P. 193–248.

6. Holm, D. D. The Euler-Poincare models of ideal fluids with nonlinear dispersion / D. D. Holm, J. E. Marsden, T. S. Ratiu // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 349. — P. 4173–4177.

7. Holm, D. D. The Euler-Poincare Equations and semidirect products with applications to continuum theories / D. D. Holm, J. E. Marsden, T. S. Ratiu // Adv. Math. — 1998. — V. 137. — P. 1–81.

8. Camassa-Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow / S. Chen, C. Foias, D. D. Holm et. al. // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 81. — P. 5338–5341.

9. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. — М. : Физматлит, 2004. — 400 с.

10. Linshiz, J. S. Global regularity and convergence of a Birkhoff-Rott-α approximation of the dynamics of vortex sheets of the 2D Euler equations / J. S. Linshiz, C. Bardos, E. S. Titi // Comm. Pure Appl. Math. — 2010. — V. 63. — P. 697–746.

11. Hou, T. Y. On global well-posedness of the Lagrangian averaged Euler equations / T. Y. Hou, C. Li // SIAM J. Math. Anal. — 2006. — V. 38, № 3. — P. 782–794.

12. Oliver, M. The vortex blob method as a second-grade non-Newtonian fluid / M. Oliver, S. Shkoller // Comm. Part. Differential Equations. — 2001. — V. 26. — P. 295–314.

13. The Camassa-Holm equations and turbulence / S. Chen, C. Foias, D. D. Holm et. al. // Physica D. — 1999. — V. 133. — P. 49–65.

14. Foias, C. The Navier-Stokes-alpha model of fluid turbulence / C. Foias, D. D. Holm, E. S. Titi // Physica D. — 2001. — V. 152. — P. 505–519.

15. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М. : Гос. Издат. Техн.-теорет. литературы, 1950. — 679 с.

16. Coutand, D. Global well-posedness of weak solutions for the Lagrangian averaged Navier-Stokes equations on bounded domains / D. Coutand, J. Peirce, S. Shkoller // Comm. Pure. Appl. Anal. — 2002. — V. 1, № 1. — P. 35–50.

17. Темам, Р. Уравнения Навье–Стокса / Р. Темам. — М. : Мир, 1981. — 408 с.

18. Marsden, J. Global well-posedness for the Lagrangian averaged Navier-Stokes (LANS-α) equations on bounded domains / J. Marsden, S. Shkoller // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. — 2001. — V. 359. — P. 1449–1468.

19. Foias, C. The three dimensional viscous Camassa-Holm equations and their relation to the Navier-Stokes equations and turbulence theory / C. Foias, D. D. Holm, E. S. Titi // J. Dyn. Diff. Eq. — 2002. — V. 14. — P. 1–35.

20. Clark, R. A. Evaluation of subgrid scale models using an accurately simulated turbulent flow / R. A. Clark, J. H. Ferziger, W. C. Reynolds // J. Fluid Mech. — 1979. — V. 91. — P. 1–16.

21. Rogallo, R. S. Numerical Simulation of Turbulent Flows / R. S. Rogallo, P. Moin // Ann. Rev. Fluid Mech. — 1984. — V. 16. — P. 99–137.

22. Siggia, E. D. Numerical study of small-scale intermittency in three-dimensional turbulence / E. D. Siggia // J. Fluid Mech. — 1981. – V. 107. — P. 375–406.

23. Cao, C. On the Clark-α model of turbulence: global regularity and long-time dynamics / C. Cao, D. D. Holm, E. S. Titi // J. Turbul. — 2005. — V. 6. — P. 1–11.

24. On Leray-α model of turbulence / A. Cheskidov, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi // Proc. R. Soc. London. A. — 2005. — V. 461. — P. 629–649.

25. Holm, D. D. Modeling mesoscale turbulence in the barotropic double-gyre circulation / D. D. Holm, B. T. Nadiga // J. Phys. Oceanogr. — 2003. — V. 33. — P. 2355–2365.

26. Ilyin, A. A. A modified Leray-α subgrid scale model of turbulence / A. A. Ilyin, E. Lunashin, E. S. Titi // Nonlinearity. — 2006. — V. 19. — P. 879–897.

27. Bardina, J. Improved subgrid scale models for large eddy simulation / J. Bardina, J. Ferziger, W. Reynolds // American Institute Aeronatics and Astronautics. — 1980. — V. 80. — P. 1280–1357.

28. Sagaut, P. Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction / P. Sagaut. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. — 575 p.

29. Cao Y. Global well-posedness of the three-dimensional viscous and inviscid simplified Bardina turbulence models / Y. Cao, E. M. Lunasin, E. S. Titi // Comm. Math. Sciences. — 2006. — V. 4 (4). — P. 823–884.

30. Jeffreys, H. The Earth, 2nd edn. / H. Jeffreys. — Cambridge Univ. Press, 1929.

31. Oldroyd, J. G. On the formation of rheological equations of state / J. G. Oldroyd // Proc. R. Soc. Lond. — 1950. — V. A200. — P. 523–541.

32. Larson, R. Constitutive equations for polymer melts and solutions / R. Larson. — Oxford : Butterworth-Heinmann, 1988. — 364 p.

33. Lions, P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics. V. 1 / P.-L. Lions. — New York, NY : Oxford University Press, 1996. — 248 p.

34. Бардос, К. Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости / К. Бардос, Э. С. Тити // УМН. — 2007. — Т. 62, № 3(375). — С. 5–46.

35. Vorotnikov, D. A. Global generalized solutions for Maxwell-alpha and Euler-alpha equations / D.A. Vorotnikov // Nonlinearity. — 2012. — V. 25. — P. 309–327.

36. Vorotnikov, D. A. Dissipative solutions for equations of viscoelastic diffusion in polymers / D. A. Vorotnikov // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — V. 339. — P. 876–888.

37. Рейнер, М. Реология / М. Рейнер. — М. : Наука, 1965. — 224 с.

38. Звягин, В. Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. — М. : УРСС, 2012. — 416 с.

39. Звягин, В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко. — М. : УРСС, 2004. — 110 с.

40. Dmitrienko, V. T. The topological degree method for equations of the Navier-Stokes type / V. T. Dmitrienko, V. G. Zvyagin // Abstr. Appl. Anal. — 1997. — V. 1–2. — P. 1–45.

41. Звягин, А. В. Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 147–156.

42. Zvyagin, V. G. The study of initial—boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids / V. G. Zvyagin, M. V. Turbin // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — V. 168, № 2. — P. 157–308.

43. Дмитриенко, В. Т. О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели несжимаемой вязкоупругой среды / В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 9. — С. 24–40.

44. Звягин, В. Г. О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // ДАН. — 2001. — Т. 380, № 3. — С. 308–311.

45. Zvyagin, V. G. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov. — Berlin : Walter de Gruyter & Co (de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. V. 12), 2008.

46. Воротников, Д. А. Обзор результатов и открытых проблем по математическим моделям движения вязкоупругих сред типа Джеффриса / Д. А. Воротников, В. Г. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 2. — С. 30–50.

47. Polyakov, D. On dissipative solutions of the Jeffreys-Oldroyd-alpha equation / D. Polyakov, A. Zvyagin // Advancements in Mathematical Sciences. AIP. Conf. Proc. — 2015. — V. 1676. — P. 020089–1–020089–7.

48. Звягин, А. В. О разрешимости альфа-модели Джеффриса-Олдройда / А. В. Звягин, Д. М. Поляков // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8.

REFERENCES

1. Chen S., Foias C., Holm D.D., Olson E., Titi E.S., Wynne S. A connection between the Camassa-Holm equations and turbulent flows in channels and pipes. Phys. Fluids, 1999, vol. 11, pp. 2343–2353.

2. Mohseni K., Kosovic B., Shkoller S., Marsden J.E. Numerical simulations of the Lagrangian averaged Navier–Stokes equations for homogeneous isotropic turbulence. Phys. Fluids, 2003, vol. 15 (2), pp. 524–544.

3. Holm D.D., Jeffery C., Kurien S., Livescu D., Taylor M.A., Wingate B.A. The LANS-α model for computing turbulence origins, results, and open problems. Los Alamos Science, 2005, № 29, pp. 152–172.

4. Hecht M.W., Holm D.D., Petersen M.R., Wingate B.A. Implementation of the LANS-alpha turbulence model in a primitive equation ocean model. J. Comput. Phys., 2008, vol. 227 (11), pp. 5691–5716.

5. Leray J. Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'space. Acta Math., 1934, vol. 63, pp. 193–248.

6. Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T.S. The Euler-Poincare models of ideal fluids with nonlinear dispersion. Phys. Rev. Lett., 1998, vol. 349, pp. 4173–4177.

7. Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T.S. The Euler-Poincare Equations and semidirect products with applications to continuum theories. Adv. Math., 1998, vol. 137, pp. 1–81.

8. Chen S., Foias C., Holm D.D., Olson E., Titi E.S., Wynne S. Camassa-Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow. Phys. Rev. Lett., 1998, vol. 81, pp. 5338–5341.

9. Vladimirov V.S., Garinov V.V. Equations of mathematical physics. [Vladimirov V.S., Zharinov V.V. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 400 p.

10. Linshiz J.S., Bardos C., Titi E.S. Global regularity and convergence of a Birkhoff-Rott-α approximation of the dynamics of vortex sheets of the 2D Euler equations. Comm. Pure Appl. Math., 2010, vol. 63, pp. 697–746.

11. Hou T.Y., Li C. On global well-posedness of the Lagrangian averaged Euler equations. SIAM J. Math. Anal., 2006, vol. 38, no. 3, pp. 782–794.

12. Oliver M., Shkoller S. The vortex blob method as a second-grade non-Newtonian fluid. Part. Differential Equations, 2001, vol. 26, pp. 295–314.

13. Chen S., Foias C., Holm D.D., Olson E., Titi E.S., Wynne S. The Camassa-Holm equations and turbulence. Physica D, 1999, vol. 133, pp. 49–65.

14. Foias C., Holm D.D., Titi E.S. The Navier-Stokes-alpha model of fluid turbulence. Physica D, 2001, vol. 152, pp. 505–519.

15. Loitsiansky L.G. Mechanics of fluid and gas. [Lojcyanskij L.G. Mexanika zhidkosti i gaza]. Moscow: Gos. Izdat. Techn.-teoret. literatury, 1950, 679 p.

16. Coutand D., Peirce J., Shkoller S. Global well-posedness of weak solutions for the Lagrangian averaged Navier-Stokes equations on bounded domains. Comm. Pure. Appl. Anal., 2002, vol. 1, no. 1, pp. 35–50.

17. Temam R. Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. [Temam R. Uravneniya Nav'e–Stoksa]. Moscow: Mir, 1981, 408 p.

18. Marsden J., Shkoller S. Global well-posedness for the Lagrangian averaged Navier-Stokes (LANS-α) equations on bounded domains. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 2001, vol. 359, pp. 1449–1468.

19. Foias C., Holm D.D., Titi E.S. The three dimensional viscous Camassa-Holm equations and their relation to the Navier-Stokes equations and turbulence theory. J. Dyn. Diff. Eq., 2002, vol. 14, pp. 1–35.

20. Clark R.A., Ferziger J.H., Reynolds W.C. Evaluation of subgrid scale models using an accurately simulated turbulent flow. J. Fluid Mech., 1979, vol. 91, pp. 1–16.

21. Rogallo R.S., Moin P. Numerical Simulation of Turbulent Flows. Ann. Rev. Fluid Mech., 1984, vol. 16, pp. 99–137.

22. Siggia E.D. Numerical study of small-scale intermittency in three-dimensional turbulence. J. Fluid Mech., 1981, vol. 107, pp. 375–406.

23. Cao C., Holm D.D., Titi E.S. On the Clark-α model of turbulence: global regularity and long-time dynamics. J. Turbul., 2005, vol. 6, pp. 1–11.

24. Cheskidov A., Holm D.D., Olson E., Titi E.S. On Leray-α model of turbulence. Proc. R. Soc. London. A, 2005, vol. 461, pp. 629–649.

25. Holm D.D., Nadiga B.T. Modeling mesoscale turbulence in the barotropic double-gyre circulation. J. Phys. Oceanogr., 2003, vol. 33, pp. 2355–2365.

26. Ilyin A.A., Lunashin E., Titi E.S. A modified Leray-α subgrid scale model of turbulence. Nonlinearity, 2006, vol. 19, pp. 879–897.

27. Bardina J., Ferziger J., Reynolds W. Improved subgrid scale models for large eddy simulation. American Institute Aeronatics and Astronautics, 1980, vol. 80, pp. 1280–1357.

28. Sagaut P. Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006, 575 p.

29. Cao Y., Lunasin E.M., Titi E.S. Global well-posedness of the three-dimensional viscous and inviscid simplified Bardina turbulence models. Comm. Math. Sciences, 2006, vol. 4(4), pp. 823–884.

30. Jeffreys H. The Earth, 2nd edn. Cambridge Univ. Press, 1929.

31. Oldroyd J.G. On the formation of rheological equations of state. Proc. R. Soc. Lond., 1950, vol. A200, pp. 523–541.

32. Larson R. Constitutive equations for polymer melts and solutions. Oxford: Butterworth-Heinmann, 1988, 364 p.

33. Lions P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics. V. 1. New York, NY: Oxford University Press, 1996, 248 p.

34. Bardos C., Titi E.S. Euler equations for incompressible ideal fluids. [Bardos K., Titi E'.S. Uravneniya E'jlera ideal'noj neszhimaemoj zhidkosti]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2007, vol. 62, no. 3(375), pp. 5–46.

35. Vorotnikov D.A. Global generalized solutions for Maxwell-alpha and Euler-alpha equations. Nonlinearity, 2012, vol. 25, pp. 309–327.

36. Vorotnikov D.A. Dissipative solutions for equations of viscoelastic diffusion in polymers. J. Math. Anal. Appl., 2008, vol. 339, pp. 876–888.

37. Reiner M. Reology. [Rejner M. Reologiya]. Moscow: Nauka, 1965, 224 p.

38. Zvyagin V.G., Turbin M.V. Mathematical issues of mechanics of viscoelastic media. [Zvyagin V.G., Turbin M.V. Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkouprugix sred]. Moscow: URSS, 2012, 416 p.

39. Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. Topological approximation method for hydrodynamics investigation. The Navier-Stokes system. [Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. Approksimacionno-

topologicheskij podxod k issledovaniyu zadach gidrodinamiki. Sistema Nav'e-Stoksa]. Moscow: URSS, 2004, 110 p.

40. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. The topological degree method for equations of the Navier-Stokes type. Abstr. Appl. Anal., 1997, vol. 1–2, pp. 1–45.

41. Zvyagin A.V. The investigation of solvability for stationary model of the motion of weak water solutions of polymers. [Zvyagin, A. V. Issledovanie razreshimosti stacionarnoj modeli dvizheniya slabyx vodnyx rastvorov polimerov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 1, pp. 147–156.

42. Zvyagin V.G., Turbin M.V. The study of initial—boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids. Journal of Mathematical Sciences, 2010, vol. 168, no. 2, pp. 157–308.

43. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. On strong solutions of an initial-boundary value problem for a regularized model of an incompressible viscoelastic medium. [Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. O sil'nyx resheniyax nachal'no-kraevoj zadachi dlya regulyarizovannoj modeli neszhimaemoj vyazkouprugoj sredy]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2004, no. 9, pp. 24–40.

44. Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. On weak solutions to the initial boundary value problem for the motion equation of a viscoelastic fluid. [Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. O slabyx resheniyax nachal'no-kraevoj zadachi dlya uravnenij dvizheniya vyazkouprugoj zhidkosti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2001, vol. 380, no. 3, pp. 308–311.

45. Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics. Berlin: Walter de Gruyter & Co (de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. V. 12), 2008.

46. Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. The survey of results and open problems on mathematical model of the motion for viscoelastic fluids of Jeffreys type. [Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. Obzor rezul'tatov i otkrytyx problem po matematicheskim modelyam dvizheniya vyazkouprugix sred tipa Dzheffrisa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 2, pp. 30–50.

47. Polyakov D., Zvyagin A. On dissipative solutions of the Jeffreys-Oldroyd-alpha equation. Advancements in Mathematical Sciences. AIP. Conf. Proc., 2015, vol. 1676, pp. 020089–1–020089–7.

48. Zvyagin A.V., Polyakov D.M. On solvability for Jeffreys-Oldroyd-alpha-model. [Zvyagin A.V., Polyakov D.M. O razreshimosti al'fa-modeli Dzheffrisa-Oldrojda]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 8.

Звягин Андрей Викторович, ведущий научный сотрудник НИИ математики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Zvyagin Andrey V., leading researcher of the Research Institute of Mathematics of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Звягин Виктор Григорьевич, заведующий кафедрой, математический факультет, кафедра алгебры и топологических методов анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zvg@math.vsu.ru
Тел.: Zvyagin Victor G.

head of chair, Department of Mathematics, Chair of Algebra and Topological Analysis Methods, Voronezh State University, Voronezh, Russia,
E-mail: zvg@math.vsu.ru
Tel.: Zvyagin Victor G.

Поляков Дмитрий Михайлович, младший научный сотрудник НИИ математики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: DmitryPolyakow@mail.ru
Тел.: Polyakov Dmitry M.

junior researcher of the Research Institute of Mathematics of Voronezh State University, Voronezh, Russia,
E-mail: DmitryPolyakow@mail.ru
Tel.: Polyakov Dmitry M.