УДК 517.927

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАЗРЫВНОЙ СТИЛТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЫ С ОСОБЕННОСТЯМИ НА КОНЦАХ

Ж. О. Залукаева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 03.04.2015 г.

Аннотация. Работа посвящена изучению модели малых вынужденных поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны с особенностями типа пружин на концах, реализованной в форме начально-краевой задачи с краевыми условиями третьего рода. Применяя расширенное толкование интеграла и меры Стилтьеса, предложенное Ю. В. Покорным, такая модель допускает поточечное толкование как решений, так и соотношений. При этом краевые условия представляют собой реализацию уравнения в концевых точках замкнутого сегмента. Чтобы подчеркнуть, что в работе используется расширенное толкование меры Стилтьеса, функция, стоящая под знаком дифференциала, заключается в квадратные скобки. В работе доказана корректность исследуемой математической модели, означающая, что при малом изменении начальных условий соответствующее решение модели изменяется мало.

Ключевые слова: колебания струны, интеграл Стилтьеса, разрывные решения, мера.

ABOUT THE CORRECTNESS OF MATHEMATICAL MODEL OF FORCED OSCILLATIONS OF THE DISCONTINUOUS STILTJES STRING WITH SINGULARITIES AT BOTH ENDS

Zh. O. Zalukaeva

Abstract. The present work is concerned with the study of model of small forced transverse oscillations of the discontinuous Stiltjes string with singularities of the type of springs at both ends, which is implemented in the form of an initial-boundary value problem with boundary conditions of the third type. We applied expanded definitions of Stiltjes integral and measure, that were recommended by Yu. V. Pokornyi. This fact has allowed to preserve the pointwise interpretation of solutions and relations, moreover boundary conditions are the representation of the equation at the end points of the closed segment.To emphasize that we use expanded definition of Stiltjes measure, we conclude the function standing under the sign of the differential in brackets. In the work the correctness of the considered model was proved. It means that a small change of the initial conditions involves small change of solutions.

Keywords: Oscillation of the string, Stiltjes integral, discontinuous solutions, measure.

В последнее время особое внимание уделяется исследованиям математических моделей колебательных процессов в струнных системах в связи с их актуальностью во многих отраслях естествознания и техники. Несмотря на это, наличие особенностей (как внутренних, так и внешних) у таких моделей может привести к трудно разрешимым проблемам из-за потери гладкости. Этот факт исключает возможность использования обыкновенных производных при моделировании и анализе. Применение теории обобщенных функций к таким моделям не дает нужного эффекта, так как позволяет доказать лишь наличие слабого решения. В настоящей работе мы воспользуемся поточечным подходом с применением производных по мере, берущим начало в работе Стилтьеса о колебаниях струны с бусинками и получившим дальнейшее развитие в трудах М. Г. Крейна, Ф. Р. Гантмахера, О. Келлога (см. комментарии [1]). Данный подход был расширен Ю. В. Покорным при изучении одномерных граничных задач [2]-[3], что позволило исследовать задачи о струнах с произвольным количеством сосредоточенных масс (не более чем счетным), помещенных во внешнюю среду с не более чем счетным количеством локализованных особенностей типа пружин [4]-[7]. В настоящей работе мы будем пользоваться терминологией и обозначениями из [2], [3].

Рассмотрим модель малых вынужденных поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны (цепочки из струн, упруго соединенных между собой пружинами), расположенной вдоль отрезка $[0,\ell]$. Предполагается, что к левому концу цепочки (в точке $x = 0$) и к правому (в точке $x = \ell$) дополнительно прикреплены пружины. Пусть $u(x,t)$ – отклонение изучаемой системы от положения равновесия в точке x в момент времени t.

Если через $M(x)$ обозначить массу участка $[0,x)$ струны, то кинетическая энергия струны выражается формулой

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_{[0,\ell]} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 d[M(x)].$$

В частном случай, когда модель представляет собой цепочку из двух струн, соединенных в точке ξ и массы сосредоточены на всех концах струн, то последний интеграл примет вид

$$K = \frac{1}{2}\Bigg((\frac{\partial u}{\partial t}(+0,t))^2 \Delta^+ M(0) + (\frac{\partial u}{\partial t}(\xi-0,t))^2 \Delta^- M(\xi) +$$

$$+ (\frac{\partial u}{\partial t}(\xi+0,t))^2 \Delta^+ M(\xi) + (\frac{\partial u}{\partial t}(\ell-0,t))^2 \Delta^- M(\ell) \Bigg),$$

где левый и правый скачки функции M ($\Delta^- M$ и $\Delta^+ M$) в соответствующих точках представляют собой значения сосредоточенных масс.

Определим $p(x)$ как функцию, характеризующую силу натяжения струн, и в точках разрыва струн равную упругостям "внутренних" пружин, соединяющих струны. Тогда внутренняя энергия, накапливаемая системой за счет собственной упругости, равна

$$\frac{1}{2}\int\limits_{(0,\ell)} p(x) u'^2_\mu(x,t)\, d\mu(x),$$

где функция $\mu(x)$ строго возрастает на $[0,\ell]$ и разрывна лишь в точках разрыва $u(x,t)$; производная u'_μ понимается как производная по мере, порождаемой функцией $\mu(x)$. Заметим, что

$$\int\limits_{(0,\ell)} p(x) u'^2_\mu(x,t)\, d\mu(x) = \int\limits_{[0,\ell]} p(x) u'^2_\mu(x,t)\, d\mu(x),$$

поскольку функция $\mu(x)$ предполагается непрерывной в точках $x = 0$ и $x = \ell$, а значит, μ-мера этих точек равна нулю. Следовательно, собственное значение функции $p(x)u'^2_\mu(x,t)$ в точках $x = 0$ и $x = \ell$ на рассматриваемый выше интеграл влияния не оказывает, поэтому будем полагать $p(0)u'_\mu(0,t) = p(\ell)u'_\mu(\ell,t) = 0$.

Энергия, возникающая за счет упругости внешней среды, порождаемой, например, "внешними" пружинами, может быть выражена

$$\int\limits_{[0,\ell]} \frac{u^2(x,t)}{2}\, d[Q(x)].$$

В частном случае, когда система представляет собой две струны, соединенные в точке ξ, и дополнительные пружины прикреплены ко всем концам струн, функция $Q(x)$ равна

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \gamma_1, & \text{если } 0 < x < \xi, \\ \gamma_1 + \gamma_2, & \text{если } x = \xi, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, & \text{если } \xi < x < \ell, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4, & \text{если } x = \ell. \end{cases}$$

При этом энергия, накапливаемая пружинами, входящими в состав исследуемой модели, равна

$$\frac{\gamma_1 u^2(+0,t)}{2} + \frac{\gamma_2 u^2(\xi-0,t)}{2} + \frac{\gamma_3 u^2(\xi+0,t)}{2} + \frac{\gamma_4 u^2(\ell-0,t)}{2},$$

где γ_i – упругости соответствующих пружин.

Обозначим через $F(x,t)$ сумму всех внешних сил, приложенных к участку $[0,x)$ в момент времени t. Тогда работу внешних сил можно представить в виде интеграла

$$\int\limits_{[0,\ell]} u(x,t)\, d_x[F(x,t)].$$

В общем случае потенциальная энергия рассматриваемой системы будет равна

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_{[0,\ell]} p(x)(u'_\mu(x,t))^2 d\mu(x) + \frac{1}{2}\int\limits_{[0,\ell]} u^2(x,t)\, d[Q(x)] - \int\limits_{[0,\ell]} u(x,t)\, d_x[F(x,t)].$$

Тогда интеграл Остроградского-Гамильтона принимает вид

$$\Phi(u) = \int\limits_0^T (K-U)\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \Bigg(\int\limits_{[0,\ell]} u_t'^2(x,t)\, d[M(x)] - \int\limits_{[0,\ell]} p(x) u_\mu'^2(x,t)\, d\mu(x) -$$

$$- \int\limits_{[0,\ell]} u^2(x,t)\, d[Q(x)] + 2\int\limits_{[0,\ell]} u(x,t) d_x[F(x,t)] \Bigg)\, dt. \qquad (1)$$

Предположим, что $p(x)$, $Q(x)$, $F(x,t)$ – функции ограниченной вариации на $[0,\ell]$, причем $\inf\limits_{(0,\ell)} p(x) > 0$; функции $M(x)$, $\mu(x)$ строго возрастают на $[0,\ell]$. Функционал (1) будем рассматривать в классе функций E таких, что при каждом фиксированном t функция $u(x,t)$ является μ-абсолютно непрерывной по переменной x, при этом $u'_\mu(x,t)$ – функция ограниченной вариации по переменной x и непрерывна по переменной t; функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной t; функции $u'_t(x,t)$ и $u''_{tt}(x,t)$ являются функциями ограниченной вариации по переменной x. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой пары (x,t) таких, что $|\mu(x) - \mu(x_0)| < \delta$ и $|t - t_0| < \delta$, верно $|u(x,t) - u(x_0,t_0)| < \varepsilon$.

Согласно вариационному принципу Остроградского-Гамильтона, среди возможных движений струны в действительности осуществляется то, для которого

$$\delta\Phi(u)h = \int_0^T \Bigg(\int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)h_t'(x,t)\, d[M(x)] - \int_{[0,\ell]} p(x)u_\mu'(x,t)h_\mu'(x,t)\, d\mu(x) -$$

$$- \int_{[0,\ell]} u(x,t)h(x,t)\, d[Q(x)] + \int_{[0,\ell]} h(x,t)\, d_x[F(x,t)]\Bigg)\, dt = 0$$

для всех допустимых h. Дважды проинтегрировав по частям первый интеграл, имеем:

$$\int_0^T \int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)h_t'(x,t)\, d[M(x)]\, dt = -\int_0^T h(\ell,t) \int_{[0,\ell]} u_{tt}''(x,t)\, d[M(x)]\, dt + \int_0^T \int_{[0,\ell]} g_1(x,t)\, d_x h(x,t)\, dt,$$

где $g_1(x,t) = \int_0^x u_{tt}''(s,t)\, d[M(s)]$. Аналогично, обозначив $g_2(x,t) = \int_0^x u(s,t)\, d[Q(s)]$, получим

$$\int_0^T \int_{[0,\ell]} h(x,t)\, dg_2(x,t)\, dt = \int_0^T h(\ell,t) \int_{[0,\ell]} u(x,t)\, d[Q(x)]\, dt - \int_0^T \int_{[0,\ell]} g_2(x,t)\, d_x h(x,t)\, dt.$$

Проинтегрировав по частям интеграл $\int_{[0,\ell]} h(x,t)\ d_x[F(x,t)]$, и воспользовавшись полученными выше выражениями, имеем

$$\int_0^T \int_{[0,\ell]} (g_1(x,t) - p(x)u_\mu'(x,t) + g_2(x,t) - F(x,t))\, d_x h(x,t)\, dt - \int_0^T h(0,t)F(0,t)\, dt +$$

$$+ \int_0^T h(\ell,t)\Bigg(F(\ell,t) - \int_{[0,\ell]} u(x,t)\, d[Q(x)] - \int_{[0,\ell]} u_{tt}''(x,t)\, d[M(x)]\Bigg)\, dt = 0,$$

откуда следует, что

$$\int_0^x u_{tt}''(x,t)\, d[M(x)] - p(x)u_\mu'(x,t) + \int_0^x u(x,t)\, d[Q(x)] - F(x,t) = C = const. \tag{2}$$

Подставив $x = +0$ в равенство (2), получим

$$u_{tt}''(0,t)\Delta^+ M(0) - p(+0)u_\mu'(+0,t) + u(0,t)\Delta^+ Q(0) - F(+0,t) = C.$$

С учетом $C = -F(0,t)$, имеем

$$u_{tt}''(0,t)\Delta^+ M(0) - p(+0)u_\mu'(+0,t) + u(0,t)\Delta^+ Q(0) - \Delta^+ F(0,t) = 0.$$

Аналогично, можем выразить C из равенства (2), подставив $x = \ell - 0$, т.е.

$$-u_{tt}''(\ell,t)\Delta^- M(\ell) - p(\ell - 0)u_\mu'(\ell - 0,t) - u(\ell,t)\Delta^- Q(\ell) + \Delta^- F(\ell,t) = 0.$$

Предполагая, что функции M, pu'_μ, Q и F дифференцируемы по $[\sigma]$, где функция $\sigma(x)$ строго возрастает, получим

$$u''_{tt}(x,t)M'_{[\sigma]}(x) - (p(x)u'_\mu(x,t))'_{[\sigma]} + u(x,t)Q'_{[\sigma]}(x) - F'_{[\sigma]}(x,t) = 0. \tag{3}$$

Заметим, что из уравнения (3) следуют условия в точках $x = 0$ и $x = \ell$. В самом деле, подставив $x = 0$, получим

$$u''_{tt}(0,t)\Delta^+ M(0) - \Delta^+(pu'_\mu)(0,t) + u(0,t)\Delta^+ Q(0) = \Delta^+ F(0,t),$$

где $\Delta^+(pu'_\mu)(0,t) = p(+0)u'_\mu(+0,t)$.

Аналогично, при $x = \ell$ уравнение (3) реализуется в виде

$$u''_{tt}(\ell,t)\Delta^- M(\ell) - \Delta^-(pu'_\mu)(\ell,t) + u(\ell,t)\Delta^- Q(\ell) = \Delta^- F(\ell,t),$$

где $\Delta^-(pu'_\mu)(\ell,t) = -p(\ell - 0)u'_\mu(\ell - 0,t)$.

Таким образом, реальная форма $u(x,t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} u''_{tt}(x,t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)u'_\mu(x,t))'_{[\sigma]} - u(x,t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x,t), & x \in [0,\ell] \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u'_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Будем предполагать, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, задающие начальную форму и начальную скорость соответственно, μ-абсолютно непрерывны, причем, $\varphi'_\mu(x)$, $\psi'_\mu(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0,\ell]$.

Докажем теперь корректность полученной модели малых вынужденных колебаний стилтьесовской струны с особенностями на концах.

Теорема 1. *Пусть функции $\mu(x)$, $M(x)$, $\sigma(x)$ строго возрастают, $Q(x)$ не убывает на $[0,\ell]$. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – решения исследуемой модели при начальных данных $\varphi^{(1)}(x)$, $\psi^{(1)}(x)$ и $\varphi^{(2)}(x)$, $\psi^{(2)}(x)$ соответственно, т.е. решения моделей*

$$\begin{cases} u^{(i)}_{tt}(x,t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)u^{(i)}_\mu(x,t))'_{[\sigma]} - u^{(i)}(x,t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x,t), & x \in [0,\ell] \\ u^{(i)}(x,0) = \varphi^{(i)}(x), \\ u^{(i)}_t(x,0) = \psi^{(i)}(x), \end{cases} \tag{4}$$

$(i = 1,2)$. *Обозначим через $u(x,t)$ их разность: $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.*

Если $\varphi(x) = \varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(2)}(x)$, $\psi(x) = \psi^{(1)}(x) - \psi^{(2)}(x)$ и $\varphi'_\mu(x) = \varphi'^{(1)}_\mu(x) - \varphi'^{(2)}_\mu(x)$ малы в смысле нормы $||g(x)||_\mu = \max\limits_{\overline{[0,\ell]}_\mu} |g(x)|$ пространства C_μ μ-непрерывных функций, то $|u(x,t)|$ также меняется мало на прямоугольнике $\overline{[0,\ell]}_\mu \times [0,T]$, где через $\overline{[0,\ell]}_\mu$ обозначено специальное расширение отрезка $[0,\ell]$ (см.[2]), полученное заменой всякой точки ξ разрыва функции $\mu(x)$ на пары $\xi - 0$ и $\xi + 0$.

Доказательство. Заметим, что $u(x,t)$ – решение следующего уравнения

$$u''_{tt}(x,t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)u'_\mu(x,t))'_{[\sigma]} - u(x,t)Q'_{[\sigma]}(x).$$

Умножим это уравнение на u'_t и проинтегрируем полученное выражение. Имеем

$$\int\limits_{[0,\ell]} u'_t(x,t)u''_{tt}(x,t)\, d[M(x)] = \int\limits_{[0,\ell]} u'_t(x,t)\, d_x[p(x)u'_\mu(x,t)] - \int\limits_{[0,\ell]} u'_t(x,t)u(x,t)\, d[Q(x)].$$

Зафиксируем произвольное $t_0 \in [0,T]$ и проинтегрируем предыдущее равенство по отрезку $[0,t_0]$. Получим, что

$$\int_0^{t_0}\int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)u_{tt}''(x,t)\; d[M(x)]\; dt = \int_0^{t_0}\int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)\; d_x[p(x)u_\mu'(x,t)]\; dt - \int_0^{t_0}\int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)u(x,t)\; d[Q(x)]\; dt. \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^{t_0}\int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)u_{tt}''(x,t)\; d[M(x)]\; dt$ и, воспользовавшись теоремой Фубини, перепишем его следующим образом:

$$\int_0^{t_0}\int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)u_{tt}''(x,t)\; d[M(x)]\; dt = \frac{1}{2}\int_{[0,\ell]} \left((u_t'(x,t_0))^2 - \psi(x)^2\right)\; d[M(x)].$$

Внутренний интеграл в $\int_0^{t_0}\int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)\; d[p(x)u_\mu'(x,t)]\; dt$ проинтегрируем по частям

$$\int_0^{t_0}\int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)\; d_x[p(x)u_\mu'(x,t)]\; dt = -\frac{1}{2}\int_{[0,\ell]} p(x)\left((u_\mu'(x,t_0))^2 - \varphi_\mu'^2(x)\right)\; d\mu(x), \tag{6}$$

т.к. $p(0)u_\mu'(0,t) = p(\ell)u_\mu'(\ell,t) = 0$ и $u_t'(x,t) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial t}(u_\mu'(s,t))\; d\mu(s)$.

Интеграл $\int_0^{t_0}\int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)u(x,t)\; d[Q(x)]\; dt$ перепишем следующим образом

$$\int_0^{t_0}\int_{[0,\ell]} u_t'(x,t)u(x,t)\; d[Q(x)]\; dt = \frac{1}{2}\int_{[0,\ell]} \left((u(x,t_0))^2 - \varphi^2(x)\right)\; d[Q(x)].$$

Подставив полученные представления в равенство (5), получим, что

$$\int_{[0,\ell]} (u_t'(x,t_0))^2 d[M(x)] + \int_{[0,\ell]} p(x)\left(u_\mu'(x,t_0)\right)^2 d\mu(x) + \int_{[0,\ell]} u^2(x,t_0)\; d[Q(x)] =$$

$$= \int_{[0,\ell]} \psi^2(x)\; d[M(x)] + \int_{[0,\ell]} p(x)\varphi_\mu'^2(x)\; d\mu(x) + \int_{[0,\ell]} \varphi^2(x)\; d[Q(x). \tag{7}$$

Левая часть равенства (7) мала, так как по условию правая часть мала. Обозначая через ε правую часть уравнения (7), для всякого $t_0 \in [0,T]$ и каждого $x \in \overline{[0,\ell]}_\mu$ будем иметь

$$\int_0^x \left(u_t'(s,t_0)\right)^2 d[M(s)] \leqslant \int_{[0,\ell]} \left(u_t'(s,t_0)\right)^2 d[M(s)] \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Аналогично,

$$\int\limits_0^x p(s)\left(u'_\mu(s,t_0)\right)^2 d\mu(s) \leqslant \int\limits_{[0,\ell]} p(s)\left(u'_\mu(s,t_0)\right)^2 d\mu(s) \leqslant \varepsilon. \tag{9}$$

Покажем, что для всех $x \in \overline{[0,\ell]}_\mu$ и $t_0 \in [0,T]$ величина $|u(x,t_0)|$ мала, если малы ε и величина $\max\limits_{x\in\overline{[0,\ell]}_\mu} |\varphi(x)|$. Имеем

$$|u(x,t_0)| \leqslant |u(x,t_0) - u(0,t_0)| + |u(0,t_0)|.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части последнего равенства. Для первого слагаемого, используя неравенство Коши-Буняковского, последовательно находим

$$|u(x,t_0) - u(0,t_0)| \leqslant \sqrt{\frac{\mu(\ell)-\mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon}, \tag{10}$$

где $c_0 = \inf\limits_{x\in(0,\ell)} p(x) > 0$. Интеграл $\int\limits_{[0,\ell]} |u(x,t_0) - u(0,t_0)|\; d[M(x)]$, в силу неравенства (10), допускает оценку

$$\int\limits_{[0,\ell]} |u(x,t_0) - u(0,t_0)|\; d[M(x)] \leqslant \sqrt{\frac{\mu(\ell)-\mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon}\cdot (M(\ell)-M(0)). \tag{11}$$

Отсюда, после несложных преобразований, найдем

$$\int\limits_{[0,\ell]} |u(0,t_0)|\; d[M(x)] \leqslant \sqrt{\frac{\mu(\ell)-\mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon}\cdot (M(\ell)-M(0)) +$$

$$+ \int\limits_{[0,\ell]} |u(x,t_0) - u(x,0)|\; d[M(x)] + \int\limits_{[0,\ell]} |\varphi(x)|\; d[M(x)]. \tag{12}$$

Для интеграла $\int\limits_{[0,\ell]} |u(x,t_0) - u(x,0)|\; d[M(x)]$, применяя теорему Фубини и неравенство Коши-Буняковского, получаем оценку

$$\int\limits_{[0,\ell]} |u(x,t_0) - u(x,0)|\; d[M(x)] \leqslant \sqrt{M(\ell)-M(0)} \cdot T \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

Тогда (12) принимает вид

$$|u(0,t_0)|(M(\ell)-M(0)) \leqslant \sqrt{\frac{\mu(\ell)-\mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon}\cdot (M(\ell)-M(0)) + \sqrt{M(\ell)-M(0)} \cdot T \cdot \sqrt{\varepsilon} +$$

$$+ \max_{x\in\overline{[0,\ell]}_\mu} |\varphi(x)|(M(\ell)-M(0)).$$

Отсюда находим

$$|u(0,t_0)| \leqslant \sqrt{\frac{\mu(\ell)-\mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon} + \frac{T\cdot\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M(\ell)-M(0)}} + \max_{x\in\overline{[0,\ell]}_\mu} |\varphi(x)|. \tag{13}$$

Таким образом, с учетом (10) и (13), $|u(x,t_0)|$ допускает перезапись

$$|u(x,t_0)| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{\mu(\ell)-\mu(0)}{c_0}}+\frac{T\cdot\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M(\ell)-M(0)}}+\max_{x\in\overline{[0,\ell]}_\mu}|\varphi(x)|.$$

Из последнего неравенства и следует требуемое. Другими словам, показано, что при малом изменении начальных условий соответствующее решение математической задачи (4) изменяется мало.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аткинсон, Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: пер. с англ. / Ф. Аткинсон. — М. : Мир, 1968. — 749 с.

2. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

3. Покорный, Ю. В. О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 262–265.

4. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

5. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

6. Зверева, М. Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями : качественная теория / М. Б. Зверева. — Саарбрюккен : Lap Lambert Academic Publishing, 2012. — 112 с.

7. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

8. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

9. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний сингулярной струны / М. Б. Зверева, Ф. О. Найдюк, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 111–119.

REFERENCES

1. Atkinson F.V. Discrete and Continuous Boundary Problems. [Atkinson F. Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi]. Moscow, Mir, 1968, 749 p.

2. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

3. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Derivatives in a Generalized Sturm-Liouville Problem. [Pokornyj Yu.V. O differencialax Stilt'esa v obobshhennoj zadache Shturma-Liuvillya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2002, vol. 383, no. 5, pp. 262–265.

4. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Problem for Impulsive Problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

5. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

6. Zvereva M.B. Differential Equations with Discontinuous Solutions: Qualitative Theory. [Zvereva M.B. Differencial'nye uravneniya s razryvnymi resheniyami: kachestvennaya teoriya]. Saarbruecken, 2012, 112 p.

7. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon. About the Uniqueness of the Solution of a Mathematical Model of the Forced Oscillations of String with Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon. O edinstvennosti matematicheskoj modeli vynuzdennyx kolebanyj struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 50–55.

8. Baev A. D., Shabrov S. A., Golovaneva F. V., Meach Mon About unique classical solution mathematical model of forced vibrations rod system with singularities. [Baev A. D., Shabrov S. A., Golovanyova F. V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

9. Zvereva M. B., Naidjuk F. O., Zalukaeva Zh. O. Modeling vibrations of singular string. [Zvereva M. B., Najdyuk F. O., Zalukaeva Zh. O. Modelirovanie kolebanij singulyarnoj struny]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 111–119.

Залукаева Жанна Олеговна, аспирант, кафедра математического анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Zalukaeva Zhanna Olegovna, Post-graduate student of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–86–90