УДК 517.927

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию 20.05.2015 г.

Аннотация. Обозначим через C пространство $C[0,1]$, через L_p $(1 < p < \infty)$ — пространство $L_p(0,1)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

$$x''(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)(T_i x)(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0, \\ \alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i,j = 1,2)$ — действительные числа, $a_i(t)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ — положительные суммируемые функции, $T_i : C \to L_p$ $(1 < p < \infty,\ i = 1,2,\dots,n)$ — линейные положительные (монотонные) непрерывные операторы.

Под положительным решением задачи (1)–(2) будем понимать функцию $x \in W^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

В работе на основе теории полуупорядоченных пространств получены достаточные условия существования положительного решения для краевой задачи (1)–(2).

Ключевые слова: конус, полуупорядоченность, оператор, положительное решение, краевая задача.

ON THE EXISTENCE OF THE POSITIVE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND-ORDER LINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

G. E. Abduragimov

Abstract. Let's denote space $C[0,1]$ through C, space $L_p(0,1)$ through L_p $(1 < p < \infty)$ and space of functions, determined on $[0,1]$ with absolute uninterrupted derivative through W^2.

Boundary value

$$x''(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)(T_i x)(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{1}$$

$$\alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0, \qquad (2)$$
$$\alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) = 0,$$

where α_{ij}, β_{ij} $(i,j = 1,2)$ are real numbers, $a_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ is a positive added functions, $T_i : C \to L_p$ $(1 < p < \infty,\ i = 1,2,\ldots,n)$ is a linear positive (monotone) uninterrupted operators.

Under the positive solution of the problem (1)–(2) we shall consider the function $x \in W^2$, positive in the interval $(0,1)$, satisfying almost everywhere the equation (1) and boundary conditions (2).

On the basis of the theory of semi regulated spaces the sufficient conditions of solving the boundary value problem (1)–(2) are received in this article.

Keywords: cone, semi regulation, operator, positive solution, boundary value problem.

Вопросам исследования существования и единственности положительных решений для функционально-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ. Практически во всех вышеупомянутых работах естественным орудием исследования положительных решений являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем методы исследования положительных решений операторных уравнений были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

В работе на основе теории полуупорядоченных пространств получены достаточные условия существования положительного решения для одного линейного функционально – дифференциального уравнения второго порядка.

Для сокращения обозначим через C пространство $C[0,1]$, через L_p $(1 < p < \infty)$ — пространство $L_p(0,1)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)(T_i x)(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad n \in \mathrm{N}, \qquad (1)$$

$$\alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0, \qquad (2)$$
$$\alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) = 0,$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i,j = 1,2)$ — действительные числа, $a_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ — положительные суммируемые функции, $T_i : C \to L_p$ $(1 < p < \infty,\ i = 1,2,\ldots,n)$ — линейные положительные (монотонные) непрерывные операторы.

Под положительным решением задачи (1)–(2) будем понимать функцию $x \in W^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

Предположим $\alpha_{11} + \alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{21} + \alpha_{22} \neq 0$ и введем обозначения

$$\alpha \equiv \frac{\alpha_{12} + \beta_{11} + \beta_{12}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}, \quad \beta \equiv \frac{\alpha_{22} + \beta_{21} + \beta_{22}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}}.$$

При выполнении условий:

A) $\alpha \neq \beta$;

B) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}(1-\alpha) - \frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}(1-\beta)\right] < 0$;

C) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}(1-\alpha) - \frac{\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}(1-\beta)\right] > 0$;

D) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\alpha-\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}\beta\right]>0$;

E) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\alpha-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}\beta+1\right]<0$

как показано в [12], функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (2) существует, положительна и имеет вид

$$G(t,s)=\begin{cases} a_1(s)(t-\alpha)+a_2(s)(t-\beta), & 0\leqslant t\leqslant s;\\ b_1(s)(t-\alpha)+b_2(s)(t-\beta), & \mathrm{s}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

где

$$a_1(s)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\beta-\frac{\alpha_{22}s+\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\right],\quad a_2(s)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{12}s+\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}-\alpha\right],\quad s\in[0,\ 1]\,,$$

$$b_1(s)=\frac{\alpha_{21}s-\beta_{21}}{(\beta-\alpha)(\alpha_{21}+\alpha_{22})},\quad b_2(s)=\frac{\alpha_{11}s-\beta_{11}}{(\alpha-\beta)(\alpha_{11}+\alpha_{12})},\quad s\in[0,1]\,.$$

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(2) интегральное уравнение

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)\sum_{i=1}^n a_i(s)(T_ix)(s)ds,\quad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{3}$$

Оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t)=\int_0^1 G(t,s)\sum_{i=1}^n a_i(s)(T_ix)(s)ds,\quad 0<t<1, \tag{4}$$

действует в пространстве C, вполне непрерывен ([13], с. 161) и оставляет инвариантным конус $\widetilde{K}$ неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$\min_{t\in[0,1]} x(t)\geqslant \frac{m}{M}\max_{t\in[0,1]} x(t)=\frac{m}{M}\left\|x\right\|_C,$$

где m и M представляют собой нижние и верхние оценки функции Грина.

Теорема. Предположим, что выполнены условия A) – E) и

$$\frac{m^2}{M}\int_0^1\sum_{i=1}^n a_i(s)(T_i1)(s)ds\leqslant 1.$$

Тогда краевая задача (1) – (2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. В дальнейшем под полуупорядочиванием $u\prec v$ и $u\precneqq v$ в конусе $\widetilde{K}$ пространства C соответственно будем понимать $u(t)\leqslant v(t)$ и $u(t)>v(t)$, $t\in[0,1]$.

Покажем, что для некоторого ненулевого элемента u $(-u\precneqq\widetilde{K}; u=v-w,\ v\in\widetilde{K},\ w\in\widetilde{K})$ выполняется соотношение

$$Au\succ\alpha u(\alpha>0). \tag{5}$$

Действительно, в силу монотонности оператора $T:C\to L_p$ имеем

$$(Au)(t)\geqslant m\int_0^1\sum_{i=1}^n a_i(s)\left(T_iu\right)(s)ds\geqslant\frac{m^2}{M}\left\|u\right\|_C\int_0^1\sum_{i=1}^n a_i(s)\left(T_i1\right)(s)ds\geqslant$$

$$\geqslant \frac{m^2}{M}\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(s)\,(T_i 1)\,(s)ds\cdot u(t).$$

Взяв в качестве α число $\dfrac{m^2}{M}\displaystyle\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(s)\,(T_i 1)\,(s)ds\cdot x(t)$, получим требуемое неравенство (5).

Тогда, согласно теореме ([14], с. 68) при $\alpha \leqslant 1$, оператор (4) имеет по крайней мере один положительный собственный вектор с собственным значением равным 1, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(2).

Замечание. В нелинейном случае $\frac{p}{q} \neq 1$ и $n = 1$, существование и единственность положительного решения краевой задачи (1) – (2) следует из ([15], [16]).

В качестве примера, иллюстрирующего выполнение условий настоящей теоремы, рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + \sum_{i=1}^n (S_{h_i}x)(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad n \in \mathrm{N} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} x(0) - 9x'(0) = 0, \\ 10x(0) - 99x'(0) - x'(1) = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где h_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – заданные действительные числа из интервала $(0,\ 1)$, $(S_{h_i}x)(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < h_i, \\ x(t-h_i), & h_i < t < 1. \end{cases}$ Легко убедиться, что функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (7) существует, положительна и имеет вид

$$G(t,s) = \begin{cases} 0{,}1(t+9), & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (-9{,}9 - s)(t+9) + (s+9)(t+10), & s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

причем $0{,}9 \leqslant G(t,s) \leqslant 1$, $(t,\ s \in [0,1])$.

Существование положительного решения краевой задачи (6) – (7) как следует из вышеприведенной теоремы возможно при выполнения условия $\sum\limits_{i=1}^n (1 - h_i) \leqslant \frac{M}{m^2} = \frac{100}{81}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев, Н. В. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, П. М. Симонов // Вестник Удмуртского государственного университета. Серия: Математика. — 2009. — № 1. — С. 3–23.

2. Wong, F. H. Existence of positive solutions for second order functional differential equations / F. H. Wong, S. P. Wang, T. G. Chen // Computers & Mathematics with Applications. — 2008. — V. 56, № 10. — P. 2580–2587.

3. Ma, R. Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations / R. Ma // Appl. Math. Comput. — 2007. — V. 193, № 1. — P. 66–72.

4. Zima, M. On positive solutions of functional-differential equations in banach spaces / M. Zima // Journal of Inequalities and Applications. — 2000. — V. 6, № 3. — P. 359–371.

5. Agarwal, Ravi P. Positive solutions of singular value problems for delay differential equations / Ravi P. Agarwal; Svatoslav Stanek // Dyn. Syst. Appl. — 2007. — V. 16, № 4. — P. 755–770.

6. Existence of positive solutions for functional equations / C. Hong, C. Yeh, C. Lee, F. Wong // Computer & Mathematics with Applications. — 2000. — V. 40, № 6. — P. 783–792.

7. Sun, Y. Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations / Y. Sun, M. Han, L. Debnath // Applied Mathematics and Computation. — 2007. — V. 190, № 1. — P. 699–704.

8. Weng, P. Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE / P. Weng, D. Jiang // Computers & Mathematics with Applications. — 1999. — V. 37, № 10. — P. 1–9.

9. Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations / C. Hong, C. Yeh, C. Lee, F. Wong // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — V. 297, № 1. — P. 14–23.

10. Yin, F. The existence of positive solutions for the quasilinear functional delay differential equations / F. Yin, F. Fugi, Y. Li // J. Math. Study. — 2002. — V. 35, № 4. — P. 364–370.

11. Agarwal, R. Positive solutions of singular boundary value problems for delay differential equations / R. Agarwal, S. Staněk // Dyn. Syst. Appl. — 2007. — V. 16, № 4. — P. 755–770.

12. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

13. Крейн, С. Г. Функциональный анализ / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1972. — 544 с.

14. Красносельский, М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. — 396 с.

15. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально – дифференциального уравнения второго порядка / Г. Э. Абдурагимов // Известия вузов. Серия: Математика. — 2006. — № 5. — С. 3–7.

16. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально – дифференциального уравнения второго порядка / Г. Э. Абдурагимов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 60–65.

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Functional differential equations and applications. [Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Funkcional'no-differencial'nye uravneniya i ix prilozheniya]. *Vestnik Udmurtskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika — Bulletin of Udmurt University, Mathematics*, 2009, iss. 1, pp. 3–23.

2. Wong F.H., Wang S.P., Chen T.G. Existence of positive solutions for second order functional differential equations. Computers & Mathematics with Applications, 2008, vol. 56, iss. 10, pp. 2580–2587.

3. Ma R. Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations. Appl. Math. Comput., 2007, vol. 193, no. 1, pp. 66–72.

4. Zima M. On positive solutions of functional-differential equations in banach spaces. Journal of Inequalities and Applications, 2000, vol. 6, iss. 3, pp. 359–371.

5. Agarwal Ravi P., Stanek, Svatoslav. Positive solutions of singular value problems for delay differential equations. Dyn. Syst. Appl., 2007, vol. 16, no. 4, pp. 755–770.

6. Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F. Existence of positive solutions for functional equations. Computer & Mathematics with Applications, 2000, vol. 40, iss. 6–7, pp. 783–792.

7. Sun Y., Han M., Debnath L. Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations. Applied Mathematics and Computation, 2007, vol. 190, iss. 1, pp. 699–704.

8. Weng P., Jiang D. Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE. Computers & Mathematics with Applications, 1999, vol. 37, iss. 10, pp. 1–9.

9. Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F. Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations. J. Math. Anal. Appl. 2004, vol. 297, no. 1, pp. 14–23.

10. Yin F., Fugi F., Li Y. The existence of positive solutions for the quasilinear functional delay differential equations. J. Math. Study, 2002, vol. 35, no. 4, pp. 364–370.

11. Agarwal R., Staněk S. Positive solutions of singular boundary value problems for delay differential equations. Dyn. Syst. Appl., 2007, vol. 16, no. 4, pp. 755–770.

12. Naimark M.A. Linear differential operators. [Najmark M.A. Linejnye differencial'nye operatory]. Moscow: Nauka, 1969, 528 p.

13. Krein S.G. Functional analysis and other mathematics. [Krejn S.G. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Nauka, 1972, 544 p.

14. Krasnosel'skii M. A. Positive solutions of operator equations. [Krasnosel'skij M.A. Polozhitel'nye resheniya operatornyx uravnenij]. Moscow: Fizmatgiz, 1962, 396 p.

15. Abduragimov G.E. On the existence and uniqueness of the positive solution of a boundary value problem for a second-order nonlinear functional-differential equation. [Abduragimov G.E'. O sushhestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya kraevoj zadachi dlya odnogo nelinejnogo funkcional'no – differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2006, no. 5, pp. 3–7.

16. Abduragimov G.E. On the existence and uniqueness of the positive solution of a boundary value problem for a second-order nonlinear functional-differential equation. [Abduragimov G.E'. O sushhestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya kraevoj zadachi dlya odnogo nelinejnogo funkcional'no – differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 60–65.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, доцент кафедры прикладной математики и информатики Дагестанского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Махачкала, Российская Федерация
E-mail: gusen_e@mail.ru

Abduragimov Gusen Elderhanovich, Assistant Professor, Department of of Applied Mathematics and Informatics, Daghestan State University, docent, Makhachkala, Russian Federation
E-mail: gusen_e@mail.ru