УДК 517.9

ОБ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ВЕСОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ МЕТРИКАМИ

С. А. Чехов, Д. А. Фахад

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.03.2015 г.

Аннотация. В весовых анизотропных пространствах Бессова-Никольского изучаются однопараметрические операторные семейства, ранее рассмотренные В. А. Костиным в пространствах функций с равномерными метриками. Показано, что эти семейства образуют сильно непрерывные группы линейных преобразований в рассматриваемых классах пространств. Указываются условия, при которых эти семейства являются сильно непрерывными сжимающими полугруппами и строятся производящие операторы таких групп и полугрупп. Далее, с использованием этих результатов, конструируются сильно непрерывные косинус-функции и новые полугруппы. Это позволяет выделить новые широкие классы дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типа с переменными коэффициентами имеющими особенность, для которых равномерно корректна задача Коши, и получить представления для этих решений.

Ключевые слова: анизотропное пространство, косинус-функции, равномерно корректная задача Коши, сильно непрерывные группы и полугруппы преобразований.

ABOUT ONE-PARAMETRICAL SEMI-GROUPS OF TRANSFORMATIONS IN WEIGHT ANISOTROPIC SPACES OF FUNCTIONS WITH INTEGRATED METRICS

S. A. Chekhov, D. A. Fakhad

Abstract. In weight anisotropic spaces of Bessov-Nikolsky the one-parametrical operator families are studied which are earlier considered by V. A. Kostin in the spaces of functions with uniform metrics. It is shown that these families form strongly continuous groups of linear transformations in the considered classes of spaces. Conditions under which these families are strongly continuous squeezing semi-groups are specified and the making operators of such groups and semi-groups are under construction. Further, using these results, strongly continuous cosine function and new semi-groups are designed. It allows to allocate new wide classes of the differential equations of parabolic and hyperbolic type with the variable coefficients having feature for which Cauchy problem is evenly correct and to receive representations for these decisions.

Keywords: anisotropic space, cosine function, evenly correct Cauchy problem, strongly continuous groups and semi-groups of transformations.

Пусть функция $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ определена на параллелепипеде $\Pi^n = \{x_m : x_m \in (\alpha_m, \beta_m) \subseteq R^1 = (-\infty, \infty)\}$ и функции $h_m(x_m)$ такие, что

$$h_m(\alpha_m) = -\infty, \quad h_m(\beta_m) = \infty, \quad h_m(x_m) > 0; \tag{1}$$

В [4] введены однопараметрические семейства линейных преобразований $U_{h,r}(t)\,, t\in R^1$, заданных соотношением

$$U_{h,r}(t)=\varphi\{h_1^{-1}[h_1(x_1)+t],\dots h_r^{-1}[h_r(x_r+t)],h_{r+1}^{-1}[h_{r+1}(x)-t],\dots,h_n^{-1}[h_n(x_n)-t]\}. \qquad (2)$$

Показано, что операторное семейство (2) является сильно непрерывной группой преобразований, а при $t\geqslant 0$ — сильно непрерывной сжимающей полугруппой класса C_0 в весовых анизотропных функциональных пространствах с равномерной метрикой. Такие полугруппы мы называем полугруппами сдвигов с деформациями.

В настоящей заметке операторные семейства (1) исследуются в весовых пространствах $L_{\bar p,\bar\rho,r}(\Pi^n)$ измеримых на Π^n функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\bar p,\bar\rho,r}=[\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n}\rho_n^-(x_n)[\dots\int\limits_{\alpha_{r+1}}^{\beta_{r+1}}\rho_{r+1}^-(x_{r+1})[\int\limits_{\alpha_r}^{\beta_r}\rho_r^+(x_r)[\int\limits_{\alpha_{r-1}}^{\beta_{r-1}}\rho_{r-1}^+(x_{r-1})\dots$$

$$\dots[\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2}\rho_2^+(x_2)[\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}\rho_1^+(x_1)|\varphi(x_1,\dots,x_n)|^{p_1}dx_1]^{\frac{p_2}{p_1}}\dots]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dx_n]^{\frac{1}{p_n}}, \qquad (3)$$

здесь

$$\rho_i^+(x_i)=e^{\omega_i h_i(x_i)}g_i(x_i)\,h_i'(x_i)\,,\quad i=1\dots r,$$

$$g_i(x_i)>0,\quad g_i'(x_i)>0,\quad \omega_i>0;$$

$$\rho_i^-(x_i)=\frac{1}{\rho_i^+(x_i)},\quad \bar p=(p_1,\dots,p_n)\,,\quad 1\leqslant p_i<\infty,$$

$$\bar\rho=\left(\rho^+,\rho^-\right)=\left(\rho_1^+,\dots,\rho_r^+,\rho_{r+1}^-,\dots,\rho_n^-\right)$$

В случае $\bar p=(1,\dots,1)$ функциональные пространства с такими нормами изучались в работах Бенедека и Панцоне (Benedek A. and Panzone R.) [2], а также Бесова О.В., Ильина В.П., Никольского С.М. (см.[1]), и обозначались $L_{\bar p}(G)$, где $G\subset R^n$ — измеримое, не обязательно ограниченное множество.

Такие пространства будем называть $L_{\bar p}(G)$ — анизотропными, а $L_{\bar p,\bar\rho,r}(\Pi^n)$ — весовыми анизотропными пространствами.

Здесь доказывается следующая

Теорема 0.1. Операторное семейство (2) является сильно непрерывной сжимающей полугруппой в пространствах $L_{\bar p,\bar\rho,r}(\Pi^n)$ с оценкой

$$\|U_{h,r}(t)\|_{\bar p,\bar\rho,r}\leqslant exp\left(-\sum_{i=1}^n\frac{\omega_i}{p_i}\right)t. \qquad (4)$$

и производящим оператором

$$\mathfrak{D}_{h,r}\varphi=\sum_{i=1}^r\frac{\partial\varphi}{\partial h_i}-\sum_{i=r+1}^n\frac{\partial\varphi}{\partial h_i},\quad \mathfrak{D}_{h,r}\varphi\in L_{\bar p,\bar\rho,r}(\Pi^n)\,,\quad \varphi\in L_{\bar p,\bar\rho,r}(\Pi^n) \qquad (5)$$

1. СЛУЧАЙ R^1

Докажем теорему 0.1 сначала для $n=1$. В этом случае функции $h(x)$ и $g(x)$ определены на интервале $x\in(\alpha,\beta)\subseteq R^1$ и удовлетворяют условиям

$$h(\alpha)=-\infty,\quad h(\beta)=\infty,\quad h'(x)>0; \qquad (1.1)$$

$$g\left(x\right)>0,\quad g^{'}\left(x\right)>0.$$

Весовая функция имеет вид

$$\rho^{+}\left(x\right)=e^{\omega h(x)}g\left(x\right)h^{'}\left(x\right) \tag{1.2}.$$

Операторное семейство $U_h(t)$ запишем в виде

$$U_h^{+}\left(t\right)\varphi\left(x\right)=\varphi\left[h^{-1}\left(h(x)+t\right)\right]. \tag{1.3}$$

и рассматривается в пространствах $L_{p,\rho^{+}}$ с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\rho^{+}}=\left[\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^{+}(x)\mid\varphi(x)\mid^{p}dx\right]^{\frac{1}{p}},\quad p\in[0,\infty). \tag{1.4}$$

Покажем, что справедливо следующее

Утверждение 1.1. Операторное семейство (1.3) является группой линейных преобразований по $t\in R^{1}$ в пространствах $L_{p,\rho^{+}}$ с оценкой

$$\|U_h^{+}\left(t\right)\|_{p,\rho^{+}}=exp\left(-\frac{\omega t}{p}\right) \tag{1.5}$$

Действительно, замена $h^{-1}\left[h\left(x\right)+t\right]=\tau$ в соотношении

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^{+}\left(x\right)\mid U_h^{+}\left(t\right)\varphi\left(x\right)\mid^{p}dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{\omega h(x)}g\left(x\right)h^{'}\left(x\right)\mid\varphi\left[h^{-1}\left(h\left(x\right)+t\right)\right]\mid^{p}dx$$

приводит к равенству

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^{+}\left(x\right)\mid U_h^{+}\left(t\right)\varphi\left(x\right)\mid^{p}dx=e^{-\omega t}\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{\omega h(\tau)}g\left(\tau-t\right)\mid\varphi\left(\tau\right)\mid^{p}h^{'}\left(t\right)d\tau.$$

Отсюда, в силу монотонного возрастания g(x), следует оценка

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^{+}(x)\mid U_h\left(t\right)\varphi(x)\mid^{p}dx\leqslant e^{-\omega t}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^{+}\left(\tau\right)\mid\varphi\left(\tau\right)\mid^{p}d\tau$$

из которой следует (1.5).

Замечание 1.1. Из хода доказательства оценки (1.5) видно, что если $g(x)=const$, то неравенство переходит в равенство.

Групповое свойство $U_h^{+}\left(t+s\right)=U_h^{+}\left(t\right)U_h^{+}\left(s\right)$ при $t,s\in R$ нетрудно проверить простыми вычислениями.

Из приведенного утверждения следует

Теорема 1.1. При $\omega>0$ и $t\geqslant0$ семейство $U_h^{+}\left(t\right)$ является сильно непрерывной сжимающей полугруппой в пространствах $L_{p,\rho^{+}}$ с оценкой (1.5) и производящим оператором $\mathfrak{D}_n^{+}=\frac{d}{dh}$ с областью определения $\mathfrak{D}\left(\mathfrak{D}_h^{+}\right)=\left\{\varphi:\varphi\in L_{p,\rho^{+}},\frac{d\varphi}{dh}\in L_{p,\rho^{+}}\right\}.$

Доказательство. Так как условие $U_h^+(0)\varphi(x)=\varphi$ очевидно, то для сильной непрерывности $U_h^+(t)$ в нуле $\varphi\in L_{p,\rho^+}$ оценим:

$$\|U_h^+\varphi(x)-\varphi(x)\|_{p,\rho^+}^p=\int\limits_\alpha^\beta e^{\omega h(x)}h'(x)g(x)\mid\varphi\left[h(x)+t\right]-\varphi[h^{-1}(h(x))]\mid^p dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\omega\tau}g\left[h^{-1}(\tau)\right]\varphi[h^{-1}(\tau+t)]-\varphi[h^{-1}(\tau)\mid^p d\tau=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\omega\tau}g(\tau)\mid U(t+\tau)-U(\tau)\mid^p dt=I(t),\quad(1.6)$$

здесь $\tau=h^{-1}(x)$, $\widetilde{g}(\tau)=g\left[h^{-1}(\tau)\right]$.

Отсюда, в силу непрерывности в целом норм L_p с весом, заключаем, что $I(t)\to0$ при $t\to0_+$, что и доказывает сильную непрерывность полугруппы $U_n^+(t)$.

Аналогично для операторных семейств

$$U_h^-(t)\varphi(x)=\varphi\left[h^{-1}\left[h(x]-t\right)\right],\quad t\in R^1;\quad(1.7)$$

рассмотренных в пространствах L_{p,ρ^-}^- с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\rho^-}=\left[\int\limits_\alpha^\beta p^{-1}(x)\mid\varphi(x)\mid^p dx\right]^{\frac{1}{p}},\quad p\geqslant1,\quad(1.8)$$

где

$$p^-(x)=\frac{1}{g(x)}e^{-\omega h(x)}h'(x).\quad(1.9)$$

Справедливо

Утверждение 1.2. Операторное семейство (1.7) является группой преобразований с оценкой

$$\|\,U_h^-(t)\,\|_{p,\rho^-}\leqslant exp\left(-\frac{\omega t}{p}\right).\quad(1.10)$$

Если $g(x)=const$, то (1.10) переходит в равенство.

Аналогично теореме 1.1 доказывается

Теорема 1.2. При $\omega>0, t\geqslant0$ семейство $U_h^-(t)$ является сильно непрерывной сжимающей полугруппой в пространствах L_{p,ρ^-} с оценкой (1.10) и производящим оператором $\mathfrak{D}_h^-=\frac{d}{dx}$ с областью определения $\mathfrak{D}\left(\mathfrak{D}_h^-\right)=\left\{\varphi\in L_{p,\rho^-},\frac{d\varphi}{dh}\in L_{p,\rho^-}\right\}$.

Из полученных утверждением и [3] стр. 258 следует, что полугруппа $U_h^+(t)\left(U_h^-(t)\right)$ имеют производящиее операторы:

$$\mathfrak{D}_h^+\varphi(x)=\frac{d}{dt}U_h^+(t)\varphi(x)\mid_{t\to0^+}=\frac{d\varphi(x)}{dh(x)}=\frac{1}{h'(x)}\frac{d\varphi}{dx}$$

$$\mathfrak{D}_h^-\varphi(x)=\frac{d}{dt}U_h^-(t)\varphi(x)\mid_{t=0^+}=-\frac{d\varphi(x)}{dh(x)}=-\frac{1}{h'(x)}\frac{d\varphi}{dx}$$

с областями определения

$$\mathfrak{D}_h^\pm\varphi(x)=\left\{\varphi(x):\varphi\in L_{p,\rho^\pm}\pm\frac{1}{h'(x)}\frac{d\varphi}{dx}\in L_{p,\rho^\pm}\right\}$$

и для оператора $\mp D_h^{\pm}$ определены отрицательные дробные степени

$$(\mathfrak{D}_h)^{-\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}U_h^{\pm}(t)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\varphi\left[h^{-1}\left[h(x)+t\right]\right]dt = \int_{\tau}^{\infty}\left[h(x)-h(x)\right]^{\alpha-1}h'(x)\,\varphi(x)d\tau.$$

2. СЛУЧАЙ R^n

Для доказательства теоремы 0.1 запишем нормы (3) в виде

$$\|\varphi\|_{\bar{p},\bar{\rho},r} = \|\ldots\|\|\varphi\|_{p_1,\rho_1^+}\|\ldots\|\|\varphi\|_{p_2,\rho_2^+}\|\ldots\|\|\varphi\|_{p_n,\rho_n^-} = \|\Phi(x)\,\varphi(x)\,\|_{L_{\bar{p}}}(\Pi^n)\,, \tag{2.1}$$

где

$$\Phi(x) = \prod_{i=1}^{r}\left(\rho_i^+(x_i)\right)^{\frac{p_1}{p_i}}\prod_{i=r+1}^{n}\left(\rho_i^-(x_i)\right)^{\frac{p_1}{P_i}}. \tag{2.2}$$

Далее отметим следующие свойства пространств $L_{\bar{p},\bar{\rho},r}$.

Пространства $L_{\bar{p},\bar{\rho},r}$ являются банаховыми. То есть справедливы следующие свойства

1) $\|\varphi\|_{\bar{p},\bar{\rho},r} = 0$ эквивалентно $\varphi(x) = 0$ почти для всех $x \in \Pi^n$.

2) $\|c\varphi\|_{\bar{p},\bar{\rho},r} = |c|\|\varphi\|_{\bar{p},\bar{\rho},r}$.

3) $\|\varphi_1+\varphi_2\|_{\bar{p},\bar{\rho},r} \leqslant \|\varphi_1\|_{\bar{p},\bar{\rho},r} + \|\varphi_2\|_{\bar{p},\bar{\rho},r}$.

Свойства 1) и 2) очевидны, а свойство 3) следует из аналогичного неравенства для норм $L_{\bar{p}}(G)$ ([1] стр. 10), примененного к функциям $f_1(x) = \Phi(x)\varphi_1(x)$ и $f_2(x) = \Phi(x)\varphi_2(x)$.

4) Пространства $L_{\bar{p},\bar{\rho},r}(\Pi^n)$ являются полными, то есть из того, что $\varphi_k \in L_{\bar{p},\bar{\rho},r}(\Pi^n)\,, k = 1{,}2,\ldots, \|\varphi_k-\varphi_l\|_{\bar{p},\bar{\rho},r} \to 0\,(k,l\to\infty)$, следует существование $\varphi \in L_{\bar{p},\bar{\rho},r}(\Pi^n)$ и $\|\varphi_k-\varphi\|_{\bar{p},\bar{\rho},r} \to 0$.

Доказательство следует из аналогичных свойств норм $L_{\bar{p}}(G) = L_{\bar{p}}(\Pi^n)$, примененных к функциям $f_k(x) = \Phi(x)\,\varphi_k$.

5) Функция $f \in L_{\bar{p},\bar{\rho},r}(G)$ является непрерывной в целом, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\|f(x+y)-f(x)\|_{\bar{p},\bar{\rho},r} < \varepsilon$.

Доказательство следует из аналогичного свойства для функции $f(x) = \Phi(x)\,\varphi(x)$ из пространства $L_{\bar{p}}(G)$ ([1] стр. 14) .

Утверждение 2.1. Операторное семейство (2) удовлетворяет оценке (4).

Доказательство следует из соотношения (3), примененного к $U_{h,r}(t)$ вида (2) и замен

$$h_i^{-1}\left[h_i(x_i)+t\right] = \tau_i, \quad i = 1,\ldots,r;$$

$$h_i^{-1}\left[h_i(x_i)-t\right] = \tau_i, \quad i = r+1,\ldots,n,$$

произведенных во внутренних интегралах равенства (2.1)

Групповое свойство $U_{h,r}(t+s) = U_{h,r}(t)\,U_{h,r}(s)$ устанавливается очевидными вычислениями.

Для доказательства сильной непрерывности $U_{h,r}(t)$ при $t = 0$ имеем

$$\|U_{h,r}(t)\varphi(x) - \varphi(x)\|_{\bar{p},\bar{\rho},r} = [\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} \rho_n^-(x_n)[\ldots \int\limits_{\alpha_{r+1}}^{\beta_{r+1}} \rho_{r+1}^-(x_{r+1})[\int\limits_{\alpha_r}^{\beta_r} \rho_r^+(x_{r-1})\ldots$$

$$\ldots[\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \rho_1^+(x_1) \mid \varphi[h_1^{-1}[h_1(x_1)+t], \ldots, h_r^{-1}[h_r(x_r)+t], h_{r+1}^{-1}[h_{r+1}(x_{r+1})-t], \ldots$$

$$\ldots, h_n^{-1}[h_n(x_n)-t]] - \varphi(x_1,\ldots,x_n)) \mid^{p_1} dx_1]^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n]^{\frac{1}{p_n}}]. \quad (2.3)$$

Делая замены $s_i = h_i(x_i)$ в каждом из интегралов соотношения (2.3) и применяя очевидные неравенства, получаем оценку

$$\|U_{h,r}(t)\varphi(x) - \varphi(x)\|_{\bar{p},\bar{\rho},z} \leqslant$$

$$\leqslant [\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_n^-(s_n)[\ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_{r+1}^-(s_{r+1})[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_r^+(s_{r-1})\ldots[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_2^+(s_2)[\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\rho_1^+(s_1) \mid U[(s_1+t),(s_2+t),\ldots$$

$$\ldots,(s_n+t)] - U(s_1,s_2,\ldots,s_n) \mid^{p_1} ds_1]^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} ds_n]^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$= \|\Phi(s) \mid U(t+s) - U(s) \mid \|_{L_{\bar{p}(R^n)}}. \quad (2.4)$$

Последнее выражение в равенстве (2.4) стремится к нулю, в силу непрерывности в целом норм $L_{\bar{p}}(G)$.

Отсюда следует доказательство теоремы 0.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — М.: Наука, 1975. — 480 с.

2. Benedek, A. The space L^p, with mixed norm / A. Benedek, R. Panzone // Duke Math. J. — 1961. — V. 28, no. 3. — P. 301–324.

3. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — Киев: Высшая школа, 1989. — 347 с.

4. Костин, В. А. О полугруппах сдвигов и деформаций в анизотропных пространствах функций с равномерной метрикой / В. А. Костин, Д. В. Костин, А. В. Костин // Доклады Академии Наук. — 2014. — Т. 459, № 1 — С. 14–16.

5. Баев, А. Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

6. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. — М.: Наука, 1968. — 471 с.

7. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

8. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. — М.: Наука, 1976. — 499 с.

9. Костин, В. А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка / В. А. Костин, М. Н. Небольсина // Доклады Академии Наук. — 2009. — Т. 428, № 1. — С. 20–22.

10. Костин, В. А. О коэрцитивности систем C_0–операторных многочленов / В. А. Костин, М. В. Муковнин, М. Х. Гим // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 150–159.

11. Костин, В. А. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // Доклады Академии наук. — 2013. — Т. 452, № 4. — С. 367–370.

12. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

13. Маслов, В. П. Операторные методы / В. П. Маслов. — М.: Наука, 1973. — 544 с.

14. Небольсина, М. Н. Об одной задаче фильтрации в пористой среде / М. Н. Небольсина, С. Х. М. Аль Кхазраджи // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 129–135.

15. Орлов, В. П. Сильные априорные оценки решений неоднородной начально-краевой задачи одной модели вязкоупругой среды / В. П. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 190–197.

16. Соболев, С. Л. Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. — М.: Наука, 1974. — 808 с.

17. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

18. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

19. Баев, А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

20. Баев, А. Д. Теоремы о “следах” для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 63–75.

REFERENCES

1. Besov O.V., Il’in V.P., Nikol’skii S.M. Integral representation of functions and embedding theorems. [Besov O.V., Il’in V.P., Nikol’skii S.M. Integral’nye predstavleniya funkcij i teoremy vlozheniya]. Moscow: Nauka, 1975, 480 p.

2. Benedek A., Panzone R. The space L^p, with mixed norm. Duke Math. J., 1961, vol. 28, no. 3, pp. 301–324.

3. Goldstein J. Semigroups of Linear Operators and Applications. [Goldstein J. Polugruppy lineinykh operatorov i ikh prilozheniya]. Kiev: High school, 1989, 348 p.

4. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. On Shifts and Deformations Semigroups in Anisotropic Spaces of Functions with the Uniform Metric. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. O polugruppakh sdvigov i deformacij v anizotropnykh prostranstvakh funkcij s ravnomernoj metrikoj]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 459, no. 1, pp. 14–16.

5. Baev A.D., Buneev S.S. Apriori estimates of solutions one of boundary value problem in the band for degenerate elliptic equation of high order are obtained. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka reshenij odnoj kraevoj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya e’llipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 81–92.

6. Evgrafov M.A. Analytic functions. [Evgrafov M.A. Analiticheskie funkcii]. Moscow: Nauka, 1968, 471 p.

7. Iosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional’nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

8. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustylnik E.I., Sobolevskii P.E. Integral operators in spaces of summable functions. [Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskij P.E. Integral'nye operatory v prostransvax summiruemyx funkcij]. Moscow: Nauka, 1976, 499 p.

9. Kostin V.A., Nebol'sina M.N. Well-Posedness of Boundary Value Problems for a Second-Order Equation. [Kostin V.A., Nebol'sina M.N. O korrektnoj razreshimosti kraevyx zadach dlya uravneniya vtorogo poryadka]. *Doklady Akademii Nauk — Doklady Mathematics*, 2009, vol. 428, no. 1, pp. 20–22.

10. Kostin V.A., Mukovnin M.V., Geem M.H. Coercivity of systems C_0–operator polynomials. [Kostin V.A., Mukovnin M.V., Geem M.H. O koercitivnosti sistem C_0–operatornykh mnogochlenov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 150–159.

11. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Maslov-Heaviside operator method and Duhamel C_0–operator integral. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Operatornyj metod Maslova-Xevisajda and C_0–operatornyj integral Dyuamelya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2013, vol. 452, no. 4, pp. 367–370.

12. Krejn S.G. Linear Differential Equations in Banach Spaces. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

13. Maslov V.P. Operator methods. [Maslov V.P. Operatornye metody]. Moscow, Nauka, 1973, 544 p.

14. Nebolsina M.N., Al Khazraji About one problem of a filtration in the porous environment. [Nebolsina M.N., Al Khazraji Ob odnoj zadache v poristoj srede]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 129–135.

15. Orlov V.P. Strong apriori estimates of solutions inhomogeneous initial boundary value problem one model of viscoelastic medium. [Orlov V.P. Sil'nye apriornye ocenki reshenij neodnorodnoj nachal'no-kraevoj zadachi odnoj modeli vyazkouprugoj sredy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 190–197.

16. Sobolev S.L. Introduction to the Theory of Cubature Formulas. [Sobolev S.L. Vvedenie v teoriyu kubaturnyx formul]. Moscow: Nauka, 1974, 808 p.

17. Baev A. D., Kobylinskii P. A., Davidova M. B. On the Properties of Switching a Class of Degenerate Pseudo-Differential Operators with the Operators Of Differentiation. [Baev A. D., Kobylinskij P. A., Davydova M. B. O svojstvax kommutacii odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov s operatorami differencirovaniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 102–108.

18. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

19. Baev A. D., Kovalevsky R. A. Theorems on boundedness and composition for a class of weighted pseudodifferential operators. [Baev A. D., Kovalevskij R. A. Teoremy ob ogranichennosti i kompozicii dlya odnogo klassa vesovyx psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 39–49.

20. Baev A. D., Kovalevsky R. A., Davidova M. B.. [Theorems about the «trecas» for a class of pseudodifferential operators with degeneracy]. *Baev A. D., Kovalevskij R. A., Davydova M.*

B. Teoremy o “sledax” dlya odnogo klassa psevdodifferencial’nyx operatorov s vyrozhdeniem — Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika, Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2015, no. 2, pp. 63–75

Чехов С.А., аспирант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: chekhovsergey@rambler.ru
Тел.: 8–908–144–97–82

Chekhov S.A., graduate student, Departament of Mathematical Modeling, Departament of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: chekhovsergey@rambler.ru
Tel.: 8–908–144–97–82

Фахад Д.А., аспирант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация

Fakhad D.A., graduate student, Departament of Mathematical Modeling, Departament of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation