УДК 517.911.5

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕВЫПУКЛОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ*

С. В. Корнев

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 17.02.2015 г.

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию асимптотического поведения траекторий систем, описываемых дифференциальными включениями, правая часть которых не является выпуклозначной. А именно, в работе рассматриваются дифференциальные включения, правая часть которых является мультиотображением с компактными значениями, удовлетворяет условиям почти полунепрерывности снизу и подлинейного роста на каждом компактном интервале. Применение теории мультиотображений и метода негладких направляющих потенциалов позволяет получить верхние оценки нормы траекторий рассматриваемых систем на всей числовой оси. Кроме того, в работе приводится пример негладкой направляющей функции для такого класса систем.

Ключевые слова: дифференциальное включение, направляющая функция, асимптотическое поведение решений.

ON ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS FOR DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH NONCONVEX RIGHT-HAND SIDE

S. V. Kornev

Abstract. The present paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of trajectories of systems described by differential inclusions with nonconvex right-hand side. More precisely, in this paper we consider the differential inclusions, the right-hand side of which is multimap with compact values and satisfies almost lower semicontinuous condition and sublinear growth condition on each compact interval. Applying the multimap theory and the method of nonsmooth guiding potential provides an upper bounds for the norms of trajectories for such systems on the whole real line. In addition, the paper presents an example of a nonsmooth guiding function for this class of systems.

Keywords: differential inclusion, guiding function, asymptotic behavior of solutions.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод направляющих функций, основу которого заложили разработки М. А. Красносельского и А. И. Перова (см., например, [1]), был распространен на случай дифференциальных включений и использован для исследования их периодических решений (см, например, [2] – [4]). В настоящей работе, развивая подход, предложенный C. Avramescu для дифференциальных уравнений (см. [5]), предлагается использовать негладкую направляющую функцию для

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 14-01-00468, 14-01-92004) и Минобрнауки России в рамках базовой части госзадания (проект № 3488).

исследования асимптотического поведения решений дифференциальных включений, правая часть которых не является выпуклозначной. Для дифференциальных уравнений этот тип поведения тесно связан с существованием гетероклинических и гомоклинических решений. Идея установления того факта, что решение $x(\cdot)$ является гомоклиническим, сводится к получению оценки вида (см., например, [6])

$$\|x(t)\| \leqslant k \cdot h(t), \quad t \in \mathbb{R},\ k > 0, \tag{1}$$

где $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что

$$\lim_{t \to \pm\infty} h(t) = 0.$$

Отметим, что метод негладких направляющих функций использовался ранее, например, в [4] и [7], для исследования задачи о периодических решениях дифференциальных включений.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (мультиотображений) (см., например, [2], [3], [8], [9]). Напомним некоторые из них.

Пусть E — сепарабельное банахово пространство; $L^1([a,b];E)$ обозначает банахово пространство суммируемых по Бохнеру функций $f : [a,b] \to E$.

Определение 1. Непустое множество $M \subset L^1([a,b];E)$ называется (см., например, [8]) разложимым, если для любых $f, g \in M$ и любого измеримого по Лебегу множества $m \subset [a,b]$ выполнено

$$f\kappa_m + g\kappa_{([a,b]\setminus m)} \in M,$$

где κ_m — характеристическая функция множества m.

Пусть (X,d_X) и (Y,d_Y) — метрические пространства. Символами $P(Y)$ и $K(Y)$ обозначим совокупности всех непустых и, соответственно, компактных подмножеств пространства Y. Если Y — нормированное пространство, то символом $Kv(Y)$ обозначается совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y.

Определение 2. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0,x) < \delta$ следует, что $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ U_ε обозначает ε-окрестность множества.

Определение 3. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется пн. св., если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

Определение 4. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным снизу (пн. сн.) в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $F(x') \cap V \neq \varnothing$ для любого $x' \in U(x_0)$.

Определение 5. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется пн. сн., если оно пн. сн. в каждой точке $x \in X$.

Мультиотображение будем называть мультифункцией, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

Определение 6. Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется сечением мультиотображения F, если
$$f(x) \in F(x) \quad \text{для каждого } \ x \in X.$$

В дальнейшем используется следующее утверждение Брессана-Коломбо-Фрышковского о непрерывном сечении (см., например, [10], [11]).

Лемма 1. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство. Тогда любое пн. сн. мультиотображение $F : X \multimap L^1([a,b];E)$ с замкнутыми разложимыми значениями имеет непрерывное сечение.*

Пусть I — замкнутое подмножество R, снабженное мерой Лебега.

Определение 7. Мультифункция $F : I \to K(Y)$ называется измеримой, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз
$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset Y\}$$
— измеримое подмножество I.

Замечание 8. Всякая пн.сн. мультифункция измерима.

Замечание 9. Всякая измеримая мультифункция $F : I \to K(Y)$ обладает измеримым сечением, то есть существует такая измеримая функция $f : I \to Y$, что $f(t) \in F(t)$ почти для всех $t \in I$.

Определение 10. Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ называется почти пн. сн., если существует последовательность непересекающихся компактных множеств $\{I_n\}$, $I_n \subseteq I$, таких, что

(i) $\mu(I \setminus \bigcup\limits_n I_n) = 0$, где μ — мера Лебега;

(ii) сужение F на каждое множество $J_n = I_n \times Y$ является пн. сн. мультиотображением.

Будем рассматривать задачу о существовании решений, удовлетворяющих приведенной выше оценке (1), для дифференциального включения следующего вида:
$$x'(t) \in F(t,x(t)), \tag{2}$$
в предположении, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет указанным ниже условиям:

F_{1_∞}) мультиотображение $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ почти пн. сн. на каждом компактном интервале $I \in \mathbb{R}$;

F_{2_∞}) существует положительная суммируемая на каждом компактном интервале $I \in \mathbb{R}$ функция $\alpha(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, такая, что
$$\|F(t,x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \leqslant \alpha(t)(1 + \|x\|)$$
для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и почти для всех $t \in \mathbb{R}$.

Замечание 11. При выполнении условий F_{1_∞}) и F_{2_∞}) определен на каждом компактном интервале $I \in \mathbb{R}$ мультиоператор суперпозиции
$$\mathcal{P}_F \, : \, C(I;\mathbb{R}^n) \multimap P(L^1(I;\mathbb{R}^n)),$$
сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $t \multimap F(t,x(t))$. Известно (см., например, [8]), что этот мультиоператор пн. сн. и имеет замкнутые разложимые значения. Следовательно, согласно лемме 1, мультиоператор $\mathcal{P}_F$ имеет непрерывное сечение.

Под решением включения (2) на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ мы будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую почти в каждой точке включению (2) и начальному условию

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

Напомним некоторые понятия негладкого анализа (см., например, [12]).

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана локально липшицева функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ обобщенная производная $V^0(x;\nu)$ функции $V(\cdot)$ в точке x по направлению ν задается выражением

$$V^0(x;\nu) = \varlimsup_{\substack{z\to x\\ t\to 0+}} \frac{V(z+t\nu) - V(z)}{t},$$

где $z \in \mathbb{R}^n$. Тогда обобщенный градиент Кларка $\partial V(x)$ функции $V(\cdot)$ в точке x определяется следующим образом:

$$\partial V(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \quad \langle y,\nu\rangle \leqslant V^0(x;\nu) \quad \text{для всех} \;\; \nu \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Известно, что мультиотображение $\partial V : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ имеет выпуклые компактные значения и полунепрерывно сверху (см., например, [12]). В частности, это означает, что для каждой непрерывной функции $x : I \to \mathbb{R}^n$ множество суммируемых сечений мультифункции $t \multimap \partial V(x(t))$ непусто.

Напомним (см., например, [12]), что локально липшицева функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется регулярной, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $V'(x,\nu)$ и она совпадает с $V^0(x,\nu)$. Известно, в частности, что выпуклые функции являются регулярными.

Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — четная, непрерывно дифференцируемая функция, для которой

$$\inf\{g(t),\, t \in \mathbb{R}\} \geqslant 1.$$

Определение 12. Регулярная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется направляющим потенциалом для включения (2) вдоль функции $g(\cdot)$, если найдется такое $r_0 > 0$, что условие $g(t)\|x\| \geqslant r_0$, $t \in \mathbb{R}$, влечет

$$\left\langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y \right\rangle \geqslant 0, \quad \text{если } t > 0;$$
$$\left\langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y \right\rangle \leqslant 0, \quad \text{если } t < 0;$$

для всех $y \in F(t,x),\ \upsilon \in \partial V(g(t)x)$.

Замечание 13. Без ограничения общности будем считать

$$r_0 > g(0)\|x_0\|.$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующее утверждение (см., например, [13]).

Лемма 2. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — регулярная функция, $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция. Тогда функция $V(x(t))$ также является абсолютно непрерывной и справедливо следующее равенство:*

$$V(x(t)) - V(x(a)) = \int\limits_a^t V^0(x(s),x'(s))ds, \quad t \in [a,b].$$

Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является направляющим потенциалом для включения (2) вдоль функции $g(\cdot)$.

Теорема 14. *Если выполнено условие коэрцитивности*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) = -\infty, \tag{4}$$

то каждое решение задачи Коши (2), (3) удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\| \leqslant k \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

для некоторого $k > 0$.

Замечание 15. Коэффициент k может быть задан следующим образом. Положим

$$V_0 := \inf\{V(x),\, \|x\| \leqslant r_0\}. \tag{6}$$

В силу условия (4) найдется $k > r_0$ такое, что

$$V(x) < V_0,\ \|x\| \geqslant k. \tag{7}$$

Доказательство. (i) Рассмотрим сначала случай $t \geqslant 0$. Разобьем интервал $[0, +\infty)$ на компактные промежутки $[0,t_1], [t_1,t_2], ...,[t_n,t_{n+1}], ...(n \in N)$. Рассмотрим промежуток $[0,t_1]$. Тогда мультиотображение $F : [0,t_1] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ будет удовлетворять всем условиям теоремы 3.2.17 (см. [2]) и множество всех решений задачи (2), (3) на промежутке $[0,t_1]$ непусто и в силу леммы Гроноулла ограничено. Возьмем произвольное решение $x(\cdot)$ задачи (2), (3) на промежутке $[0,t_1]$. Взяв в качестве начальной точки $x(t_1)$, найдем решение включения (2) на промежутке $[t_1,t_2]$ и так далее. В итоге получим, что все решения задачи (2), (3) продолжимы на промежуток $[0,\infty)$ и их множество непусто.

Пусть $x(\cdot)$ — некоторое решение задачи (2), (3) на промежутке $[0, +\infty)$.

В силу непрерывности функции $t \to g(t)\|x(t)\|$, учитывая замечание 4, мы можем указать наибольшее $\tau_1 > 0$ такое, что

$$g(t)\|x(t)\| \leqslant r_0 < k,\ t \in [0,\tau_1). \tag{8}$$

Если $\tau_1 = +\infty$, то

$$\|x(t)\| < k \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in [0, +\infty) \tag{9}$$

и утверждение доказано.

Если $\tau_1 < +\infty$, то оценка (8) справедлива только на конечном промежутке.

Покажем, что

$$g(t)\|x(t)\| \leqslant k, t \in [0, +\infty). \tag{10}$$

В предположении противного найдется $\tau_2 > \tau_1$ такое, что

$$g(\tau_2)\|x(\tau_2)\| > k. \tag{11}$$

Из (8) и (11) следует существование $\tau_1 < \tau_* < \tau_2$, при котором

$$g(\tau_*)\|x(\tau_*)\| = k. \tag{12}$$

Пусть

$$\tau_1' := sup\{\tau \in [\tau_1,\tau_*),\, g(\tau)\|x(\tau)\| = r_0\},$$

следовательно,

$$g(\tau_1')\|x(\tau_1')\| = r_0$$

и

$$g(t)\|x(t)\| \geqslant r_0 \quad \text{для} \quad t \in [\tau_1', \tau_*]. \tag{13}$$

В силу (6), получаем следующую оценку

$$V(g(\tau_1')x(\tau_1')) \geqslant V_0. \tag{14}$$

Так как регулярная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является направляющим потенциалом для включения (2) вдоль функции $g(\cdot)$, то, учитывая оценку (13) и применяя лемму 2, получим

$$V(g(\tau_*)x(\tau_*)) - V(g(\tau_1')x(\tau_1')) = \int\limits_{\tau_1'}^{\tau_*} V^0(g(t)x(t), g'(t)x(t) + g(t)x'(t))dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\tau_1'}^{\tau_*} \left\langle \upsilon(t), g'(t)x(t) + g(t)x'(t) \right\rangle dt \geqslant 0,$$

где $\upsilon(\cdot)$ является произвольным суммируемым сечением мультифункции $t \multimap \partial V(g(t)x(t))$ на отрезке $[\tau_1', \tau_*]$.

Отсюда и из соотношений (7), (12) и (14) имеем

$$V_0 > V(g(\tau_*)x(\tau_*)) \geqslant V(g(\tau_1')x(\tau_1')) \geqslant V_0.$$

Это противоречие и доказывает справедливость оценки (10).

Таким образом, мы получили, что каждое решение задачи (2), (3) при $t \geqslant 0$ удовлетворяет соотношению

$$\|x(t)\| \leqslant k \cdot \frac{1}{g(t)}.$$

(ii) Пусть теперь $t < 0$. Обозначим $\tau = -t$ и определим $\widetilde{x}(\tau) = x(-\tau) = x(t)$, $\widetilde{F}(\tau,x) = -F(-\tau,x) = -F(t,x)$, $\beta(\tau) = \alpha(-t)$. Ясно, что мультиотображение $\widetilde{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям, аналогичным указанным выше.

Мы будем рассматривать теперь задачу о существовании решений, удовлетворяющих приведенной выше оценке (9), для дифференциального включения следующего вида:

$$\widetilde{x}'(\tau) \in \widetilde{F}(\tau, \widetilde{x}(\tau)). \tag{15}$$

Ясно, что любое решение включения (15) на $[0, +\infty)$ определяет решение включения (2) на $(-\infty, 0]$. Функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является направляющим потенциалом для включения (15). Действительно, для всех $\widetilde{y} \in \widetilde{F}(\tau,x)$, $\upsilon \in \partial V(g(\tau)x)$, $g(\tau)\|x\| = g(t)\|x\| \geqslant r_0$ в силу определения 9 и четности функции $g(\cdot)$, имеем

$$\left\langle \upsilon, g'(\tau)x + g(\tau)\widetilde{y} \right\rangle = \left\langle \upsilon, -g'(-\tau)x + g(-\tau)\widetilde{y} \right\rangle =$$

$$= -\left\langle \upsilon, g'(-\tau)x + g(-\tau)y \right\rangle = -\left\langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y \right\rangle \geqslant 0,$$

где $y = -\widetilde{y} \in F(-\tau,x) = F(t,x)$.

Таким образом, все рассуждения пункта (i) справедливы для включения (15) и мы получаем решения включения (15), удовлетворяющие оценке

$$\|\widetilde{x}(\tau)\| \leqslant k \cdot \frac{1}{g(\tau)}, \quad \tau > 0,$$

а, следовательно, для решений включения (2) имеем аналогичную оценку для $t = -\tau < 0$.

Таким образом, каждое решение задачи (2)-(3) определено на всей числовой прямой и удовлетворяет оценке (1).

Пример. Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет следующий вид:

$$V(x) = -\frac{\|x\|^2}{2} + \widetilde{V}(x),$$

где $\widetilde{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — регулярная функция такая, что V удовлетворяет условию коэрцитивности (4). Ясно, что V является регулярной функцией и

$$\partial V(x) = -x + \partial\widetilde{V}(x)$$

(см. [12], следствие 3 из теоремы 2.3.3).

Возьмем теперь функцию $g(t) = 1 + t^2$ и пусть для некоторого $r_0 > 0$ при $g(t)\|x\| \geqslant r_0$ для всех $y \in F(t,x)$ и $\widetilde{\upsilon} \in \partial\widetilde{V}(g(t)x)$ выполнены условия:

(i) при $t > 0$:

H1) $\langle x,y\rangle \leqslant \|x\|^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2}\langle\widetilde{\upsilon}, y\rangle$.

H2) $\langle\widetilde{\upsilon}, y\rangle \leqslant \langle\widetilde{\upsilon}, x\rangle$;

(ii) при $t < 0$ пусть выполнено условие ($H2$) и условие

H1') $\langle x,y\rangle \geqslant \|x\|^2 \geqslant \frac{1}{1+t^2}\langle\widetilde{\upsilon}, y\rangle$.

Покажем, что при выполнении вышеуказанных условий функция V является направляющим потенциалом для включения (2) вдоль функции $g(\cdot)$.

Отметим, что каждое $\upsilon \in \partial V(g(t)x)$ имеет вид

$$\upsilon = -(1 + t^2)x + \widetilde{\upsilon},$$

где $\widetilde{\upsilon} \in \partial\widetilde{V}(g(t)x)$.

Тогда для любых $g(t)\|x\| \geqslant r_0, y \in F(t,x)$ и $\upsilon \in \partial V(g(t)x)$ получаем:

$$\Phi(x,y,\upsilon) := \left\langle \upsilon, g'(t)x + g(t)y\right\rangle = \left\langle -(1+t^2)x + \widetilde{\upsilon}, 2tx + (1+t^2)y\right\rangle =$$

$$= 2t\langle\widetilde{\upsilon},x\rangle + (1+t^2)\langle\widetilde{\upsilon},y\rangle - 2t(1+t^2)\|x\|^2 - (1+t^2)^2\langle x,y\rangle .$$

Если теперь $t > 0$, то, согласно ($H1$),($H2$), получаем;

$$\Phi(x,y,\upsilon) \geqslant (1+t)^2\langle\widetilde{\upsilon},y\rangle - (1+t^2)(1+t)^2\|x\|^2 \geqslant (1+t)^2\left[\langle\widetilde{\upsilon},y\rangle - \langle\widetilde{\upsilon},y\rangle\right] = 0$$

и, следовательно, первое условие определения 9 выполнено.

Если же $t < 0$, то используя ($H1'$),($H2$), имеем:

$$\Phi(x,y,\upsilon) \leqslant (1+t)^2\langle\widetilde{\upsilon},y\rangle - (1+t^2)\left[2t\|x\|^2 + (1+t^2)\langle x,y\rangle\right] \leqslant$$

$$\leqslant (1+t)^2\langle\widetilde{\upsilon},y\rangle - (1+t)^2(1+t^2)\|x\|^2 \leqslant 0$$

и, таким образом, второе условие определения 9 также выполнено.

Следовательно, каждое решение задачи (2), (3) удовлетворяет оценке

$$\|x(t)\| \leqslant \frac{k}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $k > 0$.

Автор глубоко признателен профессору В.В. Обуховскому за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Наука, 1966. — 332 с.

2. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: Либроком, 2011. — 226 с.

3. Górniewicz, L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / L. Górniewicz. — Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 399 p.

4. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076 / V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev. — Berlin: Springer, 2013. — 177 p.

5. Avramescu, C. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations and generalized guiding functions / C. Avramescu // Electronic journal of qualitive theory of differential equations. — 2003. — № 13. — P. 1–9.

6. Corduneanu, C. Problems globaux dans la theorie des eqautions integrales de Volterra / C. Corduneanu // Ann. Math. Pura e Appl. — 1965. — V. 4, № 67. — P. 349–363.

7. De Blasi, F.S. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions / F. S. De Blasi, L. Górniewicz, G. Pianigiani // Nonlinear Anal. — 1999. — V. 37. — P. 217–245.

8. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001. — 231 p.

9. Kisielewicz, M. Differential inclusions and optimal control / M. Kisielewicz. — Kluwer, Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991. — 240 p.

10. Bressan, A. Extensions and selections of maps with decomposable values / A. Bressan, G. Colombo // Studia Math. — 1988. — V. 90. — P. 69–86.

11. Fryszkowski, A. Fixed point theory for decomposable sets / A. Fryszkowski. — Kluwer AP, Dordrecht, 2004. — 209 p.

12. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М.: Наука, 1988. — 280 с.

13. Kornev, S. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions / S. Kornev, V. Obukhovskii, J.C. Yao // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. — 2014. – V. 34, Iss. 2. — P. 219–227.

REFERENCES

1. Krasnosel'skii M.A. The Operator of Translation along the Trajectories of Differential Equations. [Krasnosel'skii M.A. Oparator sdviga po traektoriam differential'nych uravnenij]. Moscow: Nauka, 1966, 332 p.

2. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobragenij i differenzial'nyx vklyuchenij]. Moscow: Librokom, 2011, 226 p.

3. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1999, 399 p.

4. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076, Berlin: Springer, 2013, 177 p.

5. Avramescu C. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations and

generalized guiding functions. Electronic journal of qualitive theory of differential equations, 2003, no. 13, pp. 1–9.

6. Corduneanu C. Problems globaux dans la theorie des eqautions integrales de Volterra. Ann. Math. Pura e Appl, 1965, vol. 4, no. 67, pp. 349–363.

7. De Blasi F.S., Górniewicz L., Pianigiani G. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions. Nonlinear Anal., 1999, vol. 37, pp. 217–245.

8. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001, 231 p.

9. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control, Kluwer, Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991, 240 p.

10. Bressan A., Colombo G. Extensions and selections of maps with decomposable values. Studia Math, 1988, vol. 90, pp. 69–86.

11. Fryszkowski A. Fixed point theory for decomposable sets, Kluwer AP, Dordrecht, 2004, 209 p.

12. Clark F. Optimization and nonsmooth analysis. [Clark F. Optimizaciya i negladkij analiz]. Moscow: Nauka, 1988, 280 p.

13. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.C. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions. Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization, 2014, vol. 34, iss. 2, pp. 219–227.

Корнев Сергей Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, физико-математический факультет, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Тел.: (473)255-36-63

Kornev Sergei Viktorovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Physics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Tel.: (473)255-36-63