

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ УЗКОПОЛОСНОГО РАДИОСИГНАЛА В УСЛОВИЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ*

А. П. Трифонов, Е. В. Литвинов, Ю. Э. Корчагин

*Воронежский государственный университет,
Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

Поступила в редакцию 01.06.2016 г.

Аннотация. Исследован максимально правдоподобный алгоритм обнаружения радиосигнала произвольной формы с неизвестными длительностью, амплитудой и начальной фазой. Выполнен синтез максимально правдоподобного обнаружителя. В результате анализа найдены асимптотические характеристики обнаружения, точность которых увеличивается с ростом отношения сигнал/шум. Приведены результаты статистического моделирования на ЭВМ алгоритма обнаружения радиоимпульса с огибающей колокольной формы, позволяющие определить границы применимости асимптотических выражений для вероятностей ошибок.

Ключевые слова: обнаружение сигнала, амплитуда, длительность, максимально правдоподобный алгоритм, вероятность ложной тревоги, вероятность пропуска сигнала.

THE DETECTION EFFICIENCY OF NARROWBAND RADIO-SIGNAL IN CONDITIONS OF PARAMETRIC A PRIORI INDETERMINATION

A. P. Trifonov, E. V. Litvinov, Yu. E. Korchagin

Abstract. We explored the maximum likelihood detection algorithm wsviform radio with unknown duration, the amplitude and the initial phase. We synthesized of the maximum likelihood detector. Asymptotic detection characteristics found in the analysis, which increases with an increase in the accuracy of the signal / noise ratio. The results of statistical modeling on a computer algorithm to detect a radio pulse envelope bell shape, allowing to define the limits of applicability of asymptotic expressions for error probability.

Keywords: the detection signal amplitude, duration, maximum likelihood algorithm, false alarm probability, the probability of the signal passes.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе функционирования различных радиоэлектронных систем локации, навигации и связи возникает необходимость в обработке сигналов с неизвестными параметрами, наблюдаемых на фоне помех [1, 2 и др.]. В частности, при неизвестном расстоянии до цели, неизвестно время прихода сигнала. Если при этом неизвестны размеры цели, также оказываются неизвестными амплитуда и длительность обрабатываемого сигнала.

* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-49-00079)
© Трифонов А. П., Литвинов Е. В., Корчагин Ю. Э., 2016

В дальнейшем в качестве модели радиосигнала примем

$$s(t) = a_0 f[(t - \lambda_0)/\tau_0] \cos(\omega_0 t - \varphi_0). \quad (1)$$

Здесь λ_0 — время прихода, τ_0 — эквивалентная длительность, a_0 — амплитуда, ω_0 — частота, φ_0 — начальная фаза радиосигнала, а функция $f(x)$ описывает форму огибающей радиосигнала и обладает свойствами: $\sup f(x) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1$. Кроме того, в силу узкополосности радиосигнала, выполняется неравенство

$$\omega_0 \tau_0 \gg 1. \quad (2)$$

Будем считать, что радиосигнал (1) наблюдается на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Положим, что время прихода λ_0 , длительность τ_0 , амплитуда a_0 и начальная фаза φ_0 радиосигнала (1) априори неизвестны.

В [4], [5] предложены способы расчета вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода (вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала), возникающих при обнаружении сигналов с неизвестной амплитудой и несколькими неизвестными неэнергетическими параметрами [3], либо только с одним неизвестным произвольным энергетическим параметром. Однако, если помимо амплитуды и неэнергетических параметров у сигнала неизвестны также энергетические параметры, а априорная область возможных значений неизвестных параметров достаточно велика, расчет характеристик алгоритмов обнаружения существенно усложняется.

Рассмотрим здесь обнаружение радиосигнала (1) с неизвестными временем прихода λ_0 , начальной фазой φ_0 (неэнергетические параметры), длительностью τ_0 и амплитудой a_0 (энергетические параметры). Положим, что возможные значения времени прихода λ_0 , длительности τ_0 и начальной фазы φ_0 принимают значения из априорных интервалов, определяемых выражениями: $\lambda_0 \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$, $\tau_0 \in [T_1; T_2]$, $\varphi_0 \in [-\pi; \pi]$. Для обнаружения радиосигнала (1) будем использовать метод максимального правдоподобия [3–5 и др.]. Ниже найдены асимптотические выражения для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода, возникающих при обнаружении радиосигнала (1). Работоспособность алгоритмов обнаружения и границы применимости полученных асимптотических выражений установлены с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

1. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ОБНАРУЖЕНИЯ

Пусть в течение времени $[0; T]$ на вход приемника поступает реализация смеси сигнала и шума $x(t) = s(t) + n(t)$ или только шума $x(t) = n(t)$, причем сигнал $s(t)$ и шум $n(t)$ полагаем статистически независимыми. Обозначим $\Pi = [\Lambda_1; \Lambda_2] [T_1; T_2] [-\pi; \pi]$ — априорная область возможных значений времени прихода λ_0 , длительности τ_0 и начальной фазы φ_0 , а $\vec{\eta}_0 = \|\lambda_0, \tau_0, \varphi_0\|$ — вектор этих параметров. Согласно методу максимального правдоподобия (МП) [3–5] для реализации алгоритма, выполняющего обнаружение, необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) $M(a, \lambda, \tau, \varphi)$, как функцию неизвестных значений амплитуды a , и вектора $\vec{\eta} = \|\lambda, \tau, \varphi\|$ возможных значений времени прихода λ , длительности τ и начальной фазы φ радиосигнала для всех a и $\vec{\eta} \in \Pi$.

$$M(a, \vec{\eta}) = M(a, \lambda, \tau, \varphi) = \frac{2a}{N_0} \int_0^T x(t) f[(t - \lambda)/\tau] \cos(\omega_0 t - \varphi) dt - \frac{a^2}{N_0} E_0(\lambda, \tau, \varphi). \quad (3)$$

Здесь

$$E_0(\lambda, \tau, \varphi) = \int_0^T f^2[(t - \lambda)/\tau] \cos^2(\omega_0 t - \varphi) dt = \int_0^T f^2[(t - \lambda)/\tau] [1 + \cos(2\omega_0 t - 2\varphi)] dt / 2$$

— доля энергии радиосигнала (1) единичной амплитуды, сосредоточенная в интервале $[0; T]$. Учитывая (2), опустим в этом выражении слагаемое, содержащие удвоенную частоту. Имеем

$$E_0(\lambda, \tau, \varphi) \approx E(\lambda, \tau) = \int_0^T f^2[(t - \lambda)/\tau] dt/2, \quad (4)$$

так что параметр φ можно считать неэнергетическим [3].

Решение о наличии полезного сигнала (1) принимается на основе сравнения величины абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП (3) с порогом h , выбранным в соответствии с заданным критерием оптимальности обнаружения [5]. Если порог превышен, то принимается решение о наличии радиосигнала в наблюдаемых данных (гипотеза H_1), иначе выносится решение об отсутствии радиосигнала (гипотеза H_0):

$$\sup_{a, \vec{\eta} \in \Pi} M(a, \vec{\eta}) > h \Rightarrow H_1, \quad \sup_{a, \vec{\eta} \in \Pi} M(a, \vec{\eta}) < h \Rightarrow H_0. \quad (5)$$

Алгоритм (5) можно записать в ином виде, если учесть, что логарифм ФОП (3), с учетом (4), достигает абсолютного максимума по переменным a и φ , когда $a = \sqrt{R_c^2(\lambda, \tau) + R_s^2(\lambda, \tau)} / \sqrt{2E(\lambda, \tau)/N_0}$, $\text{tg}(\varphi) = R_s(\lambda, \tau)/R_c(\lambda, \tau)$, где

$$R_s(\lambda, \tau) = \frac{\sqrt{2} \int_0^T x(t) f[(t - \lambda)/\tau] \sin(\omega_0 t) dt}{\sqrt{E(\lambda, \tau) N_0}}, \quad R_c(\lambda, \tau) = \frac{\sqrt{2} \int_0^T x(t) f[(t - \lambda)/\tau] \cos(\omega_0 t) dt}{\sqrt{E(\lambda, \tau) N_0}}. \quad (6)$$

Тогда

$$\widehat{M}(\lambda, \tau) = \sup_{a, \varphi \in [-\pi; \pi]} M(a, \lambda, \tau, \varphi) = [R_s^2(\lambda, \tau) + R_c^2(\lambda, \tau)]/2, \quad (7)$$

а алгоритм обнаружения (5) с учетом (7) можно переписать в виде

$$\sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2], \tau \in [T_1; T_2]} \widehat{M}(\lambda, \tau) > h \Rightarrow H_1, \quad \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2], \tau \in [T_1; T_2]} \widehat{M}(\lambda, \tau) < h \Rightarrow H_0. \quad (8)$$

Эффективность алгоритмов обнаружения будем характеризовать вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода (вероятностями ложной тревоги и пропуска сигнала). Заметим, что алгоритмы (5) и (8) при выполнении (2) обладают одинаковой эффективностью [3].

2. АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ОБНАРУЖЕНИЯ

Для анализа алгоритмов обнаружения (5) и (8) более удобным оказывается иное чем (3) или (7) представление алгоритма обнаружения радиосигнала (1). Заметим, что логарифм ФОП (3) достигает максимума по переменной a , когда $a = R(\vec{\eta}) / \sqrt{2E(\lambda, \tau)/N_0}$, где

$$R(\vec{\eta}) = R(\lambda, \tau, \varphi) = \int_0^T x(t) f[(t - \lambda)/\tau] \cos(\omega_0 t - \varphi) dt / \sqrt{E(\lambda, \tau) N_0/2}. \quad (9)$$

Тогда алгоритм обнаружения можем записать в виде

$$\sup_{\vec{\eta} \in \Pi} L(\vec{\eta}) > h \Rightarrow H_1, \quad \sup_{\vec{\eta} \in \Pi} L(\vec{\eta}) < h \Rightarrow H_0. \quad (10)$$

Здесь

$$L(\vec{\eta}) = \sup_a M(a, \vec{\eta}) = R^2(\vec{\eta})/2, \quad (11)$$

В дальнейшем будем считать, что время наблюдения T достаточно велико, так что радиосигнал (1) полностью расположен внутри интервала наблюдения $[0; T]$. В частности, для этого необходимо выполнение условий: $\Lambda_1 > T_2$ и $T - \Lambda_2 > T_2$. Тогда пределы интегрирования в (9) можно заменить на бесконечные, так что

$$R(\vec{\eta}) \approx 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f[(t - \lambda)/\tau] \cos(\omega_0 t - \varphi) dt / \sqrt{\tau N_0}. \quad (12)$$

Заметим, что $E(\lambda, \tau) \approx \tau/2$ не зависит от параметра λ и этот параметр можно считать неэнергетическим [3].

Пусть справедлива гипотеза H_0 об отсутствии сигнала в наблюдаемых данных $x(t)$. Тогда вероятность ложной тревоги определяется выражением

$$\alpha = P \left[\sup_{\vec{\eta} \in \Pi} L(\vec{\eta}) > h \mid H_0 \right] \approx P \left[\sup_{\vec{\eta} \in \Pi} R_0^2(\vec{\eta})/2 > h \right]. \quad (13)$$

Здесь

$$R_0(\vec{\eta}) = R_0(\lambda, \tau, \varphi) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} n(t) f[(t - \lambda)/\tau] \cos(\omega_0 t - \varphi) dt / \sqrt{\tau N_0} \quad (14)$$

— функционал $R(\vec{\eta})$ (12) при отсутствии сигнала. Функционал (14) представляет собой центрированное гауссовское случайное поле с корреляционной функцией

$$\begin{aligned} B_0(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) &= \langle R_0(\vec{\eta}_1) R_0(\vec{\eta}_2) \rangle = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} f[(t - \lambda_1)/\tau_1] f[(t - \lambda_2)/\tau_2] \cos(\omega_0 t - \varphi_1) \cos(\omega_0 t - \varphi_2) dt / \sqrt{\tau_1 \tau_2} \approx \\ &\approx \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f[(t - \lambda_1)/\tau_1] f[(t - \lambda_2)/\tau_2] dt \right\} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) / \sqrt{\tau_1 \tau_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

где $\vec{\eta}_i = \|\lambda_i, \tau_i, \varphi_i\|$, $i = 1, 2$, а $\langle \bullet \rangle$ — означает усреднение по реализациям шума $n(t)$.

Перепишем выражение для вероятности ложной тревоги (13) в виде

$$\alpha \approx 1 - P_N(h), \quad P_N(h) = P \left[\sup_{\vec{\eta} \in \Pi} |R_0(\vec{\eta})| < \sqrt{2h} \right]. \quad (16)$$

Согласно (15), в общем случае, поле $R_0(\vec{\eta})$ (14) неоднородно по параметру τ . Это не позволяет воспользоваться результатами [4,5] для расчета вероятности $P_N(h)$ (16). Поэтому логично [6] разобьем априорную область возможных значений времени прихода и длительности Π на IJK подобластей $\Pi_{ijk} = [\Lambda_{1i}; \Lambda_{2i}] [T_{1j}; T_{2j}] [\Psi_{1k}; \Psi_{2k}]$, $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$, $k = 1, \dots, K$ таких, что для любой точки $(\tilde{\lambda}_i, \tilde{\tau}_j, \tilde{\varphi}_k) \in \Pi_{ijk}$ выполняется условие

$$\delta = \max(\Delta\lambda_i/\tilde{\tau}_j, \Delta\tau_j/\tilde{\tau}_j, \Delta\varphi_k) \ll 1, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K, \quad (17)$$

где $\Delta\lambda_i = \Lambda_{2i} - \Lambda_{1i}$, $\Delta\tau_j = T_{2j} - T_{1j}$, $\Delta\varphi_k = \Psi_{2k} - \Psi_{1k}$. Тогда в каждой подобласти Π_{ijk} при $\delta \rightarrow 0$ случайное поле $R_0(\vec{\eta})$ (14) можно считать локально-однородным. Потребуем далее, чтобы значения поля $R_0(\vec{\eta})$ в различных подобластях Π_{ijk} были приближенно статистически независимы. Для этого достаточно, чтобы площадь каждой из IJK подобластей Π_{ijk}

была значительно больше площади области, где корреляционная функция (15) существенно отлична от нуля. Это требование выполняется, если [5]

$$\xi_{ijk} = \xi \left(\tilde{\lambda}_i, \tilde{\tau}_j, \tilde{\varphi}_k \right) = \Delta \lambda_i \Delta \tau_j \Delta \varphi_k d \left(\tilde{\lambda}_i, \tilde{\tau}_j, \tilde{\varphi}_k \right) \gg 1, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K \quad (18)$$

где

$$d^2 \left(\tilde{\lambda}_i, \tilde{\tau}_j, \tilde{\varphi}_k \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 B_0(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 B_0(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{\partial \tau_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 B_0(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{\partial \varphi_1 \partial \lambda_2} \\ \frac{\partial^2 B_0(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{\partial \lambda_1 \partial \tau_2} & \frac{\partial^2 B_0(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} & \frac{\partial^2 B_0(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{\partial \varphi_1 \partial \tau_2} \\ \frac{\partial^2 B_0(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{\partial \lambda_1 \partial \varphi_2} & \frac{\partial^2 B_0(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{\partial \tau_1 \partial \varphi_2} & \frac{\partial^2 B_0(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2 = \tilde{\lambda}_i, \\ \tau_1 = \tau_2 = \tilde{\tau}_j, \\ \varphi_1 = \varphi_2 = \tilde{\varphi}_k, \end{matrix} \quad (19)$$

определитель матрицы вторых производных корреляционной функции (15). Тогда, при выполнении (17) и (18) вероятность $P_N(h)$ (16) можно записать в виде

$$P_N(h) = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^K P_{Nijk}(h), \quad P_{Nijk}(h) = P \left[\sup_{\tilde{\eta} \in \Pi_{ijk}} |R_0(\tilde{\eta})| < \sqrt{2h} \right]. \quad (20)$$

Известно [7], что при выполнении (17), (18), значения $R_{ijk}^+ = \sup_{\tilde{\eta} \in \Pi_{ijk}} R_0(\tilde{\eta})$ и $R_{ijk}^- = \inf_{\tilde{\eta} \in \Pi_{ijk}} R_0(\tilde{\eta})$ абсолютных максимума и минимума случайного поля $R_0(\tilde{\eta})$ (14) в каждой подобласти Π_{ijk} приближенно статистически независимы. Следовательно, при больших h с учетом (17), (18) для вероятностей $P_{Nijk}(h)$ (20) имеем

$$P_{Nijk}(h) \approx P \left[\max(R_{ijk}^+, -R_{ijk}^-) < \sqrt{2h} \right] = P_{ijk}^+(h) P_{ijk}^-(h), \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K, \quad (21)$$

где $P_{ijk}^+(h) = P \left[R_{ijk}^+ < \sqrt{2h} \right]$, $P_{ijk}^-(h) = P \left[R_{ijk}^- > -\sqrt{2h} \right]$. Так как в каждой подобласти Π_{ijk} , поле $R_0(\tilde{\eta})$ является центрированным локально-однородным гауссовским случайным полем, то $P_{ijk}^+(h) = P_{ijk}^-(h) = F_{0ijk}(\sqrt{2h})$, где $F_{0ijk}(h) = P \left[\sup_{\tilde{\eta} \in \Pi_{ijk}} R_0(\tilde{\eta}) < h \right]$ — функции распределения величины абсолютного максимума случайного поля $R_0(\tilde{\eta})$ в подобластях Π_{ijk} . Согласно [5], для функций $F_{0ijk}(h)$ $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K$ справедливы аппроксимации

$$F_{0ijk}(h) = P_{ijk}^+(h^2/2) = P_{ijk}^-(h^2/2) = \begin{cases} \exp \left[-\xi_{ijk} h^2 \exp(-h^2/2) / 4\pi^2 \right], & h \geq \sqrt{2}; \\ 0, & h < \sqrt{2}. \end{cases} \quad (22)$$

Точность приближенных формул (22) увеличивается с ростом h и ξ_{ijk} (18).

Подставляя (18) и (22) в (21), а затем в (20), находим

$$P_N(h) \approx \begin{cases} \exp \left[-h \exp(-h) \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K d \left(\tilde{\lambda}_i, \tilde{\tau}_j, \tilde{\varphi}_k \right) \Delta \lambda_i \Delta \tau_j \Delta \varphi_k / \pi^2 \right], & h \geq 1; \\ 0, & h < 1. \end{cases} \quad (23)$$

При выполнении (17), (18) величина $d \left(\tilde{\lambda}_i, \tilde{\tau}_j, \tilde{\varphi}_k \right)$ мало изменяется в пределах подобластей Π_{ijk} , а вероятность $P_N(h)$ (23) не зависит от способа разбиения априорной области Π на подобласти Π_{ijk} . Это позволяет в (23) заменить суммы соответствующими интегралами.

Таким образом, при выполнении (17), (18) соотношение (23) можно переписать в виде

$$P_N(h) \approx \begin{cases} \exp[-\xi h \exp(-h)/\pi^2], & h \geq 1; \\ 0, & h < 1, \end{cases} \quad \xi = \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \int_{T_1}^{T_2} \int_{-\pi}^{\pi} d(\lambda, \tau, \varphi) \, d\lambda \, d\tau \, d\varphi. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (16) для вероятности ложной тревоги окончательно получаем

$$\alpha \approx \begin{cases} 1 - \exp[-\xi h \exp(-h)/\pi^2], & h \geq 1; \\ 1, & h < 1. \end{cases} \quad (25)$$

Точность формулы (22) увеличивается с ростом ξ и h .

Пусть теперь справедлива гипотеза H_1 о наличии радиосигнала $s(t)$ (1) в наблюдаемых данных $x(t)$. Тогда вероятность пропуска при фиксированных истинных значениях λ_0 , τ_0 и φ_0 времени прихода, длительности и начальной фазы радиосигнала определяется выражением

$$\beta = P \left[\sup_{\vec{\eta} \in \Pi} L(\vec{\eta}) < h \mid H_1 \right] \approx P \left[\sup_{\vec{\eta} \in \Pi} R_1^2(\vec{\eta})/2 < h \right], \quad (26)$$

где $R_1(\vec{\eta})$ — функционал $R(\vec{\eta})$ (12) при наличии сигнала. Представим функционал $R_1(\vec{\eta})$ в виде

$$R_1(\vec{\eta}) = z_0 S(\vec{\eta}) + R_0(\vec{\eta}). \quad (27)$$

Здесь

$$S(\vec{\eta}) = \langle R_1(\vec{\eta}) \rangle / z_0 = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) f[(t-\lambda)/\tau] \cos(\omega_0 t - \varphi) \, dt \Big/ z_0 \sqrt{\tau N_0/2} \quad (28)$$

— нормированная регулярная, $R_0(\vec{\eta})$ — флуктуационная составляющая функционала $R_1(\vec{\eta})$, определенная в (14), а

$$z_0^2 = a_0^2 \tau_0 / N_0 \approx 2a_0^2 E_0(\lambda_0, \tau_0, \varphi_0) / N_0 \quad (29)$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ) [3]. Подставляя (1) в (28) и пренебрегая в полученном выражении слагаемыми с удвоенной частотой аналогично (15), получаем

$$S(\vec{\eta}) \approx \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f[(t-\lambda_0)/\tau_0] f[(t-\lambda)/\tau] \, dt \right\} \cos(\varphi - \varphi_0) / \sqrt{\tau_0 \tau} = B_0(\vec{\eta}, \vec{\eta}_0), \quad (30)$$

где корреляционная функция $B(\lambda, \tau, \lambda_0, \tau_0)$ поля $R_0(\lambda, \tau)$ определена в (15).

Пусть Π_S — одна из подобластей Π_{ijk} , в которой регулярная составляющая $S(\vec{\eta})$ существенно отлична от нуля [4], а $\Pi_N = \Pi \setminus \Pi_S$ — ее дополнение до области Π . Обозначим $H_S = \sup_{\vec{\eta} \in \Pi_S} R_1^2(\vec{\eta})/2$, $H_N = \sup_{\vec{\eta} \in \Pi_N} R_1^2(\vec{\eta})/2$ — абсолютные максимумы случайного поля $L(\vec{\eta}) = R_1^2(\vec{\eta})/2$ в подобластях Π_S и Π_N соответственно. Согласно (30) при выполнении (17), (18) площадь подобласти Π_N существенно превосходит площадь подобласти Π_S и $S(\vec{\eta}) \approx B(\vec{\eta}, \vec{\eta}_0) \approx 0$ для всех $\vec{\eta} \notin \Pi_S$, так что $H_N \approx \sup_{\vec{\eta} \in \Pi_N} R_0^2(\vec{\eta})/2 \approx \sup_{\vec{\eta} \in \Pi} R_0^2(\vec{\eta})/2$, а величины H_S и H_N можно приближенно считать статистически независимыми. Тогда для вероятности пропуска сигнала имеем

$$\beta \approx P(H_S < h) P(H_N < h) \approx (1 - \alpha) P_S(h), \quad (31)$$

где $P_S(h) = P(H_S < h)$, а α — вероятность ложной тревоги (13), (22).

Будем считать, что отношение сигнал/шум (29) достаточно велико. Тогда в подобласти Π_S координаты $\vec{\eta}$ положения абсолютного максимума функционала $L(\vec{\eta})$ (7) лежат в малой окрестности точки $\vec{\eta}_0$. Кроме того, известно [3,4], что $\vec{\eta} \rightarrow \vec{\eta}_0$, в среднеквадратическом при $z_0 \rightarrow \infty$, так что можно приближенно положить $\sup_{\vec{\eta} \in \Pi_S} L(\vec{\eta}) = \sup_{\vec{\eta} \in \Pi_S} R_1^2(\vec{\eta})/2 \approx R_1^2(\vec{\eta}_0)/2 = L(\vec{\eta}_0)$. Так как $R_1(\vec{\eta}_0)$ гауссовская случайная величина с математическим ожиданием z_0 и единичной дисперсией, то для функции распределения случайной величины $L(\vec{\eta}_0)$ имеем

$$P_S(h) \approx P[L(\vec{\eta}_0) < h] = P[|R_1(\vec{\eta}_0)| < \sqrt{2h}] = \Phi(z_0 + \sqrt{2h}) - \Phi(z_0 - \sqrt{2h}). \quad (32)$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ — интеграл вероятности. Подставляя (32) в (31) для вероятности пропуска сигнала β окончательно получаем

$$\beta \approx (1 - \alpha) [\Phi(z_0 + \sqrt{2h}) - \Phi(z_0 - \sqrt{2h})]. \quad (33)$$

Точность соотношения (33) возрастает с увеличением ξ (24), z_0 и h .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ АЛГОРИТМА ОБНАРУЖЕНИЯ КОЛОКОЛЬНОГО РАДИОИМПУЛЬСА

Формулы для характеристик обнаружения (22) и (33) радиосигнала $s(t)$ (1) получены на основе ряда допущений, которые носят приближенный характер. Оценить аналитически точность этих формул не представляется возможным. Можно лишь утверждать, что она возрастает с увеличением ξ , h и z_0^2 . Поэтому с целью установления границ применимости найденных асимптотически точных формул (22) и (33) было выполнено статистическое моделирование алгоритма обнаружения (8) на ЭВМ. В качестве модели сигнала был выбран радиоимпульс с огибающей колокольной формы $s(t) = a_0 \exp\left\{-\left[\sqrt{\pi/2}(t - \lambda_0)/\tau_0\right]^2\right\} \cos(\omega_0 t - \varphi_0) = a_0 f[(t - \lambda_0)/\tau_0] \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$, где $f(t) = \exp(-\pi t^2/2)$. Предполагалось, что истинные значения времени прихода λ_0 , длительности τ_0 и начальной фазы φ_0 лежат в середине соответствующих априорных интервалов, т.е. $\lambda_0 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2$, $\tau_0 = (T_1 + T_2)/2$, $\varphi_0 = 0$. Исходя из явного выражения для функции $f(t)$, согласно (22) и (33), были найдены выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска радиосигнала

$$\alpha \approx \begin{cases} 1 - \exp\left[\frac{-m_\lambda(1-\kappa)h \exp(-h)}{\sqrt{\pi}}\right], & h \geq 1; \\ 1, & h < 1, \end{cases} \quad \beta \approx (1 - \alpha) [\Phi(z_0 + \sqrt{2h}) - \Phi(z_0 - \sqrt{2h})], \quad (34)$$

где $z_0^2 = 2a_0^2\tau_0/N_0$ — отношение сигнал/шум, $\kappa = T_1/T_2$, а $m_\lambda = (\Lambda_2 - \Lambda_1)/T_1$ — количество элементов разрешения, укладывающихся в априорном интервале возможных значений времени прихода λ_0 сигнала (1) с минимально возможной длительностью.

При выполнении (2) и достаточно большом интервале наблюдения $[0; T]$, для процессов $R_s(\lambda, \tau)$ и $R_c(\lambda, \tau)$ (6) при отсутствии и наличии радиосигнала и $\varphi_0 = 0$ справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} \langle R_s(\lambda, \tau) | H_0 \rangle &= \langle R_c(\lambda, \tau) | H_0 \rangle = 0, \\ \langle R_s(\lambda, \tau) | H_1 \rangle &\approx 0, \quad \langle R_c(\lambda, \tau) | H_1 \rangle \approx z_0 \int_{-\infty}^{\infty} f[(t - \lambda_0)/\tau_0] f[(t - \lambda)/\tau] dt / \sqrt{\tau_0 \tau} = z_0 \hat{S}(\lambda, \tau), \\ \langle [R_c(\lambda_1, \tau_1) - \langle R_c(\lambda_1, \tau_1) \rangle] [R_c(\lambda_2, \tau_2) - \langle R_c(\lambda_2, \tau_2) \rangle] \rangle &\approx \\ \approx \langle [R_s(\lambda_1, \tau_1) - \langle R_s(\lambda_1, \tau_1) \rangle] [R_s(\lambda_2, \tau_2) - \langle R_s(\lambda_2, \tau_2) \rangle] \rangle &\approx \\ \approx \int_{-\infty}^{\infty} f[(t - \lambda_1)/\tau_1] f[(t - \lambda_2)/\tau_2] dt / \sqrt{\tau_1 \tau_2}, & \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \langle [R_s(\lambda_1, \tau_1) - \langle R_s(\lambda_1, \tau_1) \rangle] [R_c(\lambda_2, \tau_2) - \langle R_c(\lambda_2, \tau_2) \rangle] \rangle \approx \\ & \approx \langle [R_c(\lambda_1, \tau_1) - \langle R_c(\lambda_1, \tau_1) \rangle] [R_s(\lambda_2, \tau_2) - \langle R_s(\lambda_2, \tau_2) \rangle] \rangle \approx 0. \end{aligned}$$

где

$$\widehat{S}(\lambda, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f[(t - \lambda_0)/\tau_0] f[(t - \lambda)/\tau] dt / \sqrt{\tau_0 \tau}.$$

Это позволило для сокращения объема вычислений при моделировании алгоритма (8) в отсутствие сигнала вместо процессов $R_s(\lambda, \tau)$ и $R_c(\lambda, \tau)$ (6) использовать процессы

$$N_k(\lambda, \tau) = \sqrt{2} \int_0^T n_k(t) f[(t - \lambda)/\tau] dt / \sqrt{\tau N_0},$$

где $n_k(t)$, $k = 1, 2$ — статистически независимые центрированные гауссовские случайные процессы с корреляционными функциями вида $B_n(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1)$. Корреляционные свойства процессов $N_k(\lambda, \tau)$, $k = 1, 2$ аналогичны (32). При этом решающая статистика (7) радиосигнала формировалась в виде

$$\widehat{M}(\lambda, \tau) = \left\{ N_1^2(\lambda, \tau) + \left[\vartheta z_0 \widehat{S}(\lambda, \tau) + N_2(\lambda, \tau) \right]^2 \right\} / 2, \quad (36)$$

где $\vartheta = 0$ при отсутствии сигнала и $\vartheta = 1$ при его наличии.

В процессе моделирования для различных значений κ , m_λ и z_0 методом скользящего суммирования [8] при наличии и отсутствии сигнала формировались отсчеты функционалов $N_{kij} = N_k(i\Delta_\lambda, j\Delta_\tau)$, $\widehat{S}_{ij} = \widehat{S}(i\Delta_\lambda, j\Delta_\tau)$ (24) с шагом Δ_λ по параметру λ и Δ_τ — по параметру τ , так что среднеквадратическая погрешность такой ступенчатой аппроксимации не превышала 5%. По сформированным отсчетам вырабатывались отсчеты решающей статистики (36).^а $\widehat{M}_{\vartheta ij} = \left\{ N_{1ij}^2 + \left[\vartheta z_0 \widehat{S}_{ij} + N_{2ij} \right]^2 \right\} / 2$, $\vartheta = 0, 1$. При моделировании алгоритма обнаружения наибольший отсчет решающей статистики $\widehat{M}_{\vartheta ij}$, $\vartheta = 0, 1$ сравнивался с заданным порогом h и подсчитывалось относительное число превышений статистикой $\max \widehat{M}_{0ij}$ (для оценки вероятности ложной тревоги) или непревышения статистикой $\max \widehat{M}_{1ij}$ (для оценки вероятности пропуска сигнала) этого порога. При вычислении экспериментальных значений вероятности пропуска сигнала порог h выбирался по критерию Неймана-Пирсона исходя из заданной вероятности ложной тревоги α (34).

Некоторые результаты статистического моделирования и соответствующие теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (34), представлены на рис. 1-2. Каждое экспериментальное значение получено в результате обработки не менее $5 \cdot 10^3$ реализаций решающей статистики $\widehat{M}_{\vartheta ij}$, $\vartheta = 0, 1$ так что с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов вероятностей ложной тревоги, пропуска сигнала и рассеяний оценок времени прихода и длительности отклоняются от экспериментальных значений не более чем на 10...15%.

На рис. 1 значками отмечены экспериментальные значения, а линиями соответствующие теоретические зависимости вероятности ложной тревоги α от порога h при $\kappa = 10^{-2}$ (сплошные линии, крестики и ромбики) и при $\kappa = 10^{-1}$ (штриховые линии, кружочки и квадратики). Кривые 1, крестики и кружочки соответствуют $m_\lambda = 10^4$, а кривые 2, квадратики и ромбики — $m_\lambda = 10^3$. На рис. 2 значками отмечены экспериментальные значения, а линиями соответствующие теоретические зависимости вероятности пропуска сигнала β от отношения сигнал/шум z_0 при $\alpha = 10^{-2}$ (сплошные линии, крестики и квадратики) и при $\alpha = 10^{-3}$ (штриховые линии, кружочки и ромбики). Кривые 1, крестики и кружочки соответствуют $m_\lambda = 10^3$, $\kappa = 10^{-1}$ кривые 2, кружочки и ромбики — $m_\lambda = 10^4$, $\kappa = 10^{-1}$.

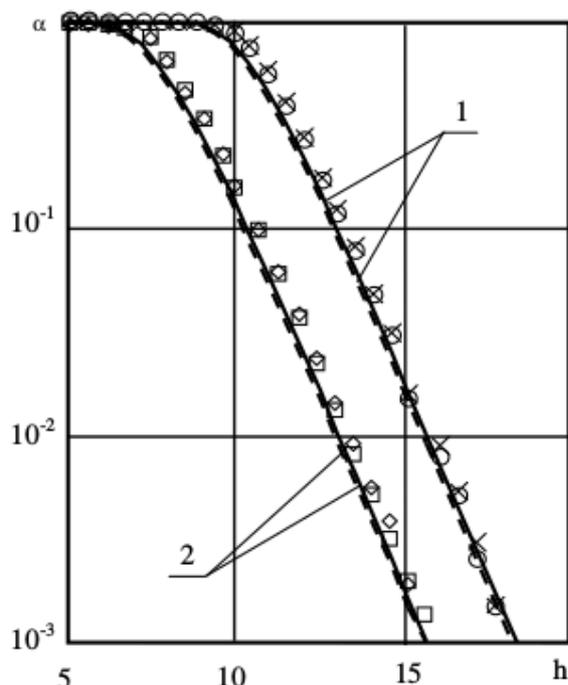


Рис. 1.

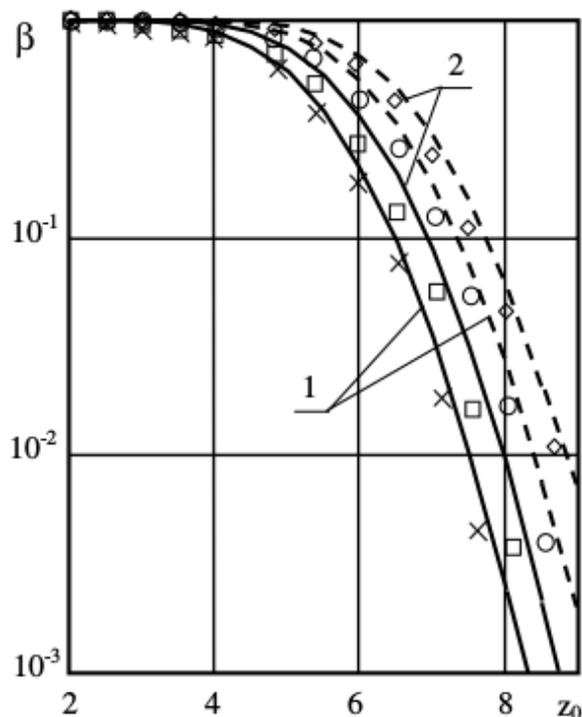


Рис. 2.

Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальных зависимостей асимптотически точными формулами (34) уже при $z_0 \geq 2 \dots 3$ и $\xi = m_\lambda (1 - \kappa) \geq 10^4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов, А. П. Квазиправдоподобное обнаружение сигналов с неизвестными формой и моментами появления и исчезновения / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 4. — С. 43–53.
2. Трифонов, А. П. Квазиправдоподобное обнаружение сигналов с неизвестными амплитудой и длительностью / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, Е. В. Литвинов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 1. — С. 41–49.
3. Куликов, Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М. : Сов. Радио, 1978. — 296 с.
4. Трифонов, А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М. : Радио и связь, 1986. — 264 с.
5. Теория обнаружения сигналов / П. С. Акимов, П. А. Бакут, В. А. Богданович [и др.]; под ред. П. А. Бакута. — М. : Радио и связь, 1984. — 440 с.
6. Трифонов, А. П. Оценка местоположения точечной цели в зоне Френеля приемной антенны / А. П. Трифонов, С. И. Шаратов // Радиотехника и электроника. — 1984. — Т. 29, № 2. — С. 242–249.
7. Питербарг, В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей / В. И. Питербарг. — М. : Изд-во МГУ, 1988. — 175 с.
8. Быков, В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В. В. Быков. — М. : Сов. радио, 1971. — 326 с.

REFERENCES

1. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Quasilikelihood detection of signal with unknown forms and

moments of appearance and disappearance. [Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Kvazipravdopodobное обнаружение сигналов с неизвестными формой и моментами появления и исчезновения]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 4, pp. 43–53.

2. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Linvinov E.V. Quasi likelihood detection of the signal with unknown amplitude and duration. [Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Linvinov E.V. Kvazipravdopodobное обнаружение сигналов с неизвестными амплитудой и длительностью]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 1, pp. 41–49.

3. Kulikov E.I., Trifonov A.P. Parameter estimation of signals in noise. [Kulikov E.I., Trifonov A.P. Ocenka parametrov signalov na fone pomekh]. Moscow: Sov. radio, 1978, 296 p.

4. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. The joint assessment of the distinction between signals and their parameters on the background noise. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ih parametrov na fone pomekh]. Moscow: Radio and communications, 1986, 264 p.

5. Akimov I.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. et. al. Theory of detection of signals. [Akimov I.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. i dr. Teoriya obnaruzheniya signalov]. Moscow: Radio and communications, 1984, 440 p.

6. Trifonov A.P., Sharapov S.I. Evaluation point target position in the receiving antenna Fresnel zone. [Trifonov A.P., Sharapov S.I. Ocenka mestopolojeniya tochechnoi celi v zone Frenelya priemnoi anteny]. *Radiotekhnika i elektronika — Journal of Communications Technology and Electronics*, 1984, vol. 29, no. 2, pp. 242–249.

7. Piterbarg V.I. Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields. [Piterbarg V.I. Asimptoticheskie metody v teorii gaussovskih processov i polei]. Moscow: MSU, 1988, 175 p.

8. Bykov V.V. Numerical simulations in statistical radio. [Bykov V.V. Cifrovое моделирование в статистической радиотехнике]. Moscow: Sov. Radio, 1971, 326 p.

Трифонов Андрей Павлович, доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, зав. каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, профессор кафедры радиотехнических приборов и антенных систем НИУ "МЭИ", г. Москва, Российская Федерация

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

Тел.: +7(473)220-89-16

Trifonov Andrei Pavlovich, Doctor of technical sciences, Professor, Honored Scientist of the Russian Federation, Head of the Department of Radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Professor Department of Radio Engineering Devices and Antenna Systems of National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Russian Federation

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

Tel.: +7(473)220-89-16

Литвинов Евгений Владимирович, кандидат физико-математических наук, ассистент каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: elitvinov@list.ru

Тел.: +7(473)220-89-16

Litvinov Evgenii Vladimirovich, Candidate of physico-mathematical sciences, assistant professor of the Department of radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: elitvinov@list.ru

Tel.: +7(473)220-89-16

*Корчагин Юрий Эдуардович, доктор физико-математических наук, доцент, доцент каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, доцент кафедры радиотехнических приборов и антенных систем НИУ "МЭИ", г. Москва, Российская Федерация
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Тел.: +7(473)220-89-16*

*Korchagin Yurii Eduardovich, Doctor of physico-mathematical sciences, Associate Professor of the Department of radiophysic of Voronezh State University. Voronezh, Associate Professor Department of Radio Engineering Devices and Antenna Systems of National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Russian Federation
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Tel.: +7(473)220-89-16*