УДК 517.9

# О СПЕКТРАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

**В. В. Тихомиров, О. Н. Бобылева**

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*

Поступила в редакцию 09.03.2015 г.

**Аннотация**. В работе рассматривается обратная задача для уравнения теплопроводности. Некорректность аналогичной задачи Коши для уравнения Лапласа отмечалась еще Ж. Адамаром. Предложен метод регуляризации решения обратной задачи для уравнения теплопроводности. Регуляризованное уравнение получается за счет введения в уравнение теплопроводности биквадратного лапласиана с коэффициентом, равным параметру регуляризации. Показано, что если решение исходной задачи существует, то разность между спектральными разложениями исходного и регуляризованного решений стремится к нулю при стремлении параметра регуляризации к нулю в пространстве функций, суммируемых с квадратом. Получена оценка этой величины в классе гладких функций.

**Ключевые слова**: уравнение теплопроводности, обратная задача, регуляризованное решение.

# SPECTRAL METHODS FOR SOLVING INVERSE CAUCHY PROBLEM FOR HEAT EQUATION

**V. V. Tikhomirov, O. N. Bobyleva**

**Abstract**. The paper deals with an inverse problem for the heat equation. Incorrectness similar to the Cauchy problem for the Laplace equation has noted J. Hadamard. A regularization method for solving the inverse problem for the heat equation. Regularized equation is obtained by introducing a biquad Laplace equation of thermal conductivity with a coefficient equal to the parameter of regularization. It is shown that if the solution of the original problem exists, the difference between the spectral decomposition of the source and the regularized solutions tends to zero when the regularization parameter tends to zero in the space of functions square integrable. An estimate of this value in the class of smooth functions.

**Keywords**: heat equation, inverse problem, regularized solution.

## ВВЕДЕНИЕ

В классическом труде И. Ньютона «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» были разработаны математические методы, позволяющие не только объяснять физические явления, но и предсказывать их.

После появления этой монографии сложилось убеждение, что все физические проблемы, записанные в математической форме, могут быть решены путем прямых вычислений.

Двумя столетиями позже стало ясно, что существуют проблемы, решение которых прямыми математическими методами встречает серьезные затруднения.

В 1917 г. Жак Адамар, выступая в Цюрихе на конгрессе Швейцарского математического общества, утверждал, что граничная задача для дифференциального уравнения с частными производными правильно поставлена, если решение этой задачи существует и является единственным (см. [1]) В качестве неправильно (некорректно) поставленной задачи он привел свой знаменитый пример задачи Коши для уравнения Лапласа (см. [6], [11]): решение может не существовать даже для сколь угодно гладких граничных данных. Как следствие, в случае, когда это решение существует, оно не может непрерывно зависеть от граничных данных, в то время как решение каждой правильно поставленной физической задачи должно непрерывно зависеть от результатов измерений. (см. [3], [8], [13])

**1.** Рассмотрим обратную задачу для уравнения теплопроводности в ограниченной области $\Omega$ пространства $\mathbb{R}^n$. Для этого в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \;=\; \Delta u(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t < 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) \;=\; \varphi(x), \quad x \in \Omega \tag{2}$$

и однородным граничным условием первого или второго рода. При этом решение $u(x,t)$ предполагается по переменным $(x,t)$ непрерывным в замкнутой области и два раза непрерывно дифференцируемым по $x$ в самой области $\Omega \times (-T < t < 0)$, а по переменной $t$ непрерывно дифференцируемым один раз. Начальная функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять тем же условиям по переменной $x$ в области $\Omega$.

Пусть $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа, удовлетворяющих уравнению

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v_k(x), \quad x \in \Omega$$

и соответствующим однородным граничным условием первого или второго рода. Обратная задача состоит в нахождении по заданной начальной функции $\varphi(x)$ функции температурной предыстории, т.е. функции $u(x,-T)$.

Тогда формальное решение задачи (1) – (2) имеет вид (см. [6])

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \, e^{-\lambda_k t} v_k(x),$$

где $\varphi_k = (\varphi, v_k)$ (коэффициенты Фурье).

Как указывалось во введении, эта задача является некорректно поставленной. Поэтому для решения этой задачи мы применим метод регуляризации. Основная идея метода регуляризации заключается в подходящей замене уравнения путем введения малого параметра $\alpha$ (т.е. за счет увеличения гладкости решения). С этой целью рассмотрим для малых значений параметра $\alpha > 0$ следующее регуляризованное уравнение:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \;=\; \Delta u(x,t) \;+\; \alpha \Delta^2 u(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t < 0. \tag{3}$$

Регуляризированная задача уже является корректно поставленной для любого $\alpha > 0$. Следовательно, для любого $\alpha > 0$ решение $u_\alpha$ этой задачи может быть найдено с использованием стандартных вычислительных процедур. Вопрос заключается в том, насколько $u_\alpha$ отличается от точного решения. Для ответа на этот вопрос следует рассмотреть два случая.

Если точное решение исходной задачи существует, то регуляризованное решение $u_\alpha$ для подходящего $\alpha > 0$ представляет собой приемлемую аппроксимацию точного решения.

Если исходная задача не имеет решения (возможно, из-за неточных граничных или начальных данных), то $u_\alpha$ аппроксимирует функцию, которая могла бы быть решением в случае уточнения граничных или начальных данных путем их малого изменения.

В обоих случаях $u_\alpha$ может дать полезную информацию о физических явлениях, математические модели которых изучаются (см. [6]).

Решение уравнения (3) можно представить а следующем виде (с помощью ряда Фурье):

$$u_\alpha(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi, v_k)\, e^{(\alpha\lambda_k^2-\lambda_k)t} v_k(x).$$

Следовательно, в силу равенства Парсеваля

$$\int\limits_{\Omega} |u_\alpha(x,t)-u(x,t)|^2\, dx \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k|t|} \left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2\,|t|}\right]^2.$$

При определенных условиях можно ожидать выполнения равенства

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{\Omega} |u_\alpha(x,t)-u(x,t)|^2\, dx \ = \ 0. \tag{4}$$

Требуется доказать справедливость равенства (4) для функций $\varphi$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} < \ +\infty \tag{5}$$

при некотором значении $-T \leqslant t < 0$ (см. [2]).

**Доказательство.** Фиксируем $-T \leqslant t < 0$ , тогда предполагаем, что условие (5) выполняется. По теореме Вейерштрасса

$$|(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k|t|} \left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2\, t}\right]^2 \leqslant |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T}.$$

Ясно, что

$$0 \leqslant \left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2\,|t|}\right]^2 < \left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2\, T}\right]^2 < 1$$

и получаем справедливость неравенства (5).

Теперь рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k|t|} \left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2\,|t|}\right]^2 = \sum_{k=1}^{N} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k|t|} \left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2\,|t|}\right]^2 +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k|t|} \left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2\,|t|}\right]^2. \tag{6}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ мы выберем число $N$ так, чтобы при $n > N$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k|t|} \left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2\,|t|}\right]^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку по абсолютной величине вторая сумма будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$ , и функция сходится равномерно по $\alpha$ и по $t$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k^2\,|t|}\right]^2 < \sum_{k=1}^{N} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k^2\,|t|}\right]^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

А для первой суммы в (6) того же можно добиться за счет малости параметра $\alpha$ ($\alpha \to 0$), так как число слагаемых в этой сумме равно $N$ и потому вся сумма стремится к нулю при $\alpha \to 0$. Таким образом

$$\varlimsup_{\alpha\to +0} \int\limits_{\Omega} |u_\alpha(x,t) - u(x,t)|^2\, dx \ \leqslant \sum_{k=1}^{N} \varlimsup_{\alpha\to +0} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k |t|} \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k^2\,|t|}\right]^2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ и сумма равна 0 при $\alpha \to +0$.

Так как

$$0 \leqslant \varliminf_{\alpha\to 0+0} \int\limits_{\Omega} |u_\alpha(x,t) - u(x,t)|^2\, dx \ \leqslant \varlimsup_{\alpha\to 0+0} \int\limits_{\Omega} |u_\alpha(x,t) - u(x,t)|^2\, dx \ < \varepsilon,$$

то, если решение задачи (1) – (3) существует, и при определенных условиях можно ожидать выполнения равенства

$$\lim_{\alpha\to +0} \int\limits_{\Omega} |u_\alpha(x,t) - u(x,t)|^2\, dx \ = \ 0.$$

Справедливость равенства (4) доказана.

**2.** Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область и пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{v_k(x)\}$ собственные значения и собственные функции следующей краевой задачи:

$$-\ \Delta v_k(x) \ = \ \lambda_k v_k(x), \ x \in \Omega, \quad v_k|_{\partial\Omega} = 0.$$

Рассмотрим для $T > 0$ уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} \ = \ \Delta u, \ u \in \Omega, \ -T \leqslant t < 0, \tag{7}$$

с начальным и граничным условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{8}$$

Решение

$$u(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) e^{-\lambda_k t} v_k(x). \tag{9}$$

Регуляризованное решение имеет вид

$$u_\alpha(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) e^{-\lambda_k t + \alpha\lambda_k^2 t} v_k(x). \tag{10}$$

Задача состоит в том, чтобы оценить при $-T \leqslant t \leqslant 0$ следующие суммы:

$$R_\alpha(x,t,\varphi) \ \equiv \ u(x,t) - u_\alpha(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) e^{-\lambda_k t} \left[1 - e^{\alpha\lambda_k^2 t}\right] v_k(x). \tag{11}$$

Можем переписать (11) в следующем виде:

$$R_\alpha(x,t,\varphi) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,v_k)e^{\lambda_k T}e^{-(T+t)\lambda_k}\left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2 t}\right]v_k(x). \tag{12}$$

Предположим, что решение $u(x,t)$ существует для $-T \leqslant t \leqslant 0$ и положим

$$f(x) \;=\; u(x,-T).$$

Таким образом, в соответствии с (9),

$$(f,v_k) \;=\; (\varphi,v_k)e^{\lambda_k T}.$$

Предположим, что $f \in W_2^{l,0}(\Omega)$, т.е. $f \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$ и $f(x)=0$ для $x \notin \Omega$. Хорошо известно (В.А.Ильин [4, 5]), что

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f,v_k)|^2\;\lambda_k^l \;\leqslant\; \mathrm{const}\;\|f\|^2_{W_2^l}. \tag{13}$$

Таким образом, если $f \in W_2^{l,0}(\Omega)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi,v_k)|^2\,e^{2\lambda_k T}\lambda_k^l \;\leqslant\; C\|f\|^2_{W_2^l}. \tag{14}$$

Следовательно, что при $t=-T$

$$R_\alpha(x,-T,\varphi) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,v_k)e^{\lambda_k T}\left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2 T}\right]v_k(x). \tag{15}$$

Таким образом, в силу равенство Парсеваля,

$$\|R_\alpha(x,-T,\varphi)\|^2 \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi,v_k)|^2e^{2\lambda_k T}\left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2 T}\right]^2. \tag{16}$$

Понятно, что для любого $\tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1$,

$$1-e^{-\alpha\lambda_k^2 T} \;\leqslant C_\tau(\alpha\lambda_k^2 T)^\tau.$$

Таким образом,

$$\|R_\alpha(x,-T,\varphi)\|^2 \;\leqslant\; C^2\alpha^{2\tau}\;\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi,v_k)|^2e^{2\lambda_k T}\lambda_k^{4\tau}, \tag{17}$$

и, согласно (14),

$$\|R_\alpha(x,-T,\varphi)\| \;\leqslant\; C\alpha^\tau\;\|f\|_{W_2^{4\tau}}. \tag{18}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть* $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. *Если* $u(x,-T) \in W_2^{4\tau,0}(\Omega)$, *то существует константа* $C>0$, *такая что*

$$\|u(x,-T)\;-\;u_\alpha(x,-T)\|_{L_2} \;\leqslant\; C\alpha^\tau\;\|u(x,-T)\|_{W_2^{4\tau}}. \tag{19}$$

**3.** Отметим, что в **теореме 1** можно считать $\tau \leqslant 1$. В случае, если $\tau > 1$, то из оценки (19) следует, что $f \equiv 0$ в $\Omega$. Это явление называется *насыщением.* Справедлива

**Теорема 2.** *Предположим, что оценка* (19) *справедлива для некоторого* $\tau > 1$.*Тогда* $u(x,t) \equiv 0$ *для* $x \in \Omega$ *и* $-T \leqslant t \leqslant 0$.

**Доказательство.** Пусть оценка (19) справедлива для некоторого $\tau > 1$. Тогда, согласно (16), мы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T}\right]^2 \ \leqslant\ C\alpha^{2\tau}.$$

Таким образом, для любого натурального $N$ имеем

$$\sum_{k=1}^{N} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T}\right]^2 \ \leqslant\ C\alpha^{2\tau}$$

и

$$\sum_{k=1}^{N} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2\lambda_k T} \left[\frac{1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T}}{\alpha}\right]^2 \ \leqslant\ C\alpha^{2(\tau-1)}. \tag{20}$$

Следует отметить, что

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T}}{\alpha} \ =\ \lambda_k^2 T.$$

Тогда, в пределе при $\alpha \to 0$ получаем из оценки (20) неравенство

$$T^2 \sum_{k=1}^{N} |(\varphi, v_k)|^2 e^{2T\lambda_k} \lambda_k^4 \ \leqslant\ 0.$$

Таким образом,

$$(\varphi, v_k) \ =\ 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Так как $N$ произвольно, то

$$(\varphi, v_k) \ =\ 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Поскольку система ортонормированных функций $\{v_k(x)\}$ полна, то в силу (21) получаем, что $\varphi(x) \equiv 0$, и, в соответствии с (9), $u(x,t) \equiv 0$.

**Теорема 2 доказана.**

**4.** Если функция

$$f(x) \ = u(x, -T) \tag{22}$$

принадлежит классу Соболева с более высоким показателем гладкости, то можно получить равномерную оценку разности между точным решением и регуляризированным.

Именно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть* $0 < \tau < 1$. *Если функция* $f$, *определенная равенством* (22), *принадлежит пространству* $W_2^{l,0}(\Omega)$, *где*

$$l \ \geqslant\ \frac{n}{2} \ +\ 4\tau, \tag{23}$$

*то выполняется равномерная на каждом компакте* $K \subset \Omega$ *оценка*:

$$u_\alpha(x, -T) \ =\ u(x, -T) \ +\ O(\alpha^\tau). \tag{24}$$

Вначале докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** *Пусть* $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ *и пусть* $l = n/2 + 4\tau$. *Тогда равномерно на каждом компакте* $K \subset \Omega$ *выполняется оценка*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T}\right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 \ \leqslant\ C_K \alpha^{2\tau}. \tag{25}$$

**Доказательство.** Воспользуемся следующими равномерными на любом компакте $K \subset \Omega$ оценками (см. В. А. Ильин, [4, 5]):

$$\sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} \frac{|v_k(x)|^2}{\lambda_k^{n/2-\varepsilon}} \leqslant C_K \lambda^{\varepsilon} \tag{26}$$

и

$$\sum_{\lambda_k \geqslant \lambda} \frac{|v_k(x)|^2}{\lambda_k^{n/2+\varepsilon}} \leqslant C_K \lambda^{-\varepsilon}, \tag{27}$$

справедливыми при $\varepsilon > 0$ для любого $\lambda \geqslant 1$.

Положим

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Заметим, что при $\alpha > 0$ и $\lambda_k > 0$ выполняются следующие оценки:

$$1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T} \leqslant \alpha\lambda_k^2 T$$

и

$$1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T} \leqslant 1.$$

Воспользовавшись при $\lambda_k \leqslant \lambda$ первой из этих оценок, а при $\lambda_k > \lambda$ второй, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T}\right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 =$$

$$= \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T}\right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 + \sum_{\lambda_k > \lambda} \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T}\right]^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} (\alpha\lambda_k^2 T)^2 \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 + \sum_{\lambda_k > \lambda} \lambda_k^{-l} |v_k(x)|^2 = S_1 + S_2.$$

Для оценки суммы $S_1$ применим (26) при $\varepsilon = 4 - 4\tau > 0$. В результате получим

$$S_1 = \alpha^2 T^2 \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} \frac{|v_k(x)|^2}{\lambda_k^{n/2+4-4\tau}} \leqslant C\alpha^2 \lambda^{4-4\tau} = C\alpha^2\, \alpha^{2\tau-2} = C\alpha^{2\tau}.$$

Для оценки суммы $S_2$ применим (27) при $\varepsilon = 4\tau > 0$. В результате получим

$$S_2 = \sum_{\lambda_k > \lambda} \frac{|v_k(x)|^2}{\lambda_k^{n/2+4\tau}} \leqslant C\lambda^{-4\tau} = C\alpha^{2\tau}.$$

Отсюда следует требуемая оценка (25).

**Лемма 1 доказана.**

**Доказательство теоремы 3.** Согласно равенству (15), мы можем записать

$$u(x, -T) - u_\alpha(x, -T) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) e^{\lambda_k T} \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k^2 T}\right] v_k(x). \tag{28}$$

Применим к сумме в правой части неравенство Коши-Буняковского:

$$|u(x, -T) - u_\alpha(x, -T)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi,v_k)|^2e^{2\lambda_kT}\lambda_k^l\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2T}\right]^2\lambda_k^{-l}|v_k(x)|^2\right)^{1/2}. \tag{29}$$

Далее воспользуемся оценкой (14), в результате получим

$$|u(x,-T)\ -\ u_\alpha(x,-T)|\ \leqslant\ C\|f\|_{W_2^l}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2T}\right]^2\lambda_k^{-l}|v_k(x)|^2\right)^{1/2}. \tag{30}$$

Остается заметить, что, согласно **лемме 1**, выполняется оценка

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-e^{-\alpha\lambda_k^2T}\right]^2\lambda_k^{-l}|v_k(x)|^2\right)^{1/2}\ =\ O(\alpha^\tau). \tag{31}$$

В таком случае, из (30) и (31) следует требуемая оценка (24).
**Теорема 3 доказана.**

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard, J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations / J. Hadamard. — New York: Dover Publications, 1923. — 338 p.

2. Tychonoff, A. N. On the stability of inverse problems / A. N. Tychonoff // Doklady Akad. Nauk SSSR. — 1943. — Vol. 39, № 5. — P. 195–198.

3. Lavrentyev, M. M. On Cauchy problem for the Laplace equation / M. M. Lavrentyev // Dokl. Akad. Nauk. — 1955. — V. 102, № 2. — P. 205–206.

4. Ильин, В. А. Избранные труды В. А. Ильина. Т. 1 / В. А. Ильин. — М.: Мах Пресс, 2008. — 728 с.

5. Ильин, В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов / В. А. Ильин. — М.: Наука, 1991. — 368 с.

6. Tychonoff, A. N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method / A. N. Tychonoff // Doklady Akad. Nauk SSSR. — 1943. — V. 151. — P. 501–504.

7. Faddeev, L. D. Increasing solutions of Schrödinger equation / L. D. Faddeev // Sov. Phys. Dokl. — 1966. — V. 10. — P. 1033–1035.

8. Tychonoff, A. N. Solution of Ill-posed Problems / A. N. Tychonoff, V. Y. Arsenin. — Washington: Winston, 1977. — 258 p.

9. Calderon, A. P. On an inverse boundary value problem / A. P. Calderon // Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics: Brazilian Mathematical Society.— Rio de Janeiro, 1980. — P. 65–73.

10. Groetsch, C. W. The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind / C. W. Groetsch. — Boston: Pitman, 1984. — 104 p.

11. Hofmann, B. Regularization of Applied Inverse and Ill-Posed Problems / B. Hofmann. — Leipzig: Teubner, 1986. — 196 p.

12. Mukhamedzhanov, A. M. Analytic continuation of reaction cross sections / A. M. Mukhamedzhanov, R. Yarmukhamedov, S. Yarmukhamedov // Theor. Math. Phys. — 1988. — V. 74, № 2. — P. 178–186.

13. Scherzer, O. Optimal a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems / O. Scherzer, H. Engl, K. Kunisch // SIAM J. Numer. Anal. — 1993. — V. 30. — P. 1796–1838.

14. Ikehata, M. Inverse conductivity problem in the infinite slab / M. Ikehata // Inverse Problems. — 2001. — V. 17. — P. 437–454.

15. Vogel, C. R. Computational Methods for Inverse Problems / C. R. Vogel. — Philadelphia: SIAM, 2002. — 179 p.

16. Tarantola, A. Inverse Problem Theory (free PDF version) / A. Tarantola. — Philadelphia: SIAM, 2004. — 358 p.

17. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.) / W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. — New York: Cambridge University Press, 2007. — 1256 p.

18. Åkesson, E. O. Parameter selection methods for axisymmetric flame tomography through Tikhonov regularization / E. O. Åkesson, K. J. Daun // Appl. Opt. — 2008. — V. 47. — P. 407–416.

## REFERENCES

1. Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New York: Dover Publications, 1923, 338 p.

2. Tychonoff A.N. On the stability of inverse problems. Doklady Akad. Nauk SSSR, 1943, vol. 39, № 5, pp. 195–198.

3. Lavrentyev M. M. On Cauchy problem for the Laplace equation. Dokl. Akad. Nauk, 1955, vol. 102, № 2, pp. 205–206.

4. Ilyin V.A. Selected papers. Volume 1. [Ильин В.А. Избранные труды В. А. Ильина. Т. 1]. Moscow: Max Press, 2008, 728 p.

5. Ilyin V.A. Spectral theory of differential operators. [Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов]. Moscow: Nayka, 1991, 368 p.

6. Tychonoff A.N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. Doklady Akad. Nauk SSSR, 1943, vol. 151, pp. 501–504.

7. Faddeev L.D. Increasing solutions of Schrödinger equation. Sov. Phys. Dokl., 1966, vol. 10, pp. 1033–1035.

8. Tychonoff A.N., Arsenin V.Y. Solution of Ill-posed Problems. Washington: Winston, 1977, 258 p.

9. Calderon A.P. On an inverse boundary value problem. Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics: Brazilian Mathematical Society, Rio de Janeiro, 1980, pp. 65–73.

10. Groetsch C.W. The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind. Boston: Pitman, 1984, 104 p.

11. Hofmann B. Regularization of Applied Inverse and Ill-Posed Problems. Leipzig: Teubner, 1986, 196 p.

12. Mukhamedzhanov A.M., Yarmukhamedov R., Yarmukhamedov S. Analytic continuation of reaction cross sections. 1988, vol. 74, № 2, pp. 178–186.

13. Scherzer O., Engl H., Kunisch K. Optimal a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems. SIAM J. Numer. Anal., 1993, vol. 30, pp. 1796–1838.

14. Ikehata M. Inverse conductivity problem in the infinite slab. Inverse Problems, 2001, vol. 17, pp. 437–454.

15. Vogel C.R. Computational Methods for Inverse Problems. Philadelphia: SIAM, 2002, 179 p.

16. Tarantola A. Inverse Problem Theory (free PDF version). Philadelphia: SIAM, 2004, 358 p.

17. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.). New York: Cambridge University Press, 2007, 1256 p.

18. Åkesson E.O., Daun K.J. Parameter selection methods for axisymmetric flame tomography through Tikhonov regularization. Appl. Opt., 2008, vol. 47, pp. 407–416.

*Тихомиров В. В., доцент кафедры общей математики факультета Вычислительной Математики и Кибернетики МГУ имени М. М. Ломоносова, к.ф.-м.н., Москва, Российская Федерация*
*E-mail: zedum@cs.msu.ru*

*Tikhomirov V. V., Associate Professor, Department of General Mathematics Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University named after M. Lomonosov Moscow State University, Ph.D., Moscow, Russian Federation*
*E-mail: zedum@cs.msu.ru*

*Бобылева О. Н., ассистент кафедры Нелинейных Динамических Систем и Процессов Управления факультета Вычислительной Математики и Кибернетики МГУ имени М. М. Ломоносова, к.ф.-м.н., Москва, Российская Федерация*
*E-mail: o_bobyleva@mail.ru*

*Bobyleva O. N., Assistant of the Department of Nonlinear Dynamic Systems and Control Processes of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University named after M. Lomonosov Moscow State University, Ph.D., Moscow, Russian Federation*
*E-mail: o_bobyleva@mail.ru*