УДК 517.957

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Н. А. Письменный

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 02.03.2015 г.

Аннотация. В статье рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений, содержащая два малых параметра. Система при нулевых значениях малых параметров распадается на две автономные системы ОДУ, каждая из которых имеет цикл. Предполагается, что единица является простым собственным значением каждого из двух операторов сдвига по траекториям линеаризованных на порождающих решениях систем ОДУ. Приводится формулировка и краткое доказательство достаточных условий асимптотической устойчивости периодических решений такой системы, существование которых было установлено в предыдущих работах автора. Доказательство основано на применении метода малого параметра и исследовании поведения "функции Малкина".

Ключевые слова: периодические решения, устойчивость, нелинейная система дифференциальных уравнений с двумя параметрами, теорема Малкина.

ON SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE STABILITY OF PERIODIC SOLUTIONS OF THE SYSTEM WITH TWO SMALL PARAMETERS

N. A. Pismennyy

Abstract. In this paper we consider a system of nonlinear differential equations with two small parameters. For zero values of the parameters the system breaks in the two autonomous ODE system each admitting simple cycle. We give the statement and a scetch of the proof for sufficient conditions of the asymptotic stability for periodic solutions which existence was presented in the previous article of the author. The proof is based on the method of small parameter and study the behavior of "function Malkin".

Keywords: periodic solutions, stability, the nonlinear system of differential equations with two parameters, the theorem Malkin.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об устойчивости движения в общем виде была сформулирована А. М. Ляпуновым в классическом произведении "Общая задача об устойчивости движения" [1]. Им же были развиты основные методы решения задачи устойчивости. Данная теория нашла широкое применение в различных областях физики, механики и техники. Идеи Ляпунова для уравнений с малым параметром были развиты Н. Н. Боголюбовым, Н. М. Крыловым [2], А. А. Андроновым, А. А. Виттом, С. Э. Хайкиным [3], Н. Г. Четаевым [4], а также И. Г. Малкиным [5],

[6]. В трудах Малкина большое внимание уделялось задачам о периодических решениях и об устойчивости таких решений квазилинейных, нелинейных систем ОДУ, содержащих малый параметр. В книге "Некоторые задачи теории нелинейных колебаний" представлен критерий устойчивости периодических решений для линейных, квазилинейных систем и неавтономных нелинейных систем для случая аналитических уравнений, содержащих одномерный малый параметр.

Методы Малкина продолжают широко применяться для исследования задачи о вынужденных колебаниях. Отметим здесь лишь наиболее близкие работы В. Н. Тхая , И. Н. Барабанова [8], [9], М. И. Каменского, О. Макаренкова, П. Нистри, Б. Михайленко [10], [11], [12], [13], [14] И. В. Антюшиной [15]. Стоит отметить, что результат Малкина нельзя перенести на систему с двумя малыми параметрами. Этот случай рассматривается в текущей статье. Критерий существования и единственности периодических решений у нелинейной системы, содержащей два малых параметра, приводится в статье автора [7]. Критерий устойчивости для этих решений представлен ниже. Устойчивость периодических решений определяется соотношением между малыми параметрами (лучи устойчивости), которые изменяются в зависимости от первоначальных данных.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

В основе текущей работы лежат материалы изложенные в статье автора [7], где для системы вида (1):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + \mu_1\gamma_1(t,x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) + \mu_2\gamma_2(t,x_1), \end{cases} \tag{1}$$

находятся условия существования и единственности периодических решений. Определение критерия устойчивости для найденных в [7] периодических решений является целью данной статьи.

Предполагается, что $f_1, f_2 : R^n \to R^n, \gamma_1,\gamma_2 : R^1 \times\ R^n \to R^n$, функции γ_1,γ_2 являются $T-$периодическими функциями по первой переменной, то есть

$$\gamma_1(t+T,x_1) \equiv \gamma_1(t,x_1), \gamma_2(t+T,x_1) \equiv \gamma_2(t,x_1),$$

μ_1, μ_2- малые положительные параметры. Функции $f_1,f_2,\gamma_1,\gamma_2$ имеют непрерывные производные по соответствующим пространственным переменным x_1, x_2.

При нулевых значениях параметров μ_1 и μ_2 система (1) распадается на два автономных уравнения:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1), \tag{2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2), \tag{3}$$

назовем эти уравнения порождающими. Предполагается, что порождающие уравнения имеют $T-$периодические порождающие решения $\varphi_1(t)$,$\varphi_2(t)$ уравнений (2), (3). В силу автономности уравнений (2) и (3) они допускают семейство параметрических решений $\varphi_1(t,h_1) = \varphi_1(t+h_1), \varphi_2(t,h_2) = \varphi_2(t+h_2)$, где h_1, h_2 одномерные параметры. Также предполагается, что 1-является простым собственным значением у операторов сдвига по траектории линеаризованных на φ_1,φ_2 уравнений (2) и (3). Введем обозначение $\varphi_{11} = \frac{\varphi_1}{dh_1}|_{h_1=0}, \varphi_{22} = \frac{\varphi_2}{dh_2}|_{h_2=0}$.

Ключевую роль в исследованиях И. Г. Малкина играет, так называемая, "функция Малкина". Для системы (1) она определяется следующим соотношением:

$$\begin{cases} P_1(h_1,h_2) = \int\limits_0^T \langle \gamma_1(\tau,\varphi_2(\tau,h_2)),\psi_1(\tau)\rangle d\tau, \\ P_2(h_1,h_2) = \int\limits_0^T \langle \gamma_2(\tau,\varphi_1(\tau,h_1)),\psi_2(\tau)\rangle d\tau, \end{cases}$$

здесь ψ_1,ψ_2 периодическое решение систем:

$$\frac{d\psi_1}{dt} + A_1^*(t)\psi_1 = 0,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} + A_2^*(t)\psi_2 = 0,$$

где $A_1(t) = \frac{df_1}{dx_1}|_{\varphi_1(t,0)}, A_2(t) = \frac{df_2}{dx_2}|_{\varphi_2(t,0)}$. Как показано в [7], если система (4):

$$\begin{cases} P_1(h_1,h_2) = 0, \\ P_2(h_1,h_2) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

имеет тривиальное решение, то система (1) допускает ветвь периодических решений, обращающихся при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ в семейство порождающих решений $\varphi_1(t,0)$ и $\varphi_2(t,0)$. Если при этом выполняется условие:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial h_1} & \frac{\partial P_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial h_1} & \frac{\partial P_2}{\partial h_2} \end{vmatrix}_{(0,0)} \neq 0, \tag{5}$$

то решение действительно существует и является единственным периодическим в окрестности $\varphi_1(t,0), \varphi_2(t,0)$.

Обозначим и определим коэффициенты $a_2, b_1, c_1, c_2, c_5, c_6$:

$$a_2 = \int\limits_0^T \langle \frac{d^2 f_1}{dx_1^2}\varphi_2(t,0)\varphi_{11},\psi_1\rangle dt, b_1 = \int\limits_0^T \langle \frac{d^2 f_2}{dx_2^2}\varphi_1(t,0)\varphi_{22},\psi_2\rangle dt, c_1 = \int\limits_0^T \langle \frac{d^2 f_1}{dx_1^2}\varphi_1(t,0)\varphi_{11},\psi_1\rangle dt,$$

$$c_2 = \int\limits_0^T \langle \frac{d\gamma_1}{dx_2}\varphi_2(t,0)\varphi_{22},\psi_1\rangle dt, c_5 = \int\limits_0^T \langle \frac{d\gamma_2}{dx_1}\varphi_1(t,0)\varphi_{11},\psi_2\rangle dt, c_6 = \int\limits_0^T \langle \frac{d^2 f_2}{dx_2^2}\varphi_2(t,0)\varphi_{22},\psi_2\rangle dt.$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема. Пусть справедливо (5), тогда для асимптотической устойчивости периодических решений системы (1), достаточно выполнение условия:

$$\begin{cases} Re(\mu_1\chi_1 - \mu_2 a_2) < 0, \\ Re(-\mu_1 b_1 + \mu_2\chi_2) < 0, \end{cases}$$

где коэффициенты χ_1, χ_2 связаны соотношением $(c_1 - \chi_1)(c_6 - \chi_2) - c_2 c_5 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Будем искать условия, при которых периодические решения системы (1) $x_1(t), x_2(t)$ будут асимптотически устойчивыми. Разложим $x_1(t), x_2(t)$ по степеням малых параметров:

$$x_1(t) = \varphi_1(t) + \mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)} + \mu_1^2 x_1^{(3)} + \mu_2^2 x_1^{(4)} + \mu_1\mu_2 x_1^{(5)} + ...$$

$$x_2(t) = \varphi_2(t) + \mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)} + \mu_1^2 x_2^{(3)} + \mu_2^2 x_2^{(4)} + \mu_1\mu_2 x_2^{(5)} + ...$$

Нас будут интересовать первые приближения, то есть $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$. Подставляя в систему (1) выписанные выше разложения до первого порядка , мы получим:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 + \mu_1 \dot{x}_1^{(1)} + \mu_2 \dot{x}_1^{(2)} = f_1(\varphi_1 + \mu_1 x_1^{(1)} \mu_2 x_1^{(2)}) + \\ + \mu_1 \gamma_1(t,\varphi_2 + \mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)}), \\ \dot{\varphi}_2 + \mu_1 \dot{x}_2^{(1)} + \mu_2 \dot{x}_2^{(2)} = f_2(\varphi_2 + \mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)}) + \\ + \mu_1 \gamma_2(t,\varphi_1 + \mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)}). \end{cases} \qquad (i)$$

Далее, произведем в системе (i) замену переменных: $x_i = x_i(t) + y_i, i = 1,2$:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 + \dot{\varphi}_1 + \mu_1 \dot{x}_1^{(1)} + \mu_2 \dot{x}_1^{(2)} = f_1(y_1 + \varphi_1 + \mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)}) + \\ + +\mu_1 \gamma_1(t,y_2 + \varphi_2 + \mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)}), \\ \dot{y}_2 + \dot{\varphi}_2 + \mu_1 \dot{x}_2^{(1)} + \mu_2 \dot{x}_2^{(2)} = f_2(y_2 + \varphi_2 + \mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)}) + \\ + \mu_1 \gamma_2(t,y_1 + \varphi_1 + \mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)}). \end{cases} \qquad (ii)$$

Разность систем (ii) и (i) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1 + \varphi_1 + \mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)}) - f_1(\varphi_1 + \mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)}) + \\ + \mu_1(\gamma_1(t,y_2 + \varphi_2 + \mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)}) - \gamma_1(t,\varphi_2 + \mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)})) \\ \dot{y}_2 = f_2(y_2 + \varphi_2 + \mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)}) - f_2(\varphi_2 + \mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)}) + \\ + \mu_1(\gamma_2(t,y_1 + \varphi_1 + \mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)}) - \gamma_2(t,\varphi_1 + \mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)})). \end{cases}$$

Далее, линеаризуем разности получим:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1'(\varphi_1 + \mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)}) y_1 - f_1'(\varphi_1) y_1 + f_1'(\varphi_1) y_1 + \\ + \mu_1 \gamma_1'(t,\varphi_2 + \mu_1 x_2^{(1)}) y_2 - \mu_1 \gamma_1'(t, \varphi_2) y_2 + \mu_1 \gamma_1'(t,\varphi_2) y_2 \\ \dot{y}_2 = f_2'(\varphi_2 + \mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)}) y_2 - f_2'(\varphi_2) y_2 + f_2'(\varphi_2) y_2 + \\ + \mu_2 \gamma_2'(t,\varphi_2 + \mu_1 x_1^{(1)}) y_1 - \mu_2 \gamma_2'(t, \varphi_1) y_1 + \mu_2 \gamma_2'(t,\varphi_1) y_1. \end{cases}$$

Повторяя процесс линеаризации, получаем:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1'(\varphi_1) y_1 + f_1''(\varphi_1) y_1 (\mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)}) y_1 + \mu_1 \gamma_1'(t,\varphi_2) y_2 + o(\mu_1^2,\mu_2^2, \mu_1\mu_2), \\ \dot{y}_2 = f_2'(\varphi_2) y_2 + f_2''(\varphi_2) y_2 (\mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)}) y_2 + \mu_1 \gamma_2'(t,\varphi_1) y_1 + o(\mu_1^2,\mu_2^2, \mu_1\mu_2), \end{cases}$$

Отбросив члены выше первого порядка относительно μ_1, μ_2, приходим к системе:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1'(\varphi_1) y_1 + f_1''(\varphi_1) y_1 (\mu_1 x_1^{(1)} + \mu_2 x_1^{(2)}) y_1 + \mu_1 \gamma_1'(t,\varphi_2) y_2 \\ \dot{y}_2 = f_2'(\varphi_2) y_2 + f_2''(\varphi_2) y_2 (\mu_1 x_2^{(1)} + \mu_2 x_2^{(2)}) y_2 + \mu_1 \gamma_2'(t,\varphi_1) y_1 \end{cases}$$

введя новые обозначения, получим эквивалентную к последней систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = A_1(t)y_1 + \mu_1(P_1(t)y_1 + Q_1(t)y_2) + \mu_2 R_1(t)y_1 + o(\mu_1,\mu_2), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = A_2(t)y_2 + \mu_2(P_2(t)y_2 + Q_2(t)y_1) + \mu_1 R_2(t)y_2 + o(\mu_1,\mu_2) \end{cases} \tag{6}$$

здесь $P_1(t) = \frac{d^2 f_1}{dx_1^2}x_1^{(1)}|_{\varphi_1(t,0)}, P_2(t) = \frac{d^2 f_2}{dx_2^2}x_2^{(2)}|_{\varphi_1(t,0)}$ $Q_1(t) = \frac{d\gamma_1}{dx_2}|_{\varphi_2(t,0)}, Q_2(t) = \frac{d\gamma_2}{dx_1}|_{\varphi_1(t,0)}, R_1(t) = \frac{d^2 f_1}{dx_1^2}x_1^{(2)}|_{\varphi_1(t,0)}, R_2\frac{d^2 f_2}{dx_2^2}x_2^{(1)}|_{\varphi_2(t,0)}$.
Система (6) при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ разбивается на два независимых уравнения (7):

$$\frac{dy_1}{dt} = A_1(t)y_1, \frac{dy_2}{dt} = A_2(t)y_2, \tag{7}$$

следовательно, характеристические показатели уравнений системы (6) при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ обращаются в характеристические показатели системы (7). Поэтому, если μ_1,μ_2 достаточно малы, то для задачи устойчивости можно рассматривать вместо характеристических показателей системы (6) характеристические показатели системы (7), за исключением того случая, когда характеристические показатели равны 0. В этом случае характеристические показатели системы (6) должны быть вычислены более точно. Обозначим за

$$\alpha_1 = \lambda_1 + \bar{a}_1(\mu_1,\mu_2), \alpha_2 = \lambda_2 + \bar{a}_2(\mu_1,\mu_2)$$

искомые характеристические показатели, здесь $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Разложим $\bar{a}_1(\mu_1,\mu_2)$, $\bar{a}_2(\mu_1,\mu_2)$ по степеням аргументов:

$$\bar{a}_1(\mu_1,\mu_2) = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + ..., \bar{a}_2(\mu_1,\mu_2) = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + ...,$$

нас будут интересовать только члены первого порядка.
Произведем в системе (6) замену переменных: $y_1 = e^{(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2)t}z_1, y_2 = e^{(\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2)t}z_2$. После преобразований, отбросив члены выше первого порядка относительно μ_1, μ_2, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = A_1(t)z_1 - (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2)z_1 + \mu_1 P_1(t)z_1 + \mu_1 Q_1(t)z_2 + \mu_2 R_1(t)z_1, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = A_2(t)z_2 - (\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2)z_2 + \mu_2 P_2(t)z_1 + \mu_2 Q_2(t)z_1 + \mu_1 R_2(t)z_2. \end{cases} \tag{8}$$

Будем искать искомое периодическое решение методом разложения по степеням параметра:

$$z_1 = M_1\varphi_{11} + \mu_1 z_1^{(1)} + \mu_2 z_1^{(2)} + ...$$

$$z_2 = M_2\varphi_{22} + \mu_1 z_2^{(1)} + \mu_2 z_2^{(2)} + ...,$$

здесь $\varphi_{11} = \frac{\varphi_1}{dh_1}|_{h_1=0}, \varphi_{22} = \frac{\varphi_2}{dh_2}|_{h_2=0}$, M_1, M_2 произвольные постоянные, одновременно не обращающиеся в нуль. Подставляя эти выражения в систему (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ_1, μ_2, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1^{(1)}}{dt} &= A_1(t)z_1^{(1)} + (P_1(t)\varphi_{11} - a_1\varphi_{11})M_1 + Q_1(t)\varphi_{22}M_2, \\ \frac{dz_1^{(2)}}{dt} &= A_1(t)z_1^{(2)} + (-a_2\varphi_{11} + R_1(t)\varphi_{11})M_1, \\ \frac{dz_2^{(1)}}{dt} &= A_2(t)z_2^{(1)} + (-b_1\varphi_{22} + R_2(t)\varphi_{22})M_2, \\ \frac{dz_2^{(2)}}{dt} &= A_2(t)z_2^{(2)} + Q_2(t)\varphi_{11}M_1 + (P_2(t)\varphi_{22} - b_2\varphi_{22})M_2, \end{aligned} \tag{9}$$

как видно, что у каждого неоднородного уравнения системы одинаковая однородная часть, тогда условия периодичности $z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}$ примут вид:

$$\begin{cases} \int\limits_0^T \langle (P_1(t)\varphi_{11} - a_1\varphi_{11})M_1 + Q_1(t)\varphi_{22}M_2, \psi_1\rangle dt = 0, \\ \int\limits_0^T \langle (-a_2\varphi_{11} + R_1(t)\varphi_{11})M_1, \psi_1\rangle dt = 0, \\ \int\limits_0^T \langle (-b_1\varphi_{22} + R_2(t)\varphi_{22})M_2, \psi_2\rangle dt = 0, \\ \int\limits_0^T \langle Q_2(t)\varphi_{11}M_1 + (P_2(t)\varphi_{22} - b_2\varphi_{22})M_2, \psi_2\rangle dt = 0 \end{cases}$$

Разбив интегралы в последней системе, получаем:

$$\Lambda M = 0 \tag{10}$$

здесь $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \int\limits_0^T \langle (P_1(t)\varphi_{11} - a_1\varphi_{11}), \psi_1\rangle dt & \int\limits_0^T \langle Q_1(t)\varphi_{22}, \psi_1\rangle dt \\ \int\limits_0^T \langle (-a_2\varphi_{11} + R_1(t)\varphi_{11}), \psi_1\rangle dt & 0 \\ 0 & \int\limits_0^T \langle (-b_1\varphi_{22} + R_2(t)\varphi_{22}), \psi_2\rangle dt \\ \int\limits_0^T \langle Q_2(t)\varphi_{11}, \psi_2\rangle dt & \int\limits_0^T \langle (P_2(t)\varphi_{22} - b_2\varphi_{22}), \psi_2\rangle dt \end{pmatrix}$$

Так как последняя система должна иметь нетривиальное решение (M_1, M_2), для чего необходимо, чтобы все миноры второго порядка матрицы Λ были равны нулю. Введем обозначения: $c_1 = \int\limits_0^T \langle P_1(t)\varphi_{11}, \psi_1\rangle dt$, $c_2 = \int\limits_0^T \langle Q_1(t)\varphi_{22}, \psi_1\rangle dt$, $c_3 = \int\limits_0^T \langle (R_1(t)\varphi_{11}, \psi_1\rangle dt$, $c_4 = \int\limits_0^T \langle R_2(t)\varphi_{22}, \psi_2\rangle dt$, $c_5 = \int\limits_0^T \langle Q_2(t)\varphi_{11}, \psi_2\rangle dt$, $c_6 = \int\limits_0^T \langle P_2(t)\varphi_{22}, \psi_2\rangle dt$.

Условие равенства нулю всех миноров второго порядка переписывается в систему:

$$\begin{cases} (c_3 - a_2)(c_4 - b_1) = 0, \\ c_2(c_3 - a_2) = 0, \\ (c_1 - a_1)(c_4 - b_1) = 0, \\ (c_3 - a_2)(c_6 - b_2) = 0, \\ c_5(c_4 - b_1) = 0, \\ (c_1 - a_1)(c_6 - b_2) - c_2c_5 = 0 \end{cases}$$

Учитывая, что $c_2 \neq 0, c_5 \neq 0$ находим:

$$\begin{cases} a_2 = c_3, \\ b_1 = c_4, \\ (c_1 - a_1)(c_6 - b_2) - c_2 c_5 = 0 \end{cases}$$

Как видно a_2, b_1 вычисляются явно, a_1, b_2 определяются последним уравнением системы. Вспоминая, что $\bar{a}_1(\mu_1,\mu_2) = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + ..., \bar{a}_2(\mu_1,\mu_2) = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + ...$, получаем условия устойчивости периодических решений $x_1(t), x_2(t)$:

$$\begin{cases} Re(\mu_1 a_1 - \mu_2 a_2) < 0, \\ Re(-\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2) < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Замечание 1. Для получения точного результата необходимо вычислить коэффициенты c_i, которые, в свою очередь, находятся из первого приближения периодического решения $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.–Л.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.

2. Крылов, Н. М. Новые методы нелинейной механики / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. — М.–Л., 1934. — 243 с.

3. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М.: Физматгиз, 1959. — 918 с.

4. Четаев, Н. Г. Устойчивость движения / Н. Г. Четаев. — М.: Наука, 1990. — 176 с.

5. Малкин, И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. — 491 с.

6. Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. — М.: Наука, 1966. — 531 с.

7. Письменный, Н. А. Аналог теоремы Малкина для задачи о периодических решениях ОДУ, содержащих два малых параметра / Н. А. Письменный // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 147–152.

8. Баранов, И. Н. Квазиавтономная система: колебания, устойчивость и стабилизация в обыкновенной точке семейства периодических решений / И. Н. Баранов, В. Н. Тхай // Автомат. и телемех. — 2013. — № 8. — С. 32–46.

9. Тхай, В. Н. Модель, содержащая связанные подсистемы / В. Н. Тхай // Автомат. и телемех. — 2013. — № 6. — С. 26–41.

10. Kamenskii, M. A continuation principle for a class of periodically perturbed autonomous systems / M. Kamenskii, O. Makarenkov, P. Nistri // Mathematische Nachrichten. — 2008. — V. 281, iss. 1. — P. 41–61.

11. Kamenskii, M. Variable scaling to solve a singular bifurcation problem with applications to periodically perturbed autonomous systems / M. Kamenskii, O. Makarenkov, P. Nistri // Journal of dynamic and differential equations. — 2011. — V. 8. — P. 135–153.

12. Kamenskii, M. bifurcation problem for a class of periodically perturbed autonomous parabolic equations / M. Kamenskii, B.A. Mikhailenko, P. Nistri // Bound. Value Probl. — 2013. — V. 2013:101. — P. 1–18.

13. Couchouron, J.-F. An infinite dimensional bifurcation problem with application to a class of functional differential equations of neutral type / J.-F. Couchouron, M. Kamenskii, P. Nistri // Commun. Pure Appl. Anal. — 2013. — V. 12, № 5. — P. 1845–1859.

14. Макаренков, О. Ю. Скорость сходимости периодических решений возмущенных дифференциальных уравнений / О. Ю. Макаренков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 2. — С. 75–82.

15. Антюшина, И. В. Критерий асимптотической устойчивости нулевого решения динамической системы ОДУ на плоскости в терминах топологического индекса / И. В. Антюшина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 125–135.

REFERENCES

1. Lyapunov A.M. The general problem of stability of motion. [Lyapunov A.M. Obshhaya zadacha ob ustojchivosti dvizheniya]. Moscow-Leningrad, 1950, 472 p.

2. Krylov N.M., Bogolybov N.N. New methods of nonlinear mechanics. [Krylov N.M., Bogolyubov N.N. Novye metody nelinejnoj mexaniki]. M.-L., 1934, 243 p.

3. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. Theory of vibrations. [Andronov A.A., Vitt A.A., Xajkin S.E'. Teoriya kolebanij]. Moscow: Fizmatgiz, 1959, 918 p.

4. Chetaev N.G. Stability of motion. [Chetaev N.G. Ustojchivost' dvizheniya]. Moscow: Nauka, 1990, 176 p.

5. Malkin I.G. Some problems of the theory of nonlinear oscillations. [Malkin, I. G. Nekotorye zadachi teorii nelinejnyx kolebanij]. Moscow: Gostechizdat, 1956, 491 p.

6. Malkin I.G. Theory of stability of motion. [Malkin I.G. Teoriya ustojchivosti dvizheniya]. Moscow: Nauka, 1966, 531 p.

7. Pismennyy N.A. The analogue of Theorem Malkin for the problem of periodic solutions of the ODE, containing two small parameters. [Pis'mennyj N.A. Analog teoremy Malkina dlya zadachi o periodicheskix resheniyax ODU, soderzhashhix dva malyx parametra]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 147–152.

8. Baranov I.N., Thai V.N. Quasi-autonomous system: vibrations, stability and stabilization in the common point of the family of periodic solutions. [Baranov I.N., Txaj V.N. Kvaziavtonomnaya sistema: kolebaniya, ustojchivost' i stabilizaciya v obyknovennoj tochke semejstva periodicheskix reshenij]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote Control*, 2013, no. 8, pp. 32–46.

9. Thai V.N. The model related subsystem comprising. [Txaj V.N. Model', soderzhashhaya svyazannye podsistemy]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote Control*, 2013, no. 6, pp. 26–41.

10. Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P. A continuation principle for a class of periodically perturbed autonomous systems. Mathematische Nachrichten, 2008, vol. 281, iss. 1, pp. 41–61.

11. Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P. Variable scaling to solve a singular bifurcation problem with applications to periodically perturbed autonomous systems. Journal of dynamic and differential equations, 2011, vol. 8, pp. 135–153.

12. Kamenskii M., Mikhailenko B.A., Nistri P. A bifurcation problem for a class of periodically perturbed autonomous parabolic equations. Bound. Value Probl., 2013, vol. 2013:101, pp. 1–18.

13. Couchouron J.-F., Kamenskii M., Nistri P. An infinite dimensional bifurcation problem with application to a class of functional differential equations of neutral type. Commun. Pure Appl. Anal., 2013, vol. 12, no. 5, pp. 1845–1859.

14. Makarenkov O.Y. The rate of convergence of periodic solutions of perturbed differential equations. [Makarenkov O.Yu. Skorost' sxodimosti periodicheskix reshenij vozmushhennyx differencial'nyx uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 2, pp. 75–82.

15. Antyshina I.V. Criterion for the asymptotic stability of the zero solution of the dynamic system ODE on a plane in terms of topological index. [Antyushina I.V. Kriterij

asimptoticheskoj ustojchivosti nulevogo resheniya dinamicheskoj sistemy ODU na ploskosti v terminax topologicheskogo indeksa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 125–135.

Письменный Никита Алексеевич, аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: n.pismennyy@gmail.com
Тел.: (4732)208771

Pismenny Nikita Alekseevich, Postgraduate student, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: n.pismennyy@gmail.com
Tel.: (4732)208771