УДК 539.374

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИМАНА В ЗАДАЧАХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ С КРУГОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

И. Н. Зиновьев, А. С. Чеботарёв

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.01.2015 г.

Аннотация. В статье рассматривается вывод уравнений линий скольжения методом Римана для задачи плоской деформации теории идеальной пластичности с границей в виде части окружности. Сетка линий скольжения в пластической зоне с границей в виде окружности представляет собой два семейства логарифмических спиралей при отсутствии напряжения на границе. Для простоты вычислений рассматривается четверть окружности. Для решения телеграфного уравнения используется модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Уравнения напряжений найдены в декартовой и полярной системах координат. В параметрическом виде приведены решения как в случае с трением на границе, так и в его отсутствии.

Ключевые слова: линии скольжения, метод Римана, пластичность, точные решения, напряжения, предел текучести.

APPLICATION OF RIEMANN PROBLEMS OF PLANE STRAIN THE THEORY OF IDEAL PLASTICITY WITH CIRCULAR BOUNDARY

I. N. Zinoviev, A. S. Chebotarev

Abstract. The paper considers the derivation of sliding line equation by Riemann method for the flat deformation problem in the ideal plasticity theory with the boundary in the form of a quarter of a circle. Grid slip lines in the plastic zone bounded by a circle represents two logarithmic spirals of the family in the absence of stress on the boundary. For ease of calculation is considered a quarter circle. To solve the telegraph equation using the modified Bessel function of the first kind of order zero. stress equations found in Cartesian and polar coordinate systems. The parametric form of solutions given in the case of boundary friction, and in its absence.

Keywords: sliding line, Riemann method, plasticity, exact solutions, tensions, yield strength.

ВВЕДЕНИЕ

Исследуем поле напряжений вокруг кругового отверстия радиуса R в плоской задаче среды, находящейся в состоянии идеальной пластичности. Контур нагружен равномерным давлением p при отсутствии касательных напряжений.

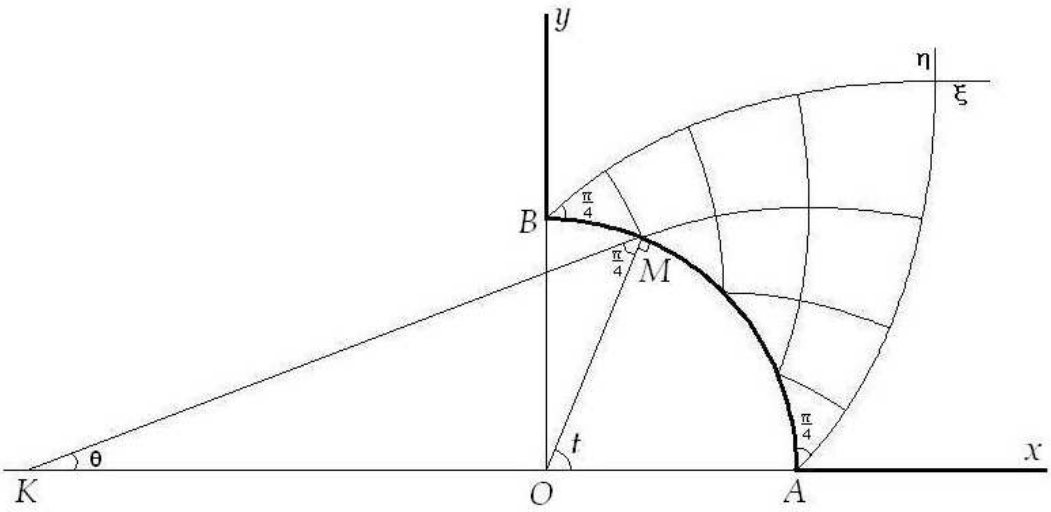

Рис. 1. *Сетка линий скольжения*

Рассматриваем кривую AB, являющуюся четвертью окружности радиуса R, расположенную в первой четверти(рис.1). Угол θ является углом наклона касательной к линии скольжения ξ к оси x. Известно [1]–[9], что сетка линий скольжения, построенная в пластической зоне с границей в виде части окружности, представляет собой два семейства логарифмических спиралей в случае отсутствия касательных напряжений на границе. При этом линии скольжения подходят к границе AB под углом равным $\dfrac{\pi}{4}$. Аналогичная задача была рассмотрена в [9], но из-за неточности формул, были получены неправильные решения. Представим уравнение окружности в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = R\cos(t), \\ y = R\sin(t), \\ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Из треугольника OMK следует, что $t = \theta + \dfrac{\pi}{4}$, следовательно:

$$\begin{cases} x = R\cos(\theta + \frac{\pi}{4}), \\ y = R\sin(\theta + \frac{\pi}{4}), \\ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}. \end{cases} \tag{1}$$

Перейдем к переменным Михлина:

$$\begin{cases} X = x\cos(\theta) + y\sin(\theta), \\ Y = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta). \end{cases} \tag{2}$$

Подставив (1) в (2), получим

$$\begin{cases} X = R\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos(\theta) + R\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin(\theta) = R\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = R\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y = -R\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin(\theta) + R\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos(\theta) = R\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = R\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

Переменные Михлина X и Y являются константами вдоль AB.

При плоской деформации уравнения равновесия принимаю канонический вид [3]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \xi} + \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \operatorname{ctg} \theta = 0, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta} - \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \operatorname{tg} \theta = 0. \end{cases} \tag{4}$$

В переменных ξ, η определяемых формулами

$$\begin{cases} \sigma = k(\xi + \eta) + \sigma_A, \\ \theta = \frac{1}{2}(\eta - \xi), \end{cases} \tag{5}$$

где σ — полусумма главных напряжений $\sigma = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$, k — согласно условию текучести полуразность главных напряжений $k = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

В переменных Михлина система уравнений (4) преобразуется в систему уравнений с постоянными коэффициентами (по сравнению с [9] легко заметить отличие в знаке)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial \eta} + \dfrac{X}{2} = 0, \\ \dfrac{\partial X}{\partial \xi} + \dfrac{Y}{2} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

При этом каждая новая переменная X и Y удовлетворяет телеграфному уравнению [3]

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4} X = 0, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4} Y = 0. \tag{7}$$

Решение каждого из уравнений (7) ищем в виде [4], [7]

$$G(a, b, \xi, \eta) = I_0 \left(\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right),$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Систему (5) представим в виде

$$\begin{cases} \eta - \xi = 2\theta, \\ \xi + \eta = \dfrac{\sigma - \sigma_A}{k} = 0. \end{cases}$$

Вдоль AB $\eta = -\xi = \theta$, то есть в плоскости (ξ, η) линия AB представляет собой прямую $\eta = -\xi$ (рис. 2), причем т.к. $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, то $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \xi \leqslant \dfrac{\pi}{4}, \\ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \eta \leqslant \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Решение в произвольной точке P с координатами (a, b) окрестности кривой определяем по формуле Римана [8]

$$X_P = \frac{1}{2}(X_a + X_b) - \frac{1}{2} \int\limits_{ab} \left(G \frac{\partial X}{\partial \xi} - X \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(X \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) d\eta, \tag{8}$$

$$Y_P = \frac{1}{2}(Y_a + Y_b) - \frac{1}{2} \int\limits_{ab} \left(G \frac{\partial Y}{\partial \xi} - Y \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(Y \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) d\eta. \tag{9}$$

Используя формулы (3) и (6), получим значения обратные представленным в [9]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial \eta} = -\dfrac{X}{2} = -R \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial \xi} = -\dfrac{Y}{2} = -R \dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases} \tag{10}$$

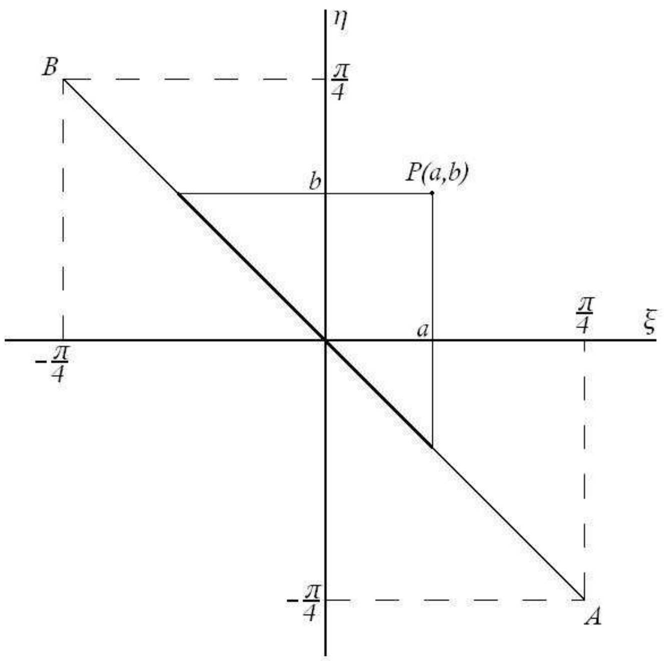

Рис. 2. *Отображение физической плоскости в плоскость характеристик* $(\xi\eta)$

Так как $\dfrac{\partial\eta}{\partial\theta} = 1, \dfrac{\partial\xi}{\partial\theta} = -1$, то из формул $\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial\theta} = \dfrac{\partial X}{\partial\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial\theta} + \dfrac{\partial X}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial\theta}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial\theta} = \dfrac{\partial Y}{\partial\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial\theta} + \dfrac{\partial Y}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial\theta}, \end{cases}$ найдем $\dfrac{\partial X}{\partial\eta}, \dfrac{\partial Y}{\partial\xi}$ вдоль AB, используя (10) так же получаем значения, обратные, представленным в [9]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial\eta} = -R\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial\xi} = -R\dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Вдоль AB получили:

$$\begin{cases} X = R\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y = R\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial\eta} = -R\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial\xi} = -R\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial\eta} = -R\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial\xi} = -R\dfrac{\sqrt{2}}{4}; \end{cases}$$

$$G(a,b,\xi,\eta) = I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial\xi} = \frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}}(b-\eta);$$

$$\frac{\partial G}{\partial\eta} = \frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}}(a-\xi);$$

Используя полученные выражения, формула (8) примет вид

$$X_P = R\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{ab}\left[-R\frac{\sqrt{2}}{4}I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right) - R\frac{\sqrt{2}}{2}(b-\eta)\frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}}\right]d\xi +$$

$$+\left[R\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}}(a-\xi)+R\frac{\sqrt{2}}{4}I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)\right]d\eta,$$

$$X_P=R\frac{\sqrt{2}}{2}+R\frac{\sqrt{2}}{8}\int\limits_{ab}\left(I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)\right)(d\xi-d\eta)-$$

$$-R\frac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_{ab}\frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}}(-(b-\eta)d\xi+(a-\xi)d\eta).$$

Перейдем от криволинейного интеграла второго рода к определённому интегралу Римана вдоль прямой

$$X_P=R\frac{\sqrt{2}}{2}-R\frac{\sqrt{2}}{8}\int\limits_{-b}^{a}\left(2I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}\right)\right)d\xi+R\frac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_{-b}^{a}\frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}}(-(a+b))\,d\xi,$$

$$X(a,b)=R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}Int1-\frac{\sqrt{2}}{8}(a+b)Int2\right),\tag{11}$$

где

$$Int1=\int\limits_{-b}^{a}\left(I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}\right)\right)d\xi,$$

$$Int2=\int\limits_{-b}^{a}\frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}\right)}{\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}}\,d\xi,$$

вычислим $Int1$ и $Int2$. Для этого воспользуемся заменой:

$\xi=\frac{a-b}{2}+\frac{b+a}{2}\sin(y)$, $d\xi=\frac{a+b}{2}\cos(y)dy$,

$a-\xi=a-\frac{a-b}{2}-\frac{b+a}{2}\sin(y)=\frac{a+b}{2}-\frac{b+a}{2}\sin(y)=\frac{a+b}{2}(1-\sin(y))$,

$b+\xi=b+\frac{a-b}{2}+\frac{b+a}{2}\sin(y)=\frac{a+b}{2}+\frac{b+a}{2}\sin(y)=\frac{a+b}{2}(1+\sin(y))$,

$(a-\xi)(b+\xi)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(1-\sin^2(y))$

$\xi=a\to a-\frac{a-b}{2}=\frac{b+a}{2}\sin(y)\to y=\frac{\pi}{2}$,

$\xi=-b\to -b-\frac{a-b}{2}=\frac{b+a}{2}\sin(y)\to y=-\frac{\pi}{2}$,

$$Int1=\int\limits_{-b}^{a}\left(I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}\right)\right)d\xi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}I_0\left(\frac{a+b}{2}\cos(y)\right)\frac{a+b}{2}\cos(y)\,dy=$$

$$=\frac{a+b}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}I_0\left(\frac{a+b}{2}\cos(y)\right)\cos(y)\,dy.$$

Так как подинтегральное выражение четное, то

$$Int = (a+b)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} I_0\left(\frac{a+b}{2}\cos(y)\right)\cos(y)\,dy.$$

Введём ещё одну замену

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - t, \\ \cos(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t), \\ dy = dt, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \to t = -\dfrac{\pi}{2}, \\ y = \dfrac{\pi}{2} \to t = 0. \end{cases}$$

$$Int1 = (a+b)\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} I_0\left(\frac{a+b}{2}\sin(t)\right)\sin(t)\,(-dt) =$$

$$= (a+b)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} I_0\left(\frac{a+b}{2}\sin(t)\right)\sin(t)\,dt = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Посчитаем $Int2$:

$$Int2 = \int\limits_{-b}^{a} \frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}\right)}{\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}}\,d\xi.$$

Воспользуемся аналогичной заменой:

$$\xi = \frac{a-b}{2} + \frac{b+a}{2}\sin(y),\ d\xi = \frac{a+b}{2}\cos(y)dy,$$

$$a - \xi = a - \frac{a-b}{2} - \frac{b+a}{2}\sin(y) = \frac{a+b}{2} - \frac{b+a}{2}\sin(y) = \frac{a+b}{2}(1-\sin(y)),$$

$$b + \xi = b + \frac{a-b}{2} + \frac{b+a}{2}\sin(y) = \frac{a+b}{2} + \frac{b+a}{2}\sin(y) = \frac{a+b}{2}(1+\sin(y)),$$

$$(a-\xi)(b+\xi) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2(1-\sin^2(y)),$$

$$\xi = a \to a - \frac{a-b}{2} = \frac{b+a}{2}\sin(y) \to y = \frac{\pi}{2},$$

$$\xi = -b \to -b - \frac{a-b}{2} = \frac{b+a}{2}\sin(y) \to y = -\frac{\pi}{2},$$

$$Int2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I_1\left(\frac{a+b}{2}\cos(y)\right)}{\frac{a+b}{2}\cos(y)}\frac{a+b}{2}\cos(y)\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I_1\left(\frac{a+b}{2}\cos(y)\right)\,dy,$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - t, \\ \cos(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t), \\ dy = dt, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \to t = -\dfrac{\pi}{2}, \\ y = \dfrac{\pi}{2} \to t = 0. \end{cases}$$

$$Int2 = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} I_1\left(\frac{a+b}{2}\sin(t)\right)\,(-dt) = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} I_1\left(\frac{a+b}{2}\sin(t)\right)\,dt = \frac{2 - 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{a+b}{2}}.$$

Подставим полученные значения $Int1$ и $Int2$ в формулу (11)

$$X(a,b) = R\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}2\,\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{8}(a+b)\frac{4 - 4ch\left(\frac{a+b}{2}\right)}{a+b}\right),$$

$$X(a,b) = R\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = R\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{a+b}{2}},$$

$$X(\xi,\eta) = R\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\xi+\eta}{2}}.$$

Для переменной $Y = Y(\xi,\eta)$ проведя аналогичные вычисления, получим идентичную формулу:

$$Y(\xi,\eta) = R\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\xi+\eta}{2}}$$

Из системы (2) выразим x и y и получим параметрические уравнения $x = x(\xi,\eta)$ и $y = y(\xi,\eta)$ в плоскости xOy

$$\begin{cases} x = X\cos(\theta) - Y\sin(\theta) = R\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\xi+\eta}{2}}\cos(\theta) - R\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\xi+\eta}{2}}\sin(\theta) = Re^{-\frac{\xi+\eta}{2}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \\ y = X\sin(\theta) + Y\cos(\theta) = R\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\xi+\eta}{2}}\sin(\theta) + R\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\xi+\eta}{2}}\cos(\theta) = Re^{-\frac{\xi+\eta}{2}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Подставим значение θ из второго уравнения системы (5)

$$\begin{cases} x = Re^{-\frac{\xi+\eta}{2}}\cos\left(\frac{\eta-\xi}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \\ y = Re^{-\frac{\xi+\eta}{2}}\sin\left(\frac{\eta-\xi}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \end{cases} \tag{12}$$

Используем известные формулы теории напряжений

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma - k\sin(2\theta), \\ \sigma_y = \sigma + k\sin(2\theta), \\ \tau_{xy} = k\cos(2\theta). \end{cases} \tag{13}$$

Найдём σ и θ. Для этого воспользуемся системами (5) и (12). В (12) сначала разделим первое уравнение на второе, получим

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\eta-\xi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\eta - \xi = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\pi}{2} \tag{14}$$

Теперь возведём оба уравнения (12) в квадрат и сложим

$$x^2 + y^2 = R^2e^{-\xi-\eta}\cos^2\left(\frac{\eta-\xi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + R^2e^{-\xi-\eta}\sin^2\left(\frac{\eta-\xi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$x^2 + y^2 = R^2e^{-\xi-\eta},$$

$$\xi + \eta = -\ln\left(\frac{x^2+y^2}{R^2}\right), \tag{15}$$

σ_A определим из граничных условий [3]: $\sigma_A = \sigma_n + k\sin 2(\theta - t)$,

$$\sigma_A = -p - k. \tag{16}$$

Подставим (14), (15) и (16) в (5)

$$\begin{cases} \sigma = -k\ln\left(\frac{x^2+y^2}{R^2}\right) - p - k, \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

Подставим полученные σ и θ в систему (13)

$$\begin{cases} \sigma_x = -k\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{R^2}\right) - p - k - k\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \sigma_y = -k\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{R^2}\right) - p - k + k\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \tau_{xy} = k\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases} \tag{17}$$

Перейдем в системе (17) к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\varphi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = -2k\ln\left(\dfrac{r}{R}\right) - p - k + k\cos(2\varphi), \\ \sigma_y = -2k\ln\left(\dfrac{r}{R}\right) - p - k - k\cos(2\varphi), \\ \tau_{xy} = k\sin(2\varphi). \end{cases}$$

Воспользовавшись формулами: $\begin{cases} \sigma_r = \sigma_x\cos^2(\varphi) + \sigma_y\sin^2(\varphi) + \tau_{xy}\sin(2\varphi), \\ \sigma_\varphi = \sigma_x\sin^2(\varphi) + \sigma_y\cos^2(\varphi) - \tau_{xy}\sin(2\varphi), \\ \tau_{r\varphi} = \tau_{xy}\cos(2\varphi) - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\varphi); \end{cases}$

получаем $\sigma_r = -2k\ln\left(\dfrac{r}{R}\right) - p$, $\sigma_\varphi = -2k\ln\left(\dfrac{r}{R}\right) - p - 2k$.

Найденные решения σ_r и σ_φ методом Римана совпадают с представленными в [3], [7].

Решим теперь эту задачу считая, что вдоль кривой AB действуют касательные напряжения [10] $\tau_n = k\sin(2\delta)$, $|\delta| \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Уравнения окружности в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = R\cos(t), \\ y = R\sin(t), \\ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Согласно работе [3] параметр t зависит от угла θ в виде $t = \theta + \dfrac{\pi}{4} - \delta$ и параметрические уравнения кривой AB примут вид

$$\begin{cases} x = R\cos(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta), \\ y = R\sin(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta), \\ -\dfrac{\pi}{4} + \delta \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \delta. \end{cases} \tag{18}$$

Перейдем к переменным Михлина (2):

$$\begin{cases} X = R\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4} - \delta\right)\cos(\theta) + R\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4} - \delta\right)\sin(\theta) = R\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \delta\right), \\ Y = -R\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4} - \delta\right)\sin(\theta) + R\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4} - \delta\right)\cos(\theta) = R\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \delta\right). \end{cases} \tag{19}$$

Из (6) и (19) получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial \eta} = -\dfrac{X}{2} = -\dfrac{R}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \delta\right), \\ \dfrac{\partial X}{\partial \xi} = -\dfrac{Y}{2} = -\dfrac{R}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \delta\right). \end{cases} \tag{20}$$

Систему (5) представим в виде

$$\begin{cases} \eta - \xi = 2\theta, \\ \xi + \eta = \dfrac{\sigma - \sigma_A}{k} = 0. \end{cases}$$

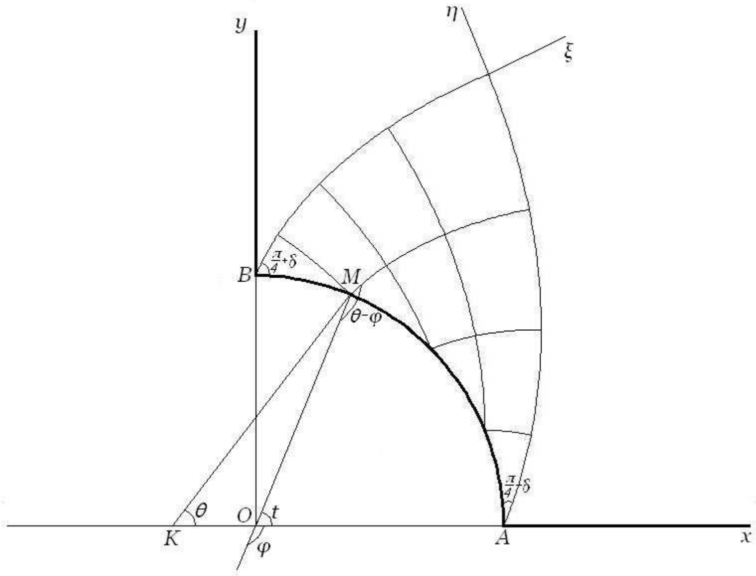

Рис. 3. *Сетка линий скольжения, построенная на части окружности, при наличии постоянного трения*

Вдоль AB $\quad \eta = -\xi = \theta$, то есть в плоскости (ξ, η) линия AB представляет собой прямую $\eta = -\xi$ (рис.4), причем т.к. $-\dfrac{\pi}{4} + \delta \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \delta$, то $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} - \delta \leqslant \xi \leqslant \dfrac{\pi}{4} - \delta, \\ -\dfrac{\pi}{4} + \delta \leqslant \eta \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \delta. \end{cases}$

Так как $\dfrac{\partial \eta}{\partial \theta} = 1, \dfrac{\partial \xi}{\partial \theta} = -1$, то из формул $\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial \theta} = \dfrac{\partial X}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial \theta} + \dfrac{\partial X}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial \theta}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \theta} = \dfrac{\partial Y}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial \theta} + \dfrac{\partial Y}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial \theta} \end{cases}$ найдем $\dfrac{\partial X}{\partial \eta}, \dfrac{\partial Y}{\partial \xi}$ вдоль

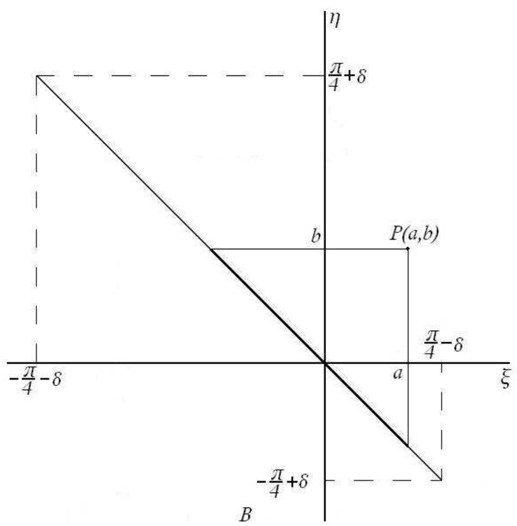

Рис. 4. *Отображение физической плоскости в плоскость характеристик $(\xi\eta)$, при наличии постоянного трения*

AB, используя (20)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial \eta} = -\dfrac{R}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\delta\right), \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \xi} = -\dfrac{R}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\delta\right). \end{cases}$$

Вдоль AB получили:

$$\begin{cases} X = R\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\delta\right), \\ Y = R\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\delta\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial \eta} = -\dfrac{R}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\delta\right), \\ \dfrac{\partial X}{\partial \xi} = -\dfrac{R}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\delta\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial \eta} = -\dfrac{R}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\delta\right), \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \xi} = -\dfrac{R}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\delta\right); \end{cases}$$

$$G(a,b,\xi,\eta) = I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}}(b-\eta);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}}(a-\xi);$$

Используя полученные выражения, формула (8) примет вид

$$X_P = R\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{ab}\left[-\frac{R}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right) - \right.$$

$$\left. -R\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)(b-\eta)\frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}}\right]d\xi +$$

$$+\left[R\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}}(a-\xi) + \frac{R}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)\right]d\eta$$

$$X_P = R\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right) + \frac{R}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\int\limits_{ab}\left(I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)\right)(d\xi - d\eta) -$$

$$-\frac{R}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\int\limits_{ab}\frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}}\left(-(b-\eta)d\xi + (a-\xi)d\eta\right)$$

Перейдем от криволинейного интеграла второго рода к определённому интегралу Римана вдоль прямой

$$X(a,b) = R\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right) - \frac{R}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\int\limits_{-b}^{a}\left(I_0\left(\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}\right)\right)d\xi +$$

$$+\frac{R}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\int\limits_{-b}^{a}\frac{I_1\left(\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}\right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}}(-(a+b))\,d\xi,$$

$$X(a,b) = R\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)Int1 - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)(a+b)Int2\right), \tag{21}$$

где

$$Int1 = \int_{-b}^{a} \left(I_0 \left(\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} \right) \right) d\xi,$$

$$Int2 = \int_{-b}^{a} \frac{I_1 \left(\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} \right)}{\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}} d\xi,$$

$Int1$ и $Int2$ были подсчитаны выше: $Int1 = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $Int2 = \dfrac{2 - 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{a+b}{2}}$. Получаем:

$$X(a,b) = R\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\left(2 - 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right],$$

$$X(a,b) = R\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

Для переменной $Y = Y(a,b)$ проведя аналогичные вычисления, получим:

$$Y(a,b) = R\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

Из системы (2) выразим x и y и получим параметрические уравнения $x = x(a,b)$ и $y = y(a,b)$ в плоскости xOy

$$\begin{cases} x = R\left[\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta+\theta\right) - \mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta-\theta\right)\right], \\ y = R\left[\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta+\theta\right) - \mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta-\theta\right)\right]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = R\left[\mathrm{ch}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta+\frac{\eta-\xi}{2}\right) - \mathrm{sh}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta-\frac{\eta-\xi}{2}\right)\right], \\ y = R\left[\mathrm{ch}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta+\frac{\eta-\xi}{2}\right) - \mathrm{sh}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta-\frac{\eta-\xi}{2}\right)\right]. \end{cases} \tag{22}$$

Найдём σ и θ. Для этого воспользуемся системами (5) и (22). В (22) возведём оба уравнения в квадрат и сложим, получим $x^2 + y^2 = R^2\left[\mathrm{ch}(\xi+\eta) - \cos(2\delta)\,\mathrm{sh}(\xi+\eta)\right]$.

Выразим из этого уравнения $\xi + \eta$

$$\frac{x^2+y^2}{R^2} = e^{\xi+\eta}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\delta)}{2}\right) + \frac{1}{e^{\xi+\eta}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\delta)}{2}\right);$$

Введем замену $t = e^{\xi+\eta}$, получим

$$t^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\delta)}{2}\right) - t\left(\frac{x^2+y^2}{R^2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\delta)}{2}\right) = 0.$$

Легко заметить, что при отсутствии трения ($\delta = 0$), получаем линейное уравнение вида:

$$t\left(\frac{x^2+y^2}{R^2}\right) = 1,$$

откуда

$$t = \frac{R^2}{x^2 + y^2}.$$

При обратном переходе к ξ, η, получаем формулу (15). При наличии трения решаем квадратное уравнение и получаем решение в виде:

$$\xi + \eta = \frac{x^2 + y^2 + \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - R^4 \sin^2(2\delta)}}{R^2(1 - \cos(2\delta))}. \tag{23}$$

Преобразуем систему (22), сделав замену $\dfrac{\xi + \eta}{2} = \alpha, \dfrac{\eta - \xi}{2} = \beta$ и учитывая что $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \delta - \dfrac{\eta - \xi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{4} + \delta + \dfrac{\eta - \xi}{2}\right)\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \delta + \dfrac{\eta - \xi}{2}\right)$,

$x = R\left[\dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \delta + \beta\right) - \dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \delta + \beta\right)\right]$,

$x = \dfrac{Re^\alpha}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \delta + \beta\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \delta + \beta\right)\right] + \dfrac{Re^{-\alpha}}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \delta + \beta\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \delta + \beta\right)\right]$,

$x = Re^\alpha \sin\delta \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right) + Re^{-\alpha} \cos\delta \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right)$,

$y = \dfrac{Re^\alpha}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \delta - \beta\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \delta - \beta\right)\right] + \dfrac{Re^{-\alpha}}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \delta - \beta\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \delta - \beta\right)\right]$,

$y = Re^{-\alpha} \cos\delta \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right) - Re^\alpha \sin\delta \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right)$.

Получили новую систему, где $2\alpha = \xi + \eta$

$$\begin{cases} x = Re^{-\alpha} \cos\delta \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right) + Re^\alpha \sin\delta \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right), \\ y = Re^{-\alpha} \cos\delta \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right) - Re^\alpha \sin\delta \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right). \end{cases}$$

Подставив (23), получаем

$$\begin{cases} x = RA \sin\delta \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right) + \dfrac{R}{A} \cos\delta \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right), \\ y = \dfrac{R}{A} \cos\delta \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right) - RA \sin\delta \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right), \end{cases}$$

где $A = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 + \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - R^4 \sin^2(2\delta)}}{R^2(1 - \cos(2\delta))}}$.

Раскрыв синусы и косинусы разности и суммы, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\cos\delta}{A} + A\sin\delta\right) \sin\beta + \left(\dfrac{\cos\delta}{A} - A\sin\delta\right) \cos\beta = \dfrac{y\sqrt{2}}{R}, \\ \left(A\sin\delta - \dfrac{\cos\delta}{A}\right) \sin\beta + \left(A\sin\delta + \dfrac{\cos\delta}{A}\right) \cos\beta = \dfrac{x\sqrt{2}}{R}. \end{cases}$$

Решим данную систему линейных уравнений методом Крамера относительно переменных $\sin\beta$, $\cos\beta$.

$$\triangle = \begin{vmatrix} \dfrac{\cos\delta}{A} + A\sin\delta & \dfrac{\cos\delta}{A} - A\sin\delta \\ A\sin\delta - \dfrac{\cos\delta}{A} & A\sin\delta + \dfrac{\cos\delta}{A} \end{vmatrix},$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{y\sqrt{2}}{R} & \dfrac{\cos\delta}{A} - A\sin\delta \\ & \\ \dfrac{x\sqrt{2}}{R} & A\sin\delta + \dfrac{\cos\delta}{A} \end{vmatrix}, \qquad \triangle_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\cos\delta}{A} + A\sin\delta & \dfrac{y\sqrt{2}}{R} \\ A\sin\delta - \dfrac{\cos\delta}{A} & \dfrac{x\sqrt{2}}{R} \end{vmatrix},$$

$$\sin\beta = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\left(x^2+y^2+\sqrt{(x^2+y^2)^2-R^4\sin^2(2\delta)}\right)(x+y)+R^2\sin(2\delta)(y-x)}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{(x^2+y^2)^2-R^4\sin^2(2\delta)}}},$$

$$\cos\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\left(x^2+y^2+\sqrt{(x^2+y^2)^2-R^4\sin^2(2\delta)}\right)(x-y)+R^2\sin(2\delta)(x+y)}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{(x^2+y^2)^2-R^4\sin^2(2\delta)}}}.$$

Получаем формулу (5) в виде

$$\begin{cases} \sigma = k\ln\left(\dfrac{x^2+y^2+\sqrt{(x^2+y^2)^2-R^4\sin^2(2\delta)}}{2R^2\sin^2\delta}\right)-p-k, \\ \theta = \arcsin\left(\dfrac{\left(x^2+y^2+\sqrt{(x^2+y^2)^2-R^4\sin^2(2\delta)}\right)(x+y)+R^2\sin(2\delta)(y-x)}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{(x^2+y^2)^2-R^4\sin^2(2\delta)}}}\right). \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. — М.: Наука, 1978. — 208 с.

2. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М.: Наука, 1966. — 136 с.

3. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М.: Наука, 1969. — 420 с.

4. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М.: Высшая школа, 1970. — 710 с.

5. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. — М.: Высшая школа, 1969. — 608 с.

6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1966. — 724 с.

7. Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. — М.: Физматгиз, 1962. — 432 с.

8. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р.Хилл. — М.: Наука, 1956. — 408 с.

9. Зиновьев, И. Н. Применение метода Римана в задачах плоской деформации теории идеальной пластичности с круговой границей / И. Н. Зиновьев, А. С. Чеботарёв // Вестник ЧГПУ им. Яковлева, серия: Механика предельного состояния. — 2010. — №2(8). — С. 146–160.

10. Чеботарёв, А. С. Интегрирование уравнений плоской деформации одной задачи теории идеальной пластичности / А. С. Чеботарёв // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2007. — № 2. — С. 198–204.

11. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

REFERENCES

1. Ivlev D.D., Ershov L.V. Method of perturbations in the theory of elastic-plastic. [Ivlev D.D., Ershov L.V. Metod vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela]. Moscow: Science, 1978, 208 p.

2. Ivlev D.D. The theory of ideal plasticity. [Ivlev D.D. Teoriya ideal'noj plastichnosti]. Moscow: Science, 1966, 136 p.

3. Kachanov L. M. Fundamentals of the theory of plasticity. [Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti]. Moscow: Science, 1969, 420 p.

4. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Partial differential equations of mathematical physics. [Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Uravneniya v chastnyx proizvodnyx matematicheskoj fiziki]. Moscow: High school, 1970, 710 p.

5. Sokolovski V. V. Theory of plasticity. [Sokolovskij V. V. Teoriya plastichnosti]. Moscow: High school, 1969, 608 p.

6. Tihonov A. N., Samarskiy A. A. Equations of mathematical physics. [Tixonov, A. N., Samarskij A. A. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Science, 1966, 724 p.

7. Freydental A., Geyringer H. Mathematical theory of inelastic continuum. [Frejdental' A., Gejringer X. Matematicheskie teorii neuprugoj sploshnoj sredy]. Moscow: Fizmatgiz, 1962, 432 p.

8. Hill R. The mathematical theory of plasticity. [Xill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti]. Moscow: Science, 1956, 408 p.

9. Zinoviev I. N., Chebotarev A. S. Application of the Riemann method of plane strain problems of ideal plasticity theory with a circular boundary. [Zinoviev I. N., Chebotarev A. S. Primenenie metoda Rimana v zadachax ploskoj deformacii teorii ideal'noj plastichnosti s krugovoj granicej]. *Vestnik ChGPU im. Yakovleva, seriya: Mexanika predel'nogo sostoyaniya — Vestnic CGPU Yakovleva, series: Mechanics limit state*, 2010, no. 2(8), pp. 146–160.

10. Chebotarev A. S. Integration of plane strain equations of a problem in perfect plasticity theory. [Chebotaryov A. S. Integrirovanie uravnenij ploskoj deformacii odnoj zadachi teorii ideal'noj plastichnosti]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2007, no. 2, pp. 198–204.

11. Baev A. D., Shabrov S. A., Golovaneva F. V., Meach Mon About unique classical solution mathematical model of forced vibrations rod system with singularities. [Baev A. D., Shabrov S. A., Golovanyova F. V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

Зиновьев Илья Николаевич, Аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: bekiz@email.ru

Zinovjev I. N., Postgraduate, Department of Mechanics and computer simulation, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: bekiz@email.ru

Чеботарев Андрей Сергеевич, Доцент кафедры теоретической и прикладной механики факультета ПММ, Кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: xeba@amm.vsu.ru
Тел.: +7(473)220–87–63

Chebotarev A. S., Associate professor of faculty of applied mathematics information technologies and mechanics, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: xeba@amm.vsu.ru
Tel.: +7(473)220–87–63