УДК 537.8:517.968.73

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СЛУЧАЕ НЕФЕРРОМАГНИТНОГО ДЕФЕКТНОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ТЕЛА

С. В. Марвин

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Поступила в редакцию 16.03.2015 г.

Аннотация. Рассмотрена начально-краевая задача электродинамики для неферромагнитного металлического тела с дефектом, которое находится в поле мгновенно выключенного стороннего тока. Выбран и исследован класс векторных функций, наиболее естественный для поиска решений указанной начально-краевой задачи: напряженности электрического и магнитного полей представляют собой квадратично суммируемые векторные функции с квадратично суммируемыми роторами (существование роторов предполагается в обобщенном смысле). С применением теоремы Хилле-Иосиды доказано, что в выбранном классе векторных функций существует единственное решение рассмотренной начально-краевой задачи. Проведено исследование свойств решения, связанных с дивергенцией напряженности магнитного поля.

Ключевые слова: начально-краевая задача; уравнения Максвелла; теорема существования.

EXISTENCE AND THE UNIQUENESS OF SOLUTION OF INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR THE UNIFORM SYSTEM OF EQUATIONS OF MAXWELL IN THE CASE OF NONFERROMAGNETIC DEFECTIVE METALLIC BODY

S. V. Marvin

Abstract. The initial-boundary problem of electrodynamics for a nonferromagnetic metallic body with defect, which is located in the field of the instantly turned-off strange current, is examined. The class of vector-functions, most natural for solutions this initial-boundary problem, is selected and investigated: the tensions of electrical and magnetic fields are the quadratically summarized vector-functions with the quadratically summarized rotors (it is assumed, that rotors are exist in the generalized sense). With the application of the theorem Hille-Yosida it is proved, that in the selected class of vector functions the investigated initial-boundary problem have an unique solution. A study of the properties of the solution, connected with the divergence of the tension of magnetic fields, is carried out.

Keywords: initial-boundary problem; Maxwell's equation; existence theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Нестационарные волновые процессы электродинамики, не предполагающие гармоническую зависимость электромагнитного поля от времени, находят широкое применение в практических приложениях, в частности, в дефектоскопии металлических изделий. Один из широко применяемых нестационарных методов неразрушающего контроля заключается в следующем: исследуемое металлическое изделие помещается в поле стороннего тока, и ток резко выключается. По затухающему полю снаружи тела судят о дефектах внутри тела. Описанному методу дефектоскопии соответствует начально-краевая задача для однородной системы уравнений Максвелла (с нулевым сторонним током), если момент выключения тока принять за начальный момент времени.

Начально-краевые задачи электродинамики применительно к неразрушающему контролю исследовались ранее [1]–[3]. В частности, для немагнитного, неоднородного металлического тела, с бесконечно гладкой электропроводностью и ограниченного поверхностью Ляпунова, при нулевых начальных условиях были доказаны существование и единственность классического решения (то есть, непрерывно дифференцируемого в обычном смысле [2], [3]).

Кроме того, исследовались обобщенные постановки начально-краевых задач электродинамики для областей, границы которых представляли собой поверхности класса $C^{(2)}$ [4], [5]. Следует заметить, что результаты, касающиеся обобщенной постановки неквазистационарных задач, были получены, преимущественно, для внутренних задач в ограниченных областях [5]. Их обобщение на неограниченные области далеко не очевидно, так как требует нетривиального исследования поведения полей на бесконечности.

В дефектоскопии первоочередное значение имеют не внутренние задачи для ограниченных (или даже неограниченных) областей: для неразрушающего контроля принципиально важно, что поле, с помощью которого обнаруживаются дефекты, есть как внутри, так и снаружи контролируемого изделия (поле внутри изделия связано с полем снаружи изделия граничными условиями). Причем в условиях дефектоскопии электропроводность как функция пространственных координат имеет разрывы (на границах дефектов происходит скачкообразное изменение электропроводности). В общем случае границы тела и дефектов могут быть не только гладкими, но и кусочно-гладкими. И немалый интерес представляет задача с ненулевыми начальными условиями и нулевым сторонним током: эта задача, как было сказано выше, соответствует одному из распространенных методов дефектоскопии.

1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматриваемая начально-краевая задача представляет собой задачу с начальными и граничными условиями для однородных уравнений Максвелла в средах, электропроводности которых неотрицательны, а диэлектрические и магнитные проницаемости равны 1 (как у неферромагнитных металлов):

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \sigma(\mathbf{r})\,\mathbf{E} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности, соответственно, электрического и магнитного поля; ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная постоянные (обе положительны); σ — электропроводность; $\mathbf{r}$ — упорядоченный набор трех пространственных координат (x,y,z); t — время.

Начально-краевая задача рассматривается для металлического тела, окруженного непроводящей средой. Металлическое тело занимает ограниченную область, которую обозначим как Ω; граница области Ω — кусочно-гладкая. Дефекты занимают области Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_n$, тоже с кусочно-гладкими границами; замыкания этих областей не пересекаются и полностью содержатся в Ω: $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$ (рис. 1). Каждый дефект представляет собой отдельную среду со своей непрерывной зависимостью σ от координат $\mathbf{r}$; металл, занимающий область $\Omega \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \bar{\Omega}_i \right)$, получающуюся из области Ω удалением замыканий всех Ω_i, тоже представляет собой отдельную среду со своей непрерывной электропроводностью $\sigma(\mathbf{r})$.

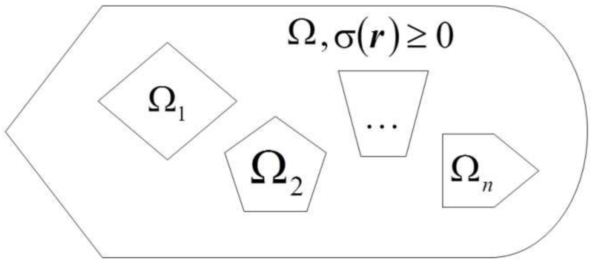

Рис. 1. *Металлическое тело с дефектами*

Электропроводность $\sigma(\mathbf{r})$ допускает непрерывное продолжение на границу любой области Ω_i, как изнутри Ω_i, так и снаружи (однако, результаты продолжения изнутри и снаружи — разные). Кроме того, $\sigma(\mathbf{r})$ допускает непрерывное продолжение изнутри области Ω на ее границу.

Система уравнений (1) должна выполняться во внешней непроводящей среде, в бездефектной области $\Omega \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \bar{\Omega}_i \right)$, а также в каждом дефекте Ω_i.

На границах Ω_i и Ω должны выполняться граничные условия сопряжения для двух сред, не являющихся идеальными проводниками, то есть условия непрерывности касательных составляющих напряженностей:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\tau,\mathrm{int}} = \mathbf{E}_{\tau,\mathrm{ext}}, \\ \mathbf{H}_{\tau,\mathrm{int}} = \mathbf{H}_{\tau,\mathrm{ext}}, \end{cases} \tag{2}$$

где *int* и ext — соответственно, обозначение предела изнутри и снаружи.

Начальное распределение электромагнитного поля в пространстве (в момент выключения стороннего тока $t = 0$) определяется начальными условиями:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r},0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}). \end{cases} \tag{3}$$

Как и при постановке подавляющего большинства задач математической физики, возникает нетривиальная проблема определения функционального класса, в котором следует искать решение начально-краевой задачи (1)–(3). Этот функциональный класс должен быть таким, чтобы решение поставленной начально-краевой задачи существовало, чтобы было единственным и непрерывно зависело от начальных условий.

Определим пространство векторных полей $\mathbf{K}'$ следующим образом. Это пространство составляют векторные поля, непрерывно дифференцируемые во всех областях Ω_i, в области $\Omega \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \bar{\Omega}_i \right)$ и в области $V \backslash \bar{\Omega}$ (V — трехмерное геометрическое пространство). Причем и сами векторные поля, и первые производные их компонент допускают непрерывное продолжение изнутри и снаружи на границы Ω_i и Ω. Кроме того, указанные векторные поля должны удовлетворять граничным условиям вида (2); также эти векторные поля и их роторы должны быть квадратично суммируемы во всем пространстве V. В таком пространстве можно ввести норму по следующей формуле:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{K}'} = \sqrt{\int\limits_V |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 \, dV + \int\limits_V |\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 \, dV}, \tag{4}$$

где $dV = dxdydz$ — элемент объема.

Пополнение $\mathbf{K}'$ по норме (4) обозначим $\mathbf{K}$. Именно $\mathbf{K}$ представляется наиболее естественным выбором функционального класса, в котором следует искать решение исследуемой начально-краевой задачи. Далее мы докажем, что если $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) \in \mathbf{K}$, то решение, удовлетворяющее условию $\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \in \mathbf{K}$, существует, причем такое решение определяется начальными условиями однозначно и непрерывно зависит от них. Только непрерывную зависимость от начальных условий, а также дифференцируемость полей $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ по времени следует подразумевать по норме пространства $\mathbf{L}_2(V)$ — пространства векторных полей, квадратично суммируемых в V: $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\int\limits_V |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 dV}$. При такой точке зрения, непрерывность и дифференцируемость произвольного векторного поля $\mathbf{w}(\mathbf{r},t)$ по времени означает следующее:

$$\|\mathbf{w}(t+h) - \mathbf{w}(t)\|_2 \underset{h\to 0}{\to} 0, \quad \left\| \frac{\mathbf{w}(t+h) - \mathbf{w}(t)}{h} - \mathbf{w}'_t(t) \right\|_2 \underset{h\to 0}{\to} 0, \tag{5}$$

причем, как и в случае обычных вещественнозначных функций одной переменной, из дифференцируемости следует непрерывность.

2. ОСНОВНОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ЗАДАЧИ

Обозначим как H' множество векторных полей, непрерывно дифференцируемых во всех точках пространства V, квадратично суммируемых в V и имеющих квадратично суммируемые в V роторы. Очевидно, $H' \subseteq \mathbf{K}'$.

Обозначим как $\mathbf{L}_{\text{loc}}(V)$ пространство локально суммируемых в V векторных полей; как $\mathbf{D}$ обозначим пространство финитных бесконечно дифференцируемых векторных полей.

Определение 1. *Векторное поле $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}(V)$ будем называть обобщенным ротором векторного поля $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}(V)$ и обозначать как* $\mathrm{rot}\mathbf{u}$, *если для любого поля $\mathbf{q} \in \mathbf{D}$ выполняется следующее равенство [4]:*

$$\int\limits_V \mathbf{u}(\mathbf{r})\, \mathrm{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})\, dV = \int\limits_V \mathbf{v}(\mathbf{r})\, \mathbf{q}(\mathbf{r})\, dV. \tag{6}$$

Обобщенный ротор определяется однозначно с точностью до замены его компонент на эквивалентные функции, причем, если у компонент векторного поля есть необходимые обобщенные частные производные по Соболеву, обобщенный ротор определяется по обычной для ротора формуле.

Обозначим как $H(\mathrm{rot},V)$ пространство квадратично суммируемых в V векторных полей, имеющих квадратично суммируемые в V обобщенные роторы.

Теорема 1. *Пополнение пространства H' по норме (4) совпадает с пространством* $H(\mathrm{rot},V)$.

Доказательство. Докажем, что любой элемент пополнения H' по норме (4) является элементом пространства $H(\mathrm{rot},V)$. Пусть последовательность векторных полей $\mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \in H'$ сходится по норме $\mathbf{L}_2(V)$ к векторному полю $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и, при этом, $\mathrm{rot}\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ сходится по норме $\mathbf{L}_2(V)$ к векторному полю $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Тогда для произвольного финитного поля $\mathbf{q}(\mathbf{r}) \in \mathbf{D}$

$$\int\limits_V \mathbf{u}(\mathbf{r})\, \mathrm{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})\, dV = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_V \mathbf{u}_n(\mathbf{r})\, \mathrm{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})\, dV = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_V \mathrm{rot}\mathbf{u}_n(\mathbf{r})\, \mathbf{q}(\mathbf{r})\, dV = \int\limits_V \mathbf{v}(\mathbf{r})\, \mathbf{q}(\mathbf{r})\, dV.$$

Следовательно, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ — обобщенный ротор $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, и $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \in H(\mathrm{rot},V)$.

Теперь докажем, что любой элемент пространства $H(\mathrm{rot},V)$ является элементом пополнения H' по норме (4). Пусть векторное $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \in H(\mathrm{rot},V)$ и векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \in \mathbf{L}_2(V)$ — обобщенный ротор $\mathbf{u}(\mathbf{r})$.

Возьмем в равенстве (6) в качестве $\mathbf{q}$ поле с компонентами $(\omega_\varepsilon(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|),0,0)$, где ω_ε — "шапочка" с носителем радиуса ε, и интегрировать будем по $\mathbf{r}'$:

$$\int\limits_V \left(u_y(\mathbf{r}') \cdot \frac{\partial\omega_\varepsilon(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial z'} - u_z(\mathbf{r}') \cdot \frac{\partial\omega_\varepsilon(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial y'} \right) dV' = \int\limits_V v_x(\mathbf{r}')\,\omega_\varepsilon\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right) dV'.$$

Заметим, что интеграл в правой части этого равенства является бесконечно дифференцируемой функцией и при $\varepsilon \to 0$ сходится по среднеквадратичной норме к $v_x(\mathbf{r})$ [6].

Для интеграла в левой части равенства выполним следующие тождественные преобразования:

$$\int\limits_V \left(u_y(\mathbf{r}') \cdot \frac{\partial\omega_\varepsilon(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial z'} - u_z(\mathbf{r}') \cdot \frac{\partial\omega_\varepsilon(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial y'} \right) dV' =$$

$$= \int\limits_V \left(u_z(\mathbf{r}') \cdot \frac{\partial\omega_\varepsilon(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial y} - u_y(\mathbf{r}') \cdot \frac{\partial\omega_\varepsilon(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial z} \right) dV' =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_V \omega_\varepsilon\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right) u_z(\mathbf{r}')\,dV' - \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_V \omega_\varepsilon\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right) u_y(\mathbf{r}')\,dV' =$$

$$= \left(\mathrm{rot}\int\limits_V \omega_\varepsilon\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right) \mathbf{u}(\mathbf{r}')\,dV' \right)_x .$$

Аналогичные равенства мы можем получить для y- и z-компоненты $\mathrm{rot}\int\limits_V \omega_\varepsilon\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)\mathbf{u}(\mathbf{r}')\,dV'$. То есть, каждая компонента $\mathrm{rot}\int\limits_V \omega_\varepsilon(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,\mathbf{u}(\mathbf{r}')\,dV'$ сходится при $\varepsilon \to 0$ по среднеквадратичной норме к соответствующей компоненте $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

Интеграл $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{r}) = \int\limits_V \omega_\varepsilon(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,\mathbf{u}(\mathbf{r}')\,dV'$ представляет собой бесконечно гладкую и квадратично суммируемую векторную функцию, сходящуюся при $\varepsilon \to 0$ по норме $\mathbf{L}_2(V)$ к векторному полю $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. При этом, $\mathrm{rot}\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{r})$ сходится при $\varepsilon \to 0$ в $L_2(V)$ к $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Следовательно, поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ является пределом при $\varepsilon \to 0$поля $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{r}) \in H'$ по норме (4), то есть принадлежит пополнению H'.

Теорема 2. $\mathbf{K}' \subseteq H(\mathrm{rot},V)$, *причем обобщенный ротор любого векторного поля из пространства* $\mathbf{K}'$ *в областях* $\Omega_i, \Omega \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \bar{\Omega}_i \right)$ *и* $V \backslash \bar{\Omega}$ *совпадает с обычным ротором с точностью до замены компонент на эквивалентные функции.*

Доказательство. Докажем, что равенство (6) выполняется для любого поля $\mathbf{q}(\mathbf{r}) \in \mathbf{D}$, если положить $\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{u}$. Докажем это сначала для области Ω, не содержащей никакие подобласти-дефекты. Для этого рассмотрим открытый шар O_R с центром в начале координат и достаточно большим радиусом R, полностью содержащий область Ω и носитель поля $\mathbf{q}$ (рис. 2).

Рассмотрим векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \in \mathbf{K}'$. Для области Ω и области $V \backslash \bar{\Omega}$ можно записать следующее равенство:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{q}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}) \text{ - } \mathrm{div}\left[\mathbf{u}(\mathbf{r}) \times \mathbf{q}(\mathbf{r})\right],$$

где квадратные скобки со знаком "$\times$" внутри означают векторное произведение.

Заметим, что в силу свойств векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ векторное произведение $[\mathbf{u}\times\mathbf{q}]$ непрерывно дифференцируемо во внутренних точках Ω и в точках, внешних по отношению к Ω, причем его компоненты и их производные допускают непрерывное продолжение на границу Ω изнутри и снаружи области. Это означает, в частности, что к $[\mathbf{u}\times\mathbf{q}]$ можно применить теорему Гаусса–Остроградского для областей Ω и $O_R\backslash\Omega$:

$$\int\limits_V \mathbf{u}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})\,dV = \int\limits_{O_R} \mathbf{u}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})\,dV = \int\limits_{O_R\backslash\bar{\Omega}} \mathbf{u}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})\,dV + \int\limits_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})\,dV =$$
$$= \int\limits_{O_R\backslash\bar{\Omega}} \mathbf{q}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})\,dV - \oint\limits_{S_R} [\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{q}(\mathbf{r})]\,\mathbf{e}(\mathbf{r})\,dS + \oint\limits_{\mathrm{Fr}(\Omega)} [\mathbf{u}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r})\times\mathbf{q}(\mathbf{r})]\,\mathbf{n}(\mathbf{r})\,dS +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})\,dV - \oint\limits_{\mathrm{Fr}(\Omega)} [\mathbf{u}_{\mathrm{int}}(\mathbf{r})\times\mathbf{q}(\mathbf{r})]\,\mathbf{n}(\mathbf{r})\,dS \qquad (7)$$

где S_R — сфера, ограничивающая шар O_R; $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ — вектор внешней единичной нормали к S_R; dS — элемент поверхности, по которой берется поверхностный интеграл; Fr — обозначение границы множества; $\mathbf{u}_{\mathrm{ext}}$ и $\mathbf{u}_{int}$ — предельные значения поля $\mathbf{u}$ на границе области Ω, соответственно, снаружи и изнутри Ω; $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к $\mathrm{Fr}(\Omega)$, внешней по отношению к Ω. В знаках (7) учтено, что нормаль $\mathbf{n}$ является внутренней нормалью для $O_R\backslash\Omega$.

Заметим, что фигурирующий в равенстве (7) поверхностный интеграл по сфере S_R равен 0, так как эта сфера проходит за пределами supp$\mathbf{q}$. При этом, в поверхностных интегралах по $\mathrm{Fr}(\Omega)$, в силу свойств векторного произведения, участвуют только касательные составляющие $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, перпендикулярные $\mathbf{n}$. Так как $\mathbf{u}_{\tau,\mathrm{int}} = \mathbf{u}_{\tau,\mathrm{ext}}$, то поверхностные интегралы по $\mathrm{Fr}(\Omega)$ взаимно уничтожаются. Следовательно,

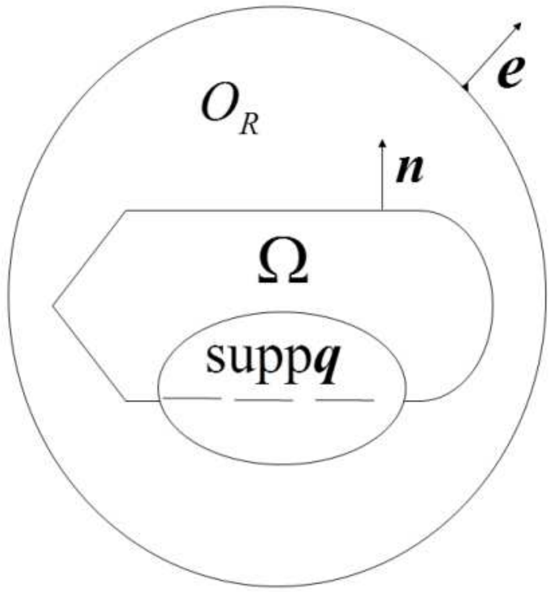

Рис. 2. *Область Ω, носитель $\boldsymbol{q}$ и шар O_R.*

$$\int\limits_V \mathbf{u}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})\,dV = \int\limits_{O_R\backslash\bar{\Omega}} \mathbf{q}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})\,dV + \int\limits_{\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})\,dV = \int\limits_V \mathbf{q}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})\,dV.$$

Таким образом, для области Ω, не содержащей дефектные подобласти, теорема доказана. Для областей с дефектами доказательство теоремы аналогично, но более громоздко: на границе каждой области Ω_i поверхностные интегралы от $[\mathbf{u}_{\mathrm{int}}\times\mathbf{q}]\,\mathbf{n}$ и $[\mathbf{u}_{\mathrm{ext}}\times\mathbf{q}]\,\mathbf{n}$ взаимно уничтожаются.

Из доказанной теоремы и указанного ранее включения $H'\subseteq\mathbf{K}'$ следует, что пополнение H' и $\mathbf{K}'$ по норме (4) совпадают. То есть, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. $\mathbf{K} = H(\mathrm{rot},V)$.

Таким образом, рассматривая пространство $\mathbf{K}$, можно пользоваться всеми свойствами пространства $H(\mathrm{rot},V)$: эти пространства совпадают.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Представим систему уравнений (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\mathbf{r})\,\mathbf{E}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{E}, \end{cases} \tag{8}$$

где роторы будем понимать в обобщенном смысле определения 1. Предполагается, что решение этой системы следует искать в функциональном пространстве $H(\mathrm{rot},\,V)$: в любой момент времени $t>0$ $\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\in H(\mathrm{rot},V)$. Также предполагается, что начальные условия (3) удовлетворяют тому же требованию: $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}),\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\in H(\mathrm{rot},V)$. Производные полей $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ по времени подразумеваются в смысле формулы (5).

Для доказательства существования и единственности решения рассматриваемой начально-краевой задачи исследуем свойства оператора, определяющего правую часть (8). Этот оператор, который мы обозначим как $\widehat{A}$, действует на упорядоченные пары векторных полей $(\mathbf{u}(\mathbf{r})\,;\mathbf{v}(\mathbf{r}))$, каждое из которых принадлежит $H(\mathrm{rot},V)$, по следующей формуле:

$$\widehat{A}(\mathbf{u};\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\mathbf{r})\,\mathbf{u}(\mathbf{r})\,; -\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})\right).$$

То есть, этот оператор действует из пространства $(H(\mathrm{rot},V))^2$ (декартов квадрат $H(\mathrm{rot},V)$) в пространство $(\mathbf{L}_2(V))^2$ (декартов квадрат $\mathbf{L}_2(V)$).

Перечислим некоторые очевидные свойства декартовых квадратов, непосредственно связанные с аналогичными свойствами $H(\mathrm{rot},V)$ и $\mathbf{L}_2(V)$. Пространство $(\mathbf{L}_2(V))^2$ — полное. Пространство $(H(\mathrm{rot},V))^2$ — всюду плотное подпространство $(\mathbf{L}_2(V))^2$ (так как $\mathbf{D}\subseteq H'\subseteq H(\mathrm{rot},V)\subseteq \mathbf{L}_2(V)$ и $\mathbf{D}$ плотно в $\mathbf{L}_2(V)$). Сходимость последовательности $(\mathbf{u}_n(\mathbf{r})\,;\mathbf{v}_n(\mathbf{r}))$ в $(\mathbf{L}_2(V))^2$ равносильна сходимости отдельно взятых компонент $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}_n(\mathbf{r})$ в $\mathbf{L}_2(V)$. Сходимость же $(\mathbf{u}_n(\mathbf{r})\,;\mathbf{v}_n(\mathbf{r}))$ в $(H(\mathrm{rot},V))^2$ равносильна сходимости $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}_n(\mathbf{r})$, $\mathrm{rot}\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ и $\mathrm{rot}\mathbf{v}_n(\mathbf{r})$ в $\mathbf{L}_2(V)$. Из этого обстоятельства непосредственно следует теорема.

Теорема 4. *Оператор $\widehat{A}$ — замкнутый с плотной областью определения.*

Для доказательства менее очевидных свойств оператора $\widehat{A}$ нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Для любых векторных полей $\mathbf{u}(\mathbf{r}),\mathbf{v}(\mathbf{r})\in H(\mathrm{rot},V)$ справедливо интегральное равенство*

$$\int\limits_V (\mathbf{u}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}))\,dV = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Сначала докажем это равенство для $\mathbf{u}(\mathbf{r}),\mathbf{v}(\mathbf{r})\in H'$. Заметим, что интеграл в (9) сходится в силу квадратичной суммируемости $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ и их роторов. Из векторного анализа известно соотношение:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \operatorname{div}[\mathbf{v}(\mathbf{r})\times\mathbf{u}(\mathbf{r})]\,.$$

Следовательно, по теореме Остроградского-Гаусса

$$\int\limits_V (\mathbf{u}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}))\,dV = \int\limits_V \operatorname{div}[\mathbf{v}(\mathbf{r})\times\mathbf{u}(\mathbf{r})]\,dV =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{O_R}\operatorname{div}[\mathbf{v}(\mathbf{r})\times\mathbf{u}(\mathbf{r})]\,dV = \lim_{R\to+\infty}\oint\limits_{S_R}[\mathbf{v}(\mathbf{r})\times\mathbf{u}(\mathbf{r})]\,\mathbf{e}(\mathbf{r})\,dS,$$

причем в силу сходимости объемного интеграла по V указанный предел поверхностного интеграла существует и конечен. Обозначим поверхностный интеграл как $I(R)$.

Заметим, что, в силу квадратичной суммируемости $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, все парные произведения компонент этих векторных полей абсолютно интегрируемы по V; следовательно, сходится интеграл от модуля $[\mathbf{v}(\mathbf{r})\times\mathbf{u}(\mathbf{r})]$ и абсолютно сходится интеграл от $[\mathbf{v}(\mathbf{r})\times\mathbf{u}(\mathbf{r})]\,\mathbf{e}(\mathbf{r})$ по любой области вида $V\backslash O_{R_0}$ при любом положительном значении радиуса R_0 (в начале координат смешанное произведение $[\mathbf{v}(\mathbf{r})\times\mathbf{u}(\mathbf{r})]\,\mathbf{e}(\mathbf{r})$ не определено, так как $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ не определен). Запишем этот интеграл в сферических координатах:

$$\int\limits_{V\backslash O_{R_0}}[\mathbf{v}(\mathbf{r})\times\mathbf{u}(\mathbf{r})]\,\mathbf{e}(\mathbf{r})\,dV=\int\limits_{R_0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}[\mathbf{v}(R,\theta,\varphi)\times\mathbf{u}(R,\theta,\varphi)]\,\mathbf{e}(R,\theta,\varphi)\,R^2d\varphi d\theta dR=$$

$$=\int\limits_{R_0}^{+\infty}I(R)\,dR,$$

где θ и φ — соответственно, азимутальный и полярный углы. Вообще, из сходимости несобственного интеграла первого рода не следует, что подынтегральная функция на бесконечности стремится к нулю. Однако, если у нее предел на бесконечности есть (а выше мы установили, что $\lim\limits_{R\to+\infty}I(R)$ существует и конечен), то этот предел, при условии сходимости интеграла, должен быть равен нулю. То есть, $\lim\limits_{R\to+\infty}I(R)=0$ и равенство (10) для пространства H' доказано.

Для более общего случая, при $\mathbf{u}(\mathbf{r}),\mathbf{v}(\mathbf{r})\in H(\mathrm{rot},V)$, следует взять последовательности $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})\in H'$ и $\mathbf{v}_n(\mathbf{r})\in H'$, сходящиеся, соответственно, к $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ по норме (4). По доказанному,

$$\int\limits_V(\mathbf{u}_n(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{v}_n(\mathbf{r})-\mathbf{v}_n(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}_n(\mathbf{r}))\,dV=0. \tag{10}$$

При этом, в силу квадратичной сходимости $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}_n(\mathbf{r})$, $\mathrm{rot}\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ и $\mathrm{rot}\mathbf{v}_n(\mathbf{r})$, соответственно, к $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})$, мы можем перейти в (10) к пределу $n\to+\infty$ и получить равенство (9) уже для любых $\mathbf{u}(\mathbf{r}),\mathbf{v}(\mathbf{r})\in H(\mathrm{rot},V)$.

Теорема 5. *Уравнение вида*

$$\widehat{A}(\mathbf{u};\mathbf{v})-p(\mathbf{u};\mathbf{v})=(\mathbf{f}(\mathbf{r});\mathbf{g}(\mathbf{r}))\,, \tag{11}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{r}),\mathbf{g}(\mathbf{r})\in\mathbf{L}_2(V)$, *имеет в пространстве* $(H(\mathrm{rot},V))^2$ *при* $p>0$ *ровно одно решение* $(\mathbf{u}(\mathbf{r});\mathbf{v}(\mathbf{r}))$, *причем это решение удовлетворяет неравенству*

$$\sqrt{\varepsilon_0\left\|\mathbf{u}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\mathbf{v}\right\|_2^2}\leqslant\frac{1}{p}\sqrt{\varepsilon_0\left\|\mathbf{f}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\mathbf{g}\right\|_2^2}. \tag{12}$$

Доказательство. Уравнение (11) в подробной покомпонентной форме имеет следующий вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\varepsilon_0}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\mathbf{r})\,\mathbf{u}-p\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{r})\\ -\dfrac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}-p\mathbf{v}=\mathbf{g}(\mathbf{r})\end{array}\right.. \tag{13}$$

Покажем, что соответствующая однородная система (при $\mathbf{f}(\mathbf{r})\equiv0$ и $\mathbf{g}(\mathbf{r})\equiv0$) имеет только тривиальное решение. Для этого умножим (при равных нулю правых частях) первое уравнение на $\mathbf{u}$, второе — на $\mathbf{v}$ и проинтегрируем по V:

$$\int\limits_V (\mathbf{u}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}))\,dV - \int\limits_\Omega \sigma(\mathbf{r})\,|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2\,dV - \varepsilon_0 p\,\|\mathbf{u}\|_2^2 - \mu_0 p\,\|\mathbf{v}\|_2^2 = 0.$$

Первое слагаемое в этом равенстве (интеграл) равно нулю в силу леммы 1. Тогда, в силу неотрицательности $\sigma(\mathbf{r})$ и по общим свойствам норм, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \equiv 0$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv 0$.

Теперь выполним аналогичные действия с умножением и интегрированием для неоднородной системы (13):

$$-p\varepsilon_0\,\|\mathbf{u}\|_2^2 - p\mu_0\,\|\mathbf{v}\|_2^2 - \int\limits_\Omega \sigma(\mathbf{r})\,|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2\,dV = \varepsilon_0 \int\limits_V \mathbf{f}(\mathbf{r})\,\mathbf{u}(\mathbf{r})\,dV + \mu_0 \int\limits_V \mathbf{g}(\mathbf{r})\,\mathbf{v}(\mathbf{r})\,dV$$

Заметим, что левая часть получившегося равенства неположительна при всех $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$; то есть модуль левой части можно получить из нее самой умножением на -1. Тогда, в силу неравенства Коши-Буняковского,

$$p\varepsilon_0\,\|\mathbf{u}\|_2^2 + p\mu_0\,\|\mathbf{v}\|_2^2 + \int\limits_\Omega \sigma(\mathbf{r})\,|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2\,dV = \left|\varepsilon_0 \int\limits_V \mathbf{f}(\mathbf{r})\,\mathbf{u}(\mathbf{r})\,dV + \mu_0 \int\limits_V \mathbf{g}(\mathbf{r})\,\mathbf{v}(\mathbf{r})\,dV\right|$$

$$\leqslant \varepsilon_0\,\|\mathbf{u}\|_2\,\|\mathbf{f}\|_2 + \mu_0\,\|\mathbf{v}\|_2\,\|\mathbf{g}\|_2 = \sqrt{\varepsilon_0}\,\|\mathbf{u}\|_2 \cdot \sqrt{\varepsilon_0}\,\|\mathbf{f}\|_2 + \sqrt{\mu_0}\,\|\mathbf{v}\|_2 \cdot \sqrt{\mu_0}\,\|\mathbf{g}\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\varepsilon_0\,\|\mathbf{u}\|_2^2 + \mu_0\,\|\mathbf{v}\|_2^2} \cdot \sqrt{\varepsilon_0\,\|\mathbf{f}\|_2^2 + \mu_0\,\|\mathbf{g}\|_2^2}.$$

Следовательно, в силу неотрицательности $\sigma(\mathbf{r})$,

$$p\varepsilon_0\,\|\mathbf{u}\|_2^2 + p\mu_0\,\|\mathbf{v}\|_2^2 \leqslant \sqrt{\varepsilon_0\,\|\mathbf{u}\|_2^2 + \mu_0\,\|\mathbf{v}\|_2^2} \cdot \sqrt{\varepsilon_0\,\|\mathbf{f}\|_2^2 + \mu_0\,\|\mathbf{g}\|_2^2}.$$

Выполнение неравенства (12) очевидно при $\|\mathbf{u}\|_2 = \|\mathbf{v}\| = 0$; если же $\|\mathbf{u}\|_2 \neq 0$ или $\|\mathbf{v}\|_2 \neq 0$, то, чтобы получить (12), нужно последнее из полученных неравенств разделить на $p\sqrt{\varepsilon_0\,\|\mathbf{u}\|_2^2 + \mu_0\,\|\mathbf{v}\|_2^2}$.

Теперь докажем существование решения системы (13) при любых квадратично суммируемых правых частях. Система интегро-дифференциальных уравнений, альтернативная системе (13), имеет следующий вид [1]:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbf{u}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathrm{rot} \int\limits_V G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathbf{g}(\mathbf{r}')\,dV' + \\ &+\frac{\mathrm{grad\ div} - p^2\varepsilon_0\mu_0}{p\varepsilon_0}\left[\int\limits_\Omega G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\sigma(\mathbf{r}')\mathbf{u}(\mathbf{r}')dV' + \varepsilon_0 \int\limits_V G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathbf{f}(\mathbf{r}')\,dV'\right], \\ &\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{grad\,div} - p^2\varepsilon_0\mu_0}{p} \int\limits_V G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathbf{g}(\mathbf{r}')\,dV' + \\ &+\mathrm{rot}\left[\int\limits_\Omega G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\sigma(\mathbf{r}')\,\mathbf{u}(\mathbf{r}')\,dV' + \varepsilon_0 \int\limits_V G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathbf{f}(\mathbf{r}')dV'\right], \end{aligned}\right. \tag{14}$$

где $G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}') = \exp\left(-p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)/4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ (следует заметить, что условия и характер “равносильности” систем (13) и (14) в каждом конкретном случае нужно тщательно изучать).

Объемный потенциал $\widehat{P}[\mathbf{w}](\mathbf{r}) = \int\limits_V G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathbf{w}(\mathbf{r}')\,dV'$ при $\mathbf{w}(\mathbf{r}) \in \mathbf{L}_2(V)$ непрерывен во всех точках V, имеет квадратично суммируемые в V первые и вторые обобщенные производные по Соболеву, а также удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца [1]:

$$\left(\mu_0\varepsilon_0 p^2 - \Delta\right)\widehat{P}[\mathbf{w}](\mathbf{r}) = \mathbf{w}(\mathbf{r}). \tag{15}$$

Следовательно, все дифференциальные операции с $\widehat{P}[\mathbf{f}](\mathbf{r})$ и $\widehat{P}[\mathbf{g}](\mathbf{r})$, фигурирующие в (1), определены в $\mathbf{L}_2(V)$.

Из оценок для нормы оператора $\dfrac{\operatorname{grad}\operatorname{div} - p^2\varepsilon_0\mu_0}{p\varepsilon_0}\widehat{P}$ [2], [3] следует, что при $p > 10\sigma_0/\varepsilon_0$, где $\sigma_0 = \sup\sigma(\mathbf{r})$, у первого уравнения системы (14) существует решение $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \in \mathbf{L}_2(V)$; тогда $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \in \mathbf{L}_2(V)$ находим из второго уравнения (14) непосредственной подстановкой $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. То есть, решение системы (14) $\mathbf{u}(\mathbf{r}), \mathbf{v}(\mathbf{r}) \in \mathbf{L}_2(V)$ существует.

Далее заметим, что если у некоторого скалярного поля $h(\mathbf{r})$ есть первые обобщенные производные по Соболеву, квадратично суммируемые в V, то для существования обобщенного ротора от $\operatorname{grad} h(\mathbf{r})$ нет необходимости в существовании отдельно взятых вторых обобщенных производных по Соболеву. В такой ситуации $\operatorname{rot}\operatorname{grad} h(\mathbf{r})$ по определению 1 всегда равен нулевому вектору:

$$\int\limits_V \operatorname{grad} h(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})\,dV = -\int\limits_V h(\mathbf{r})\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})\,dV = 0.$$

Следовательно, после применения операции rot(в смысле определения 1) к обоим уравнениям системы (14), с учетом указанного свойства градиента и тождества (15), мы приходим к системе уравнений (13) для $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. То есть, решение системы (14) является решением системы (13), что означает существование решения уравнения (11).

Обозначим как $\widehat{I}$ тождественный оператор в $\mathbf{L}_2(V)$. Норму в пространстве $(\mathbf{u}(\mathbf{r});\mathbf{v}(\mathbf{r})) \in (\mathbf{L}_2(V))^2$ определим выражением $\sqrt{\varepsilon_0\|\mathbf{u}\|_2^2 + \mu_0\|\mathbf{v}\|_2^2}$. Тогда доказанная теорема позволяет утверждать, что при $p > 10\sigma_0/\varepsilon_0$ оператор $\left(\widehat{A} - p\widehat{I}\right)^{-1}$ существует, определен на всем пространстве $\mathbf{L}_2(V)$ и его норма удовлетворяет неравенству

$$\left\|\left(\widehat{A} - p\widehat{I}\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{p} < \frac{1}{p - 10\sigma_0/\varepsilon_0}.$$

Следовательно, по теореме Хилле-Иосиды [7], решение исследуемой начально-краевой задачи существует, единственное и непрерывно зависит от начальных данных.

4. ДИВЕРГЕНЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Заметим, что в системе (1) есть только уравнения с роторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, но нет уравнений с дивергенциями, которые входят в полную систему уравнений Максвелла. Однако, единственность решения установлена и без уравнений с дивергенциями.

С использованием формальных приемов, применимых, строго говоря, к достаточно гладким векторным полям, можно показать, что дивергенции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ однозначно определяются уравнениями с роторами и начальными условиями (то есть, уравнения с дивергенциями являются, по сути, ограничениями на начальные условия). Причем, если любую $\operatorname{div}\mathbf{E} \not\equiv 0$ можно считать приемлемой (плотность электрического заряда может быть любой), то $\operatorname{div}\mathbf{H}$ всегда должна быть равна нулю, что достигается за счет начальных данных [5].

В задаче (1)-(3), при рассмотренной обобщенной ее постановке, поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ могут быть не гладкими, но дивергенция $\mathbf{E}$ определена хотя бы в классе обобщенных функций-распределений. Представляется необходимым доказать для этой начально-краевой задачи, что условие равенства нулю дивергенции $\mathbf{H}$ будет выполнено при соответствующих начальных данных, если распространить определение дивергенции на некоторые негладкие векторные поля.

Обозначим как $L_{\mathrm{loc}}(V)$ пространство локально суммируемых в V скалярных полей; D — пространство финитных бесконечно дифференцируемых в V скалярных полей.

Определение 2. *Скалярное поле $h \in L_{\mathrm{loc}}(V)$ будем называть обобщенной дивергенцией векторного поля $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}(V)$ и обозначать как $\mathrm{div}\mathbf{u}$, если для любого поля $\psi \in D$ выполняется следующее равенство [4]:*

$$\int\limits_V \mathbf{u}(\mathbf{r}) \,\mathrm{grad}\, \psi(\mathbf{r})\, dV = -\int\limits_V h(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r})\, dV.$$

Обобщенная дивергенция определяется однозначно с точностью до замены на эквивалентную функцию, причем определяется обычным выражением, если у поля есть соответствующие обобщенные частные производные по Соболеву.

Теорема 6. *Если обобщенная дивергенция $\mathbf{H}$ в начальный момент времени равна нулю, то она определена во все последующие моменты времени, причем тоже равна нулю.*

Доказательство. Сначала докажем, что интеграл $\int\limits_V \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{grad}\psi(\mathbf{r})\,dV$ не меняется с течением времени:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{grad}\psi(\mathbf{r})\,dV = \int\limits_V \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,\mathrm{grad}\,\psi(\mathbf{r})\,dV = -\frac{1}{\mu_0}\int\limits_V \mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{grad}\psi(\mathbf{r})\,dV =$$

$$= -\int\limits_V \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\psi(\mathbf{r})\,dV = 0.$$

В первом из этих четырех равенств учтено, что дифференцируемость $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ по времени, даже по среднеквадратичной норме, влечет обычную дифференцируемость интеграла по t.

Если в начальный момент $t = 0$ обобщенная дивергенция $\mathbf{H}$ равна нулю, то интеграл $\int\limits_V \mathbf{H}(\mathbf{r},0)\,\mathrm{grad}\psi(\mathbf{r})\,dV$ равен нулю. Следовательно, при всех $t \geqslant 0$

$$\int\limits_V \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{grad}\psi(\mathbf{r})\,dV = 0.$$

В силу определения 2, это означает, что обобщенная дивергенция $\mathbf{H}$ определена в любой момент времени и равна нулю.

Таким образом, для начально-краевой задачи электродинамики в рассмотренной постановке условие равенства нулю $\mathrm{div}\mathbf{H}$ является лишь ограничением, накладываемым на начальные условия (только дивергенцию следует понимать в обобщенном смысле определения 2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выводы данной статьи, касающиеся существования, единственности и непрерывной зависимости решения начально-краевой задачи электродинамики от начальных данных, получены для неферромагнитного металла. Однако, методы и приемы, использовавшиеся в статье, а также промежуточные результаты, представляются достаточно общими и широкими, чтобы распространить основные выводы статьи на более сложный случай ферромагнитных проводников. Это обобщение является основной целью дальнейших исследований по тематике статьи.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 13-01-00090.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дякин, В. В. Задачи электродинамики в неразрушающем контроле / В. В. Дякин, В. А. Сандовский. — Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2008. — 390 с.

2. Дякин, В. В. Начально-краевая задача и интегродифференциальные уравнения электродинамики для неоднородного проводящего тела / В. В. Дякин, С. В. Марвин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 2. — С. 288–296.

3. Марвин, С. В. Нестационарная краевая задача электродинамики для немагнитного проводящего образца / С. В. Марвин, В. В. Дякин // Электричество. — 2008. — № 12. — С. 30–36.

4. Калинин, А. В. Математические задачи физической диагностики. Корректность задач электромагнитной теории в стационарном и квазистационарном приближении / А.В. Калинин. — Нижний Новгород: ННГУ, 2007. — 121 с.

5. Дюво, Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

6. Павлова, М. Ф. Пространства Соболева (теоремы вложения) / М. Ф. Павлова, М. Р. Тимербаев. — Казань: КГУ, 2010. — 123 с.

7. Рихтмайер, Р. Принципы современной математической физики / Р. Рихтмайер. — М.: Мир, 1982. — 488 с.

8. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

9. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

10. Баев, А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

11. Баев, А. Д. Теоремы о “следах” для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 63–75.

REFERENCES

1. Dyakin V.V., Sandovskii V.A. Electrodynamics problems in the nondestructive testing. [D'akin V.V., Sandovskij V.A. Zadachi elektrodinamiki v nerazrushaiuschem kontrole]. Yekaterinburg: IFM UrO RAN, 2008, 390 p.

2. Dyakin V.V., Marvin S.V. Initialboundary value problem and integrodifferincial equations electrodynamics for an inhomogeneous conductive body. [D'akin V.V., Marvin S.V. Nachal'nokraevaia zadacha i integrodifferentzial'nie uravnenija elektrodinamiki dlia neodnorodnogo provod'aschego tela]. *Zhurnal vichislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational mathematics and mathematical physics*, 2008, vol. 48, no. 2, pp. 288–296.

3. Marvin S.V., Dyakin V.V. Nonstationary boundary-value problem of electrodynamics for the nonmagnetic conducting sample. [Marvin S.V., D'akin V.V. Nestatzionarnaia zadacha elektrodinamiki dlia nemagnitnogo provodiaschego obraztza]. *Elektrichestvo — Electricity*, 2008, no. 12, pp. 30–36.

4. Kalinin A.V. Mathematical problems of physical diagnostics. Correctness of problems of the electromagnetic theory in the stationary and quasi-stationary approximation. [Kalinin A.V. Matematicheskie zadachi fizicheskoj diagnostiki. Korrektnost' zadach v statzionarnom i kvazistatzionarnom priblizhenii]. Nizhny Novgorod: NNGU, 2007, 121 p.

5. Duvo R., Lions J.-L. Inequalities in mechanics and physics. [D'uvo R., Lions J.-L. Neravenstva v mehanike i fizike]. Moscow: Nauka, 1980, 384 p.

6. Pavlova M.F., Timerbaev M.R. Spaces of Sobolev (theorems of investment). [Pavlova M.F., Timerbaev M.R. Prostranstva Soboleva (teoremi vlozheniia)]. Kazan: KGU, 2010, 123 p.

7. Richtmyer R. Principles of advanced mathematical physics. [Rihtmaier R. Printzipi sovremennoj matematicheskoj fiziki]. Moscow: Mir, 1982, 488 p.

8. Baev A. D., Kobylinskii P. A., Davidova M. B. On the Properties of Switching a Class of Degenerate Pseudo-Differential Operators with the Operators Of Differentiation. [Baev A. D., Kobylinskij P. A., Davydova M. B. O svojstvax kommutacii odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov s operatorami differencirovaniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 102–108.

9. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

10. Baev A. D., Kovalevsky R. A. Theorems on boundedness and composition for a class of weighted pseudodifferential operators. [Baev A. D., Kovalevskij R. A. Teoremy ob ogranichennosti i kompozicii dlya odnogo klassa vesovyx psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 39–49.

11. Baev A. D., Kovalevsky R. A., Davidova M. B.. [Theorems about the «trecas» for a class of pseudodifferential operators with degeneracy]. *Baev A. D., Kovalevskij R. A., Davydova M. B. Teoremy o "sledax" dlya odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem — Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2015, no. 2, pp. 63–75

Марвин С.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры вычислительных методов и уравнений математической физики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация
E-mail: s.v.marvin@yandex.ru
Тел.: +7(343)375–48–78

Marvin S.V., c.f.-m.s., associate professor of the department of computational method and equations of mathematical physics, Ural federal university named after the first president of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation
E-mail: s.v.marvin@yandex.ru
Tel.: +7(343)375–48–78