

УГЛОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В АНАЛИЗЕ ВЕТВЛЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

Б. М. Даринский, И. В. Колесникова, Ю. И. Сапронов, Н. С. Уварова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 30.03.2015 г.

Аннотация. В статье изложен подход к изучению бифуркаций решений периодических вариационных задач на основе модифицированного метода Ляпунова-Шмидта (редукции к анализу ключевой функции на (конечномерном) пространстве ключевых переменных), с использованием вторичных редукций и некоторых теорем теории особенностей гладких функций. Рассмотрена модельная задача, которой отвечает ключевая функция с круговой симметрией на шестимерном пространстве (функция, инвариантная относительно полусвободного действия окружности на \mathbb{R}^6). Показано, что анализ такой функции сводится к анализу некоторой функции в положительном октанте трехмерного координатного пространства. Сформулированы правила допустимости расклада бифурцирующих экстремалей гладкого функционала в угловой точке минимума. Рассмотрен случай 3-модовой бифуркации в вершине трехгранного угла. Дан также краткий обзор результатов (в основном, авторов статьи и их ближайших коллег) по изучению ветвления критических точек гладкого функционала в угловой точке минимума с омбилической особенностью. Сформулированы правила допустимости расклада бифурцирующих экстремалей гладкого функционала в угловой точке минимума.

Ключевые слова: гладкий функционал, бифурцирующая экстремаль, конечномерная редукция, угловая точка минимума, омбилическая особенность, максимальный расклад экстремалей, характеристический клеточный комплекс.

CORNER SINGULARITY OF SMOOTH FUNCTIONS IN THE ANALYSIS OF BRANCHINGS PERIODIC EXTREMALS

B. M. Darinski, I. V. Kolesnikova, Yu. I. Sapronov, N. S. Uvarova

Abstract. In the article is stated the approach of studying of bifurcations of decisions periodic variation tasks on the basis of the modified method Lyapunov-Schmidt (reductions to the analysis the function on (finite-dimensional) space of the key variables), with using secondary reductions and some theorems of the theory of features smooth functions. The model task which the key answers is considered function with circular symmetry on the six-dimensional space (function, invariant rather semi-free action of a circle on \mathbb{R}^6). It is shown that the analysis of such function is consolidated to to the analysis of some function in a positive octant of the three-dimensional coordinate space. The rules of the admissibility are formulated deal the bifurcation of the extremals of the smooth functionality in the corner to minimum point. The case of 3-mode bifurcation in top is considered trihedral corner. You can also see a short review of the results (generally is given authors of article and their next colleagues) on branching studying critical points of the smooth functionality in an angular point of a minimum with umbilical singularity. The rules of the admissibility are formulated deal the bifurcating of extremals of smooth functionality in the corner to minimum point.

Keywords: smooth functional, bifurcating extremal, finite dimensional reduction, corner minimum point, umbilical singularity, the maximum spreadings of extremals, coding matrix of the spreadings.

ВВЕДЕНИЕ

Широко известно, что многие стационарные состояния физических сред определяются решениями некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, являющимися уравнениями Эйлера экстремалей функционалов энергии при периодических краевых условиях. Например, сегнетоэлектрические фазовые состояния неоднородных кристаллов (в теории Ландау [1]) определяются вариационными периодическими задачами, в которых нелинейность задается термодинамическими потенциалами, аналитическая форма которых определяется на основе опытных данных и общих теоретических соображений [1], [2].

В качестве простейшей модели ниже рассмотрен функционал энергии с неоднородностью вдоль оси oz с трехкомпонентным вектором состояния

$$V(w, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L} dz, \quad \mathcal{L} \left(\frac{\partial w}{\partial z}, w \right) := \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 - \Pi(w) \right), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & |w|^6 + \beta |w|^4 + \alpha |w|^2 + \\ & + q_1 (w_1^2 w_2^2 + w_1^2 w_3^2 + w_2^2 w_3^2) |w|^2 + q_2 w_1^2 w_2^2 w_3^2 + \varkappa (w_1^2 w_2^2 + w_1^2 w_3^2 + w_2^2 w_3^2) \end{aligned}$$

— модельный потенциал, $w := (w_1, w_2, w_3)$, $\lambda = (\alpha, \beta, q_1, q_2, \varkappa)$. Компоненты λ — некоторые физические константы, $w = (w_1, w_2, w_3)$ — параметр состояния. Область определения функционала (1) — пространство E , состоящее из 2π -периодических функций класса C^4 со значениями в \mathbb{R}^3 .

Метод Ляпунова-Шмидта позволяет, при некоторых естественных условиях, заменить изучение функционала V анализом (ключевой) функции (см. [11])

$$W(\xi, \lambda) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, \lambda), \quad (2)$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где e_k — мода бифуркации, $k \leq 6$. Для того, чтобы прояснить существование, взаимные примыкания стабильных и метастабильных фаз, а также выяснить возможные порядки фазовых переходов, необходимо вычислить не только точки локальных и глобальных минимумов функционала энергии (1), но и седловые точки. Более того, требуется информация о структуре фазового портрета динамической системы $\dot{w} = -\text{grad } V(w)$ (градиент задан в скалярном произведении $\langle p, q \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (p, q) dx$). Если известна ключевая функция W , то эта структура определяется фазовым портретом W (фазовым портретом градиентной динамической системы $\dot{\xi} = -\text{grad } W(\xi)$).

Наша цель состоит в демонстрации возможности использования ключевой функции в задаче о ветвлениях стационарных фаз физических сред, включая описание алгебраического строения главной части ключевой функции, описание раскладов бифурцирующих фаз и приближенное вычисление асимптотических представлений ветвей бифурцирующих фаз (по закритическому приращению параметров).

1. МЕТОД ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Весьма распространенным типом уравнений, служащих абстрактными аналогами задач математической физики, является фредгольмово уравнение с параметром [3]

$$f(w, \lambda) = b, \quad w \in E, \quad b \in F, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k, \quad (3)$$

где $f : E \rightarrow F$ — гладкое семейство гладких фредгольмовых отображений (нулевого аналитического индекса) банаховых пространств. При некоторых критических значениях λ семейство решений может «бифурцировать», то есть часть решений может исчезать или может появиться несколько дополнительных ветвей.

Если имеется гладкий функционал V на E такой, что $f = \text{grad}_H V$ или, что эквивалентно, $\frac{\partial V}{\partial w}(w)h = \langle f(w), h \rangle_H$, $\forall w, h \in E$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в некотором гильбертовом пространстве H), то отображение f называется потенциальным, а функционал V называется потенциалом отображения f . В этом случае уравнение экстремалей можно переписать в виде

$$\text{grad}_H V(w) = 0, \quad w \in \mathcal{U}, \quad (4)$$

— уравнения Эйлера экстремалей (критических точек функционала) V . Напомним, что точка a называется критической V , если $\frac{\partial V}{\partial w}(a)h = \langle f(a), h \rangle_H = 0$, $\forall h \in E \setminus \{0\}$. Плотность E в H обеспечивает равносильность последнего равенства уравнению (4). Построение решений исходного уравнения можно заменить построением критических точек функционала V (вариационный метод). Функционал V называется фредгольмовым в случае фредгольмовости его градиентного отображения.

Критическая точка a функционала V называется невырожденной (морсовской), если $\frac{\partial f}{\partial w}(a)h \neq 0$, $\forall h \in E \setminus \{0\}$. Индексом Морса невырожденной критической точки a функционала V называется максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал $\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}(a)(h, h)$.

Если задана гладкая фредгольмова развертка $f(\cdot, \delta) : E \rightarrow F$, $\delta \in \Delta^m \subset \mathbb{R}^m$, Ω — открытое подмножество в E , то определяется дискриминантное множество $\Sigma(\Omega)$ уравнения

$$f(w, \delta) = b, \quad w \in \Omega, \quad (5)$$

как совокупность тех значений $\delta = \bar{\delta}$, для которых данное уравнение имеет в Ω вырожденное решение. В случае потенциального уравнения дискриминантное множество называется каустикой.

Если для потенциального отображения $f : E \rightarrow F$ выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial w}(w)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (w, h) \in E \times (E \setminus \{0\}), \quad (6)$$

то уравнение $f(w) = 0$ имеет не более одного решения. Это решение является точкой минимума V на E .

В случае выполнения условия собственности f (прообраз произвольного компакта компактен) уравнение $f(w) = 0$ однозначно разрешимо (в силу теоремы Банаха-Мазура-Каччиополи [3]). Его решение является точкой глобального минимума V .

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ РИТЦЕВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ И КЛЮЧЕВЫЕ ФУНКЦИИ

Соотношение (6) можно заменить несколько более слабым условием

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial w}(w)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (w, h) \in E \times (\tilde{E} \setminus 0), \quad (7)$$

где $\tilde{E} = E \cap N^\perp$, $N = \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, N^\perp — ортогональное дополнение к N в H , e_1, \dots, e_n — некоторая ортонормированная в H система векторов в E . При этом условии можно определить ключевую функцию Ляпунова-Шмидта

$$W(\xi) := \inf_{w: \langle w, e_j \rangle = \xi_j \quad \forall j} V(w), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (8)$$

«отвечающую» за поведение функционала V . Условие собственности f можно ослабить, заменив его условием собственности при каждом ξ «послойного» отображения

$$\tilde{f}_\xi: \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}, \quad \tilde{F} = F \cap N^\perp, \quad (9)$$

$$\tilde{f}_\xi(v) := P_{\tilde{F}}(f(l(\xi) + v)) = f(l(\xi) + v) - \sum_{j=1}^n \langle e_j, f(l(\xi) + v) \rangle e_j, \quad (10)$$

$l(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$. При выполнении условий (7), (9) уравнение

$$\tilde{f}_\xi(v) = q, \quad (11)$$

однозначно разрешимо при всех ξ, q , и его решение $v = \Phi(\xi)$ гладко зависит от ξ — по теореме о неявной функции. Левую часть (8) можно представить в виде

$$W(\xi) \equiv V(l(\xi) + \Phi(\xi)). \quad (12)$$

Для ключевого уравнения

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

в котором $\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))$, $\theta_j(\xi) = \langle f(l(\xi) + \Phi(\xi)), e_j \rangle$, имеем $\theta(\xi) = \text{grad } W(\xi)$.

Если отображение (9) является собственным и при этом выполняется условие положительности (7), то маргинальное отображение $\varphi: \xi \mapsto l(\xi) + \Phi(\xi)$, где $\Phi(\xi)$ определено уравнением (11), устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции (8) и заданного функционала V . При этом локальные кольца особенностей¹⁾ соответствующих функций в точках ξ и $\varphi(\xi)$ изоморфны, а в соответствующих друг другу однократных критических точках имеет место совпадение индексов Морса.

В случае параметрического уравнения 3 функция

$$W(\xi, \lambda) = V \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right)$$

¹⁾ Локальное кольцо особенности гладкого функционала V в критической точке a определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функционалами вида $\alpha(f(x))$, где α — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности нуля в пространстве F ($f = \text{grad}_H V$).

является называется ключевой для функционала $V(w, \lambda)$, а уравнение

$$f^n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0$$

называется уравнением разветвления (ключевым уравнением). Достаточно близкая к нулю точка $a \in E$ является решением уравнения $f(w, \lambda) = 0$ при $\lambda = \bar{\lambda}$ тогда и только тогда, когда

$$a = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i + \Phi(\bar{\xi}, \bar{\lambda}), \tag{14}$$

где $\bar{\xi}$ — близкая к нулю критическая точка ключевой функции. При этом a — невырожденное решение уравнения $f(w, \lambda) = 0$ (невырожденная экстремаль функционала V) лишь одновременно с невырожденностью $\bar{\xi}$ как критической точки для функции $W(\cdot, \bar{\lambda})$. Соотношение (14) служит основой для получения асимптотических формул ветвей решений.

Таким образом, изучение решение уравнения $f(w, \lambda) = 0$ или экстремалей функционала V вблизи нуля сводится к анализу ветвления критических точек функции $W(\cdot, \lambda)$. Проблема же вычисления тейлоровских разложений ключевой функции W решается посредством использования разложения W в ряд Тейлора. При этом часто используются ритцевские аппроксимации функционала

$$W_R(\xi) = V \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (мод бифуркации). Экстремалам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ функции W соответствуют точки $\bar{w} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V . Как правило, точность ритцевских аппроксимаций повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi) \right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$ в N^\perp (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих прикладных задачах можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций.

При исследовании ключевых функций фредгольмовых функционалов важную роль играют условия локальной конечной определенности гладких функций в особых точках. Приведем наиболее часто употребляемое условие, найденное Дж. Мазером (см. [4], [5]).

Заметим сначала, что гладкая функция V называется сильно r -определенной в точке a , если каждая функция U с тем же отрезком ряда Тейлора (порядка r) в точке a , который имеется у V , сильно локально гладко эквивалентна функции V , то есть найдется такое гладкое отображение $\varphi : (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)$ с единичной матрицей Якоби в точке a , что в некоторой окрестности этой точки a выполнено равенство $V(\varphi(w)) = U(w)$.

Согласно Дж. Мазеру, функция V является сильно r -определенной в нуле, если выполняется следующее условие Мазера:

$$\mathfrak{M}^{r+1} \subset \mathfrak{M}^2 \cdot J(V). \tag{15}$$

Здесь \mathfrak{M}^k — k -ая степень максимального идеала \mathfrak{M} в $\mathbb{R}[[w]]$, а $J(V)$ — якобиев идеал функции V в нуле.

Среди всевозможных гладких деформаций выделяются так называемые *версальные* и *миниверсальные*, играющие важную роль в общей теории деформаций особенностей. Это связано с тем, что версальные деформации «содержат в себе», все допустимые метаморфозы (перестройки линий уровня, расклейки и склейки особых точек, различные бифуркационные эффекты и т.д.), которые могут произойти при произвольном гладком деформировании функционала. Гладкая деформация $U(\cdot, \lambda)$ особенности функционала V в нуле называется версальной ([4], [5]), если факторклассы функционалов $\frac{\partial U}{\partial \lambda_k}(w, 0)$ (λ_k — координата λ , $k = 1, 2, \dots, \mu$) дают систему линейных образующих в локальном кольце особенности V в нуле (рассматриваемом как линейное пространство). Систему функций $\left\{ \frac{\partial U}{\partial \lambda_k}(w, 0), k = 1, 2, \dots, \mu \right\}$ иногда называют начальными скоростями деформации.

Гладкая деформация $U(w, \lambda)$ называется миниверсальной, если факторклассы ее начальных скоростей деформации образуют базис в локальном кольце особенности V в нуле.

Сокращенная на один параметр (после «отбрасывания» монома нулевой степени) миниверсальная деформация становится так называемой ограниченной миниверсальной деформацией. Число входящих в нее управляющих параметров совпадает с коразмерностью особенности.

Посредством миниверсальных деформаций вводятся различные бифуркационные диаграммы, важнейшими среди которых являются каустики, дискриминантные множества и множества Максвелла.

Геометрическая структура этих множеств не изменяется после перехода к ключевой функции.

3. УГЛОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛОВ

К задаче изучения поведения гладких функционалов вблизи угловых особых точек края банахова многообразия приходится обращаться как в пределах «чистого анализа» особенностей гладких функционалов, так и в смежных областях — теории управления, теории фазовых переходов, теории бифуркаций периодических волн и т.д. Один из подходов к изучению угловых особенностей основан на конечномерных редукциях, приспособленных для угловых особенностей. Приспособление состоит в том, что ключевые параметры выбираются согласованными с ограничителями — неравенствами, задающими край в окрестности угловой точки. Простейший способ такого согласования — включение системы ограничителей в систему ключевых параметров.

Общая схема анализа краевых и угловых особенностей гладких функций и их разверток была создана усилиями В. И. Арнольда, С. Т. С. Уолла, Д. Сирсмы, Д. Пита, Т. Постона и др. (см. [5], [13], [14]). В. И. Арнольдом был сформулирован принцип отождествления краевых особенностей с особенностями, инвариантными относительно действия элементарной инволюции (инволюция элементарна, если коразмерность ее зеркала равна единице). Этот принцип позволил перенести понятие краевой особенности на комплексный случай и развить соответствующую теорию. Затем Д. Сирмой была развита теория угловых особенностей [14], как обобщение теории краевых особенностей. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах В. А. Васильева, А. А. Давыдова, В. И. Матова и др. [5]

Перенос теории угловых особенностей на класс фредгольмовых функционалов был осуществлен Ю. И. Сапроновым посредством вариационной версии метода Ляпунова–Шмидта [11]. Сравнительно недавно Ю. И. Сапроновым, А. В. Гнездиловым, О. Ю. Даниловой, О. В. Швыревой, М. А. Хуссаином, А. В. Белоглазовым и И. В. Колесниковой был проана-

лизирован ряд важных бифуркационных задач в угловых особых точках, связанных с приложениями к задачам механики сплошных сред и математической физики [11], [12], [16]–[18]. Выяснилось, что ряд внешне различных краевых задач приводит в конечном итоге к одной и той же задаче — изучению ветвления критических точек параметрического семейства многочленов от переменных ξ_1, \dots, ξ_n в положительном октанте координатного пространства \mathbb{R}^n . Список примеров такого рода постоянно растет.

Пусть функционал $V(w, \lambda)$ задан при ограничениях на основную переменную в виде m неравенств, задающих неособо пересекающиеся гладкие поверхности и выделяющих m -гранный угол: $\mathcal{C} = \{w \in E \mid g_i(w) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$. В случае $m = 1$ (одного неравенства) получаем так называемую краевую особенность. Точка $a \in \mathcal{C}$ называется условно критической для гладкого функционала $V(w, \lambda)$, если $\text{grad}_H V(0)$ ортогонален грани \mathcal{C} , содержащей a . Число элементов носителя $\text{supp}(a) = \{k \in \{1, \dots, m\} \mid g_k(a) \neq 0\}$ (приведенная размерность минимальной грани угла, содержащей эту точку) называется порядком точки a .

Анализ поведения $V(w, \lambda)$ можно проводить на основе перехода к ключевой функции

$$W(\xi) = \inf_{w: g(w)=\xi} V(w)$$

в какой-либо схеме конечномерной редукции. Здесь $g(w) = (g_1, \dots, g_n)$, $\{g_i\}_{i=1}^n$ — набор независимых гладких функционалов (ключевых параметров), включающий в себя семейство ограничителей $\{g_k\}_{k=1}^m$ (определяющих угол). Функционалы $g_i(w)$ подчинены, как правило, дополнительным условиям технического характера. Предполагается, что $\text{grad}_H g_i(w) \in F \forall w \in E$. и что вблизи нуля в каждом слое $g^{-1}(\xi)$ существует единственная (морсовская) экстремаль $\varphi(\xi)$. Тогда исследование V в угле \mathcal{C} сводится к исследованию функции W в координатном угле $\xi_j \geq 0, j = 1, \dots, m$.

Кратность μ условно критической точки $w_0 \in \mathcal{C}$ определяется как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - a]]/\mathcal{T}(W, a)$, где a — образ w_0 в пространстве ключевых переменных, $\mathbb{R}[[\xi - a]]$ — алгебра формальных степенных рядов от $\xi - a$, а $\mathcal{T}(W, a)$ — угловой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - a]]$, порожденный двумя следующими наборами функций (тейлоровскими разложениями этих функций): $\left\{ \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right\}$, $\left\{ \xi_k \frac{\partial W}{\partial \xi_k} \right\}$, $i, k \in \text{supp}(a)$. Точка, для которой $\mu = 1$, называется простой или регулярной.

Подмногообразие \mathcal{N} , состоящее из точек $\varphi(\xi)$, называется редуцирующим. Ключевая функция представляет собой сужение функционала V на редуцирующее подмногообразие.

Пусть $\widehat{M} \in E \times \mathbb{R}^q$ — многообразие катастроф, то есть $\widehat{M} = M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_m$, где M_k определяется соотношениями: $f(w, \lambda) = 0, w \in \mathcal{C}_k, \dim \text{Ker} \frac{\partial [f]_k}{\partial w}(w, \lambda) > 0$. Здесь \mathcal{C}_k — совокупность граней угла \mathcal{C} приведенной размерности k , \mathcal{C}_0 — вершинная грань угла, а $[f]_k = \text{grad}_H (V|_{\mathcal{C}_k})$.

Каустика Σ является образом многообразия катастроф относительно канонической проекции $\pi : E \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q, \Sigma = \pi(\widehat{M})$. Если известна оценка сверху числом d значений индексов Морса всех бифурцирующих экстремалей, то каждый $bi\text{-}f$ -расклад описывается матрицей $L = (l_k^j)$, в которой элемент l_k^j совпадает с количеством критических точек (углового) индекса k на j -мерных гранях (в приведенном смысле: $m - j$ — коразмерность грани). Как обычно, версальные деформации угловых особенностей содержат информацию о всех метаморфозах, происходящих при всевозможных гладких деформированиях функции — о перестройках поверхностей уровня, расклейках и склейках особых точек, о различных бифуркационных эффектах и т.д., и поэтому они играют центральную роль в теории угловых особенностей (как и в теории обычных особенностей).

В угловом случае версальная деформация определяется как функция $V(w, \lambda)$, для которой совокупность ростков функций $\frac{\partial V}{\partial \lambda_j}(w, 0)$ (начальных скоростей деформации) дает систему линейных образующих в угловом кольце особенности $\widehat{Q}_0(V)$. Если эта совокупность является базисом $\widehat{Q}_0(V)$, то деформация называется миниверсальной. Если вместо кольца ростков

гладких функций использовать максимальный (в нем) идеал и профакторизовать его по угловому якобиеву идеалу, то получим усеченное угловое локальное кольцо $\widehat{Q}_0^*(V)$. Деформация $V(w, \lambda)$, для которой $V(w, 0) = 0$ и совокупность ростков функций $\frac{\partial V}{\partial \lambda_j}(w, 0)$ образует базис $\widehat{Q}_0^*(V)$, называется ограниченной миниверсальной деформацией. Каустика такой деформации называется главной и обозначается Σ (чаще всего каустикой особенности называют главную каустику).

4. ВЕТВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ФАЗЫ С 6-МЕРНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Легко заметить, что группа G симметрий исходного функционала (1) порождена преобразованиями

$$g_1 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ -w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

$$g_3 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ -w_3 \end{pmatrix}, \quad g_\omega : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_\omega(1) \\ w_\omega(2) \\ w_\omega(3) \end{pmatrix}, \quad \forall \omega \in S_3,$$

$$g_4 : \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1(-z) \\ w_2(-z) \\ w_3(-z) \end{pmatrix}, \quad J_\varphi : \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1(z + \varphi) \\ w_2(z + \varphi) \\ w_3(z + \varphi) \end{pmatrix},$$

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$, S_3 — группа перестановок третьего порядка.

При некоторой локализации параметров получим в нуле 6-мерное вырождение со следующими модами бифуркации:

$$e_1 = \begin{pmatrix} c(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} s(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ s(z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c(z) \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s(z) \end{pmatrix},$$

где

$$c(z) = \sqrt{2} \cos(z), \quad s(z) = \sqrt{2} \sin(z).$$

В линейной оболочке $\mathcal{N} = \text{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$, естественно отождествляемой с \mathbb{R}^6 (пространством ключевых параметров), индуцируется действие группы G . Полученный сужением образ этой группы в $SO(6)$ также обозначим G . Нетрудно убедиться в том, что действие группы G в \mathbb{R}^6 порождено матрицами

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

U_ω — матрица оператора $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3) \mapsto (\xi_{\omega(1)}, \eta_{\omega(1)}, \xi_{\omega(2)}, \eta_{\omega(2)}, \xi_{\omega(3)}, \eta_{\omega(3)})$,

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Ключевая функция*

$$W(\xi) := \inf_{w:g(w)=\xi} V(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^6, \quad (16)$$

где $g(w) = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$, $g_j(w) := \langle w, e_j \rangle$ ($\langle w, e_j \rangle = \int_0^{2\pi} w e_j dx$), наследует симметрию функционала V : функция W инвариантна относительно действия G на \mathbb{R}^6 .

Доказательство этой теоремы несложно провести, если воспользоваться общими теоремами о наследовании симметрий ключевыми функциями [11].

Если воспользоваться тейлоровским разложением ключевых функций [11] и указанной выше симметрией, то получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Ключевая функция $W(\xi)$ имеет (с точностью до масштабирующей преобразований аргумента и общего множителя, зависящего от констант потенциала) следующий вид:*

$$(I_1 + I_2 + I_3)^3 + \varepsilon(I_1 + I_2 + I_3)^2 + \delta(I_1 + I_2 + I_3) + \gamma_1(I_4^2 + I_5^2 + I_6^2) + \gamma_2(I_7^2 + I_8^2 + I_9^2) + \\ + (p_1(I_4^2 + I_5^2 + I_6^2) + p_2(I_7^2 + I_8^2 + I_9^2))(I_1 + I_2 + I_3) + q_1 I_1 I_2 I_3 + q_2 I_4 I_5 I_6 + O(|\xi|^8),$$

где I_1, \dots, I_9 — образующие инварианты действия окружности $z \rightarrow \exp(i\varphi)z$ (вектор $\xi \in \mathbb{R}^6$ отождествлен с комплексным вектором $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, $z_1 = \xi_1 + i\xi_2$, $z_2 = \xi_3 + i\xi_4$, $z_3 = \xi_5 + i\xi_6$):

$$I_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2, \quad I_3 = \xi_5^2 + \xi_6^2,$$

$$I_4 = \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_4, \quad I_5 = \xi_3 \xi_5 + \xi_4 \xi_6, \quad I_6 = \xi_5 \xi_1 + \xi_6 \xi_2,$$

$$I_7 = -\xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3, \quad I_8 = -\xi_3 \xi_6 + \xi_4 \xi_5, \quad I_9 = -\xi_5 \xi_2 + \xi_6 \xi_1.$$

Коэффициенты $\varepsilon, \delta, \gamma_k, q_k$ допускают явные выражения через коэффициенты $\beta, \alpha, q, \varkappa$. При этом $\varepsilon, \delta, \gamma_k = O(\beta, \alpha, \varkappa)$.

Доказательство нетрудно провести, если заметить, что образующей системой инвариантов действия группы \mathcal{G} является набор следующих многочленов:

$$J_1 = I_1 + I_2 + I_3, \quad J_2 = I_4^2 + I_5^2 + I_6^2, \quad J_3 = I_7^2 + I_8^2 + I_9^2, \quad J_4 = I_1 I_2 I_3, \quad J_5 = I_4 I_5 I_6.$$

После введения полярных координат $z_1 = r_1 e^{i\psi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\psi_2}$, $z_3 = r_3 e^{i\psi_3}$ получим функцию в форме $U = \tilde{U} + O(|\xi|^8)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= J_1^3 + \varepsilon J_1^2 + \delta J_1 + \gamma_1 J_2 + \gamma_2 J_3 + (p_1 J_2 + p_2 J_3)J_1 + q_1 J_4 + q_2 J_5 = \\ &= \sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + \gamma_1 (r_1^2 r_2^2 \cos^2(\psi_1 - \psi_2) + r_2^2 r_3^2 \cos^2(\psi_2 - \psi_3) + r_3^2 r_1^2 \cos^2(\psi_3 - \psi_1)) + \\ &\quad + \gamma_2 (r_1^2 r_2^2 \sin^2(\psi_1 - \psi_2) + r_1^2 r_3^2 \sin^2(\psi_2 - \psi_3) + r_1^2 r_3^2 \sin^2(\psi_3 - \psi_1)) + \\ &\quad + (p_1 (r_1^2 r_2^2 \cos^2(\psi_1 - \psi_2) + r_2^2 r_3^2 \cos^2(\psi_2 - \psi_3) + r_1^2 r_3^2 \cos^2(\psi_3 - \psi_1)) + \\ &\quad + p_2 (r_1^2 r_2^2 \sin^2(\psi_1 - \psi_2) + r_1^2 r_3^2 \sin^2(\psi_2 - \psi_3) + r_3^2 r_1^2 \sin^2(\psi_3 - \psi_1))) \sigma_1 + \\ &\quad + q_1 \sigma_3 + q_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \cos(\psi_2 - \psi_3) \cos(\psi_3 - \psi_1) \sigma_3 + O(|r|^8). \end{aligned}$$

Здесь и ниже $\sigma_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$, $\sigma_2 = r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_3^2$, $\sigma_3 = r_1^2 r_2^2 r_3^2$.

Стационарные по ψ_j точки для (огрубленной) функции \tilde{U} находятся из уравнения $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \psi_j} = 0$. Ясно, что эти точки определяются нулями функций $\cos(\psi_j - \psi_k)$, $\sin(\psi_j - \psi_k)$. Нетрудно заметить, что, например, следующие подмножества являются квазиинвариантными подмножествами [20] для этой функции:

$$\mathcal{M}_0 := \{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3\}, \quad \mathcal{M}_1 := \{\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_3 - \varphi_1 = \pi/2\}.$$

Сузив \tilde{U} на \mathcal{M}_0 или \mathcal{M}_1 , получим (редуцированную) функцию вида

$$W = \sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + p \sigma_1 \sigma_2 + \gamma \sigma_2 + q \sigma_3, \quad (17)$$

анализ которой можно осуществить посредством дополнительных редукций.

5. НЕКОТОРЫЕ ЗАПРЕТЫ ДЛЯ *bif*-РАСКЛАДОВ

Пусть W — функция вида (17) с условием конечнократности (автоматически 125-кратной) в нуле старшей однородной части (порядка 6). Данное предположение означает, что $q \neq 0$. Через $\mathcal{L} = (l_0, l_1, l_2, l_3)$ обозначим *bif*-расклад (количества минимумов, седел индекса (Морса) 1, седел индекса 2 и количество максимумов). Из формулы Эйлера следует, что для максимального расклада (из 125 критических точек) $l_1 + l_3 = 62$, $l_0 + l_2 = 63$.

Правило 1. *Бифурцирующие (из нуля) критические точки функции (17) могут располагаться лишь на координатных осях $r_j = r_k = 0$, на диагональных осях $r_1 = \pm r_2 = \pm r_3$ и на диагональных плоскостях $r_j = \pm r_k$.*

Доказательство. Так как $\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r}$, $\det \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) = 8r_1 r_2 r_3 (r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_3^2)$ и $\frac{\partial W}{\partial \sigma} = (3\sigma_1^2 + 2\varepsilon \sigma_1 + \delta + p \sigma_2, p \sigma_1 + \gamma, q) \neq 0$, то критические точки могут появляться лишь при условии $r_1 r_2 r_3 (r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_3^2) = 0$, эквивалентном утверждению теоремы.

Правило 2. *Если старшая часть функции (17) принимает в нуле строго минимальное значение, то $p > -4$ и $27 + 9p + q > 0$.*

Доказательство. Для старшей части W_0 имеем $W_0 = \sigma_1^3 + p \sigma_1 \sigma_2 + q \sigma_3 = \sigma_1(\sigma_1^2 + p \sigma_2) + q \sigma_3$. Так как $\sigma_1 \geq 0$, то проверка первого утверждения теоремы сводится к проверке положительности сужения W_0 на координатную плоскость $r_3 = 0$, то есть положительной определенности кватеричной формы $\sigma_1^2 + p \sigma_2 = r_1^4 + r_2^4 + a r_1^2 + r_2^2$, $a = 2 + p$, которая положительна тогда и только тогда, когда $a > -2$.

Второе утверждение получается посредством проверки положительной определенности сужения W_0 на диагональ $r_1 = r_2 = r_3$.

Правило 3. *Если \mathcal{L} — максимальный *bif*-расклад для *tin*-особенности шестого порядка, то для соответствующей возмущенной функции W начало координат является точкой локального минимума.*

Доказательство проводится через рассмотрение сужений $W|_{r_k=0}$. В случае максимального расклада соответствующие расклады критических точек для $W|_{r_k=0}$ также будут максимальными. Следовательно, $\frac{\partial^2 W}{\partial r_k^2}(0) > 0 \quad \forall k$ (для функции с симметрией квадрата $\frac{\partial^2 W}{\partial r_1 \partial r_2}(0) = 0$).

Правило 4. Если \mathcal{L} — *bif*-расклад для *min*-особенности шестого порядка на \mathbb{R}^3 , то на каждой из полуосей координат и на диагональных полуосях существует не более двух ненулевых критических точек.

Если на одной из таких полуосей имеется пара ненулевых критических точек, то эти точки разнотипны (с различными значениями индекса Морса).

Доказательство. Первое утверждение проверяется через рассмотрение сужений $W|_{r_k=0}$. Невозможность существования на каждой оси пары минимумов или максимумов также проверяется через рассмотрение таких сужений.

Запрет на существование пары минимумов или пары максимумов очевиден. Менее очевиден случай пары седел. Предположим противное: пусть на положительной полуоси $r_2 = r_3 = 0, r_1 \geq 0$ имеется пара ненулевых седел (или, что эквивалентно, имеется четыре седла на всей оси $r_2 = 0$). В случаях остальных осей рассуждения аналогичны. Для критической точки на данной оси координат выполняется соотношение

$$\frac{\partial W}{\partial r_1}(r_1, 0, 0) = 2r_1(3r_1^4 + 2\epsilon r_1^2 + \delta) = 0. \quad (18)$$

Следовательно, $r_1^2 = -\frac{\epsilon}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\epsilon^2 - 3\delta}$, $\epsilon < 0, \delta < \frac{\epsilon^2}{3}$. В случае левого корня ($r_1^2 = -\frac{\epsilon}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\epsilon^2 - 3\delta}$) имеем (в силу предположения противного) $\frac{\partial^2 W}{\partial r_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r_3^2} > 0$, а в случае правого ($r_1^2 = -\frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\epsilon^2 - 3\delta}$) выполнено неравенство $\frac{\partial^2 W}{\partial r_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r_3^2} < 0$. Так как $\frac{\partial^2 W}{\partial r_k^2}(r_1, 0) = 2((3+p)r_1^4 + (\epsilon + \gamma)r_1^2 + \delta)$, $k > 1$, то, в силу (18), для одной из осей получим $pr_1^2 + \gamma - \epsilon > 0$ для левого корня и $pr_1^2 + \gamma - \epsilon < 0$ — для правого. Или, соответственно, $\frac{p}{3}(-\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 3\delta}) + \gamma - \epsilon > 0$ и $\frac{p}{3}(-\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 3\delta}) + \gamma - \epsilon < 0$. После вычитания неравенств получим при $p > 0$ (случай $p < 0$ сводится к $p > 0$ поворотом осей на угол $\pi/4$) противоречивое неравенство $p\sqrt{\epsilon^2 - 3\delta} < 0$.

6. РЕДУКЦИЯ К ФУНКЦИИ НА ПЛОСКОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Выше указано, что главная часть \tilde{U} ключевой функции после вторичной редукции принимает следующий вид: $\sigma_1^3 + \epsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + p \sigma_1 \sigma_2 + \gamma \sigma_2 + q \sigma_3$,

$$\sigma_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad \sigma_2 = r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2, \quad \sigma_3 = r_1^2 r_2^2 r_3^2.$$

После подстановки $r_1 = r \cos(\varphi_1), r_2 = r \cos(\varphi_2), r_3 = r \cos(\varphi_3)$ (здесь $\sum_j \cos^2(\varphi_j) = 1$) получим $\sigma_1 = r^2, \sigma_2 = r^4 (\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) - \cos^4(\varphi_1) - \cos^4(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2)), \sigma_3 = r^6 (\cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2) (\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2)))$.

Множество критических точек функции W является (при фиксированных значениях параметров) пересечением поверхностей M_0, M_1 и M_2 , определяемых уравнениями $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ (поверхность радиально стационарных точек) и $\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = 0, \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = 0$ (поверхности стационарных точек по тангенциальным переменным φ_1, φ_2).

Из (17) следует, что M_0 задается уравнением

$$6r^5 + 4\epsilon r^3 + 2\delta r +$$

$$+2r^3 ((3p r^2 + \gamma)(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) - \cos^4(\varphi_1) - \cos^4(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2)) - 6q r^5 (\cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2) (\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2))) = 0.$$

Поверхность M_k задается уравнением $(p r^2 + \gamma) \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi_k} + q \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varphi_k} = 0$. Множество всех критических точек совпадает с пересечением $M_0 \cap M_1 \cap M_2$. Пересечение $M_1 \cap M_2$ определяется уравнением $(p r^2 + \gamma) \text{grad}_\varphi \sigma_2 + q \text{grad}_\varphi \sigma_3 = 0$. Часть этого множества определяется соотношениями

$$(p r^2 + \gamma) = 0, \quad \text{grad}_\varphi \sigma_3 = 0.$$

Множество \mathbb{O} точек, определяемых последним уравнением, представляет собой объединение трех экваториальных окружностей («тройной обруч»), полученных пересечением сферы $p r^2 + \gamma = 0$ с координатными плоскостями $r_k = 0$.

Остальные точки данного множества определяются (при различных значениях параметров) уравнением $[\sigma_2, \sigma_3] = 0$, где $[\sigma_2, \sigma_3]$ — якобиан (скобка Пуассона) функций σ_2, σ_3 (по φ_1, φ_2).

Описание раскладов можно провести посредством исследования функций двух переменных в областях с углами. Действительно, функция W после замены $r_k^2 = \eta_k$ превращается в полином третьей степени

$$\widehat{W} = s_1^3 + \varepsilon s_1^2 + \delta s_1 + p s_1 s_2 + \gamma s_2 + q s_3, \tag{19}$$

$$s_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad s_2 = \eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3, \quad s_3 = \eta_1 \eta_2 \eta_3.$$

При $p = 0$ (и, следовательно, при достаточно малом p) исследование критических точек функции (19) в положительном октанте $\eta_k \geq 0$ сводится к исследованию функции

$$U = \tilde{p} s_2 + \tilde{q} s_3 + \text{const} \tag{20}$$

на треугольной области $s_1 := \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = d_j, \eta_k \geq 0 \forall k, j = 1, 2$, где d_1 и d_2 — точки

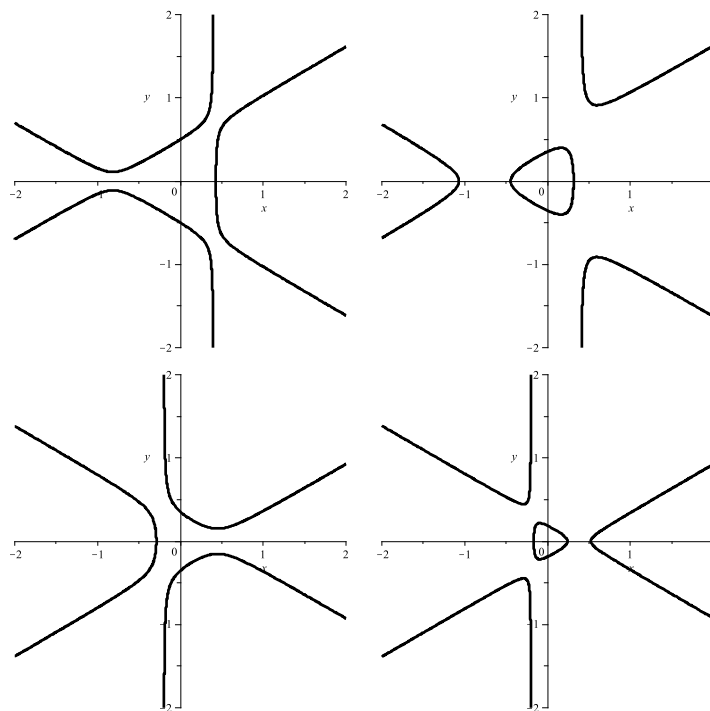


Рис. 1. Линии уровня возмущенной симметричной эллиптической омбилики

минимума и максимума полинома $s_1^3 + \varepsilon s_1^2 + \delta s_1$.

В прямоугольных координатах на плоскости $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = \text{const}$ (треугольная) область определения Ω функция U — ограниченный равносторонний треугольник. Расположим начало координат в центре треугольника, а одну из сторон сделаем параллельной второй координатной оси. Функция U приобретет в этих координатах (с учетом всех симметрий) форму возмущенной симметричной (относительно поворота плоскости на угол $\frac{2\pi}{3}$) эллиптической омбилики: $a \left(\frac{u_1^3}{3} - u_1 u_2^2 \right) + b (u_1^2 + u_2^2) + \text{const}$. Типичные линии уровня этой функции изображены на рисунке 1.

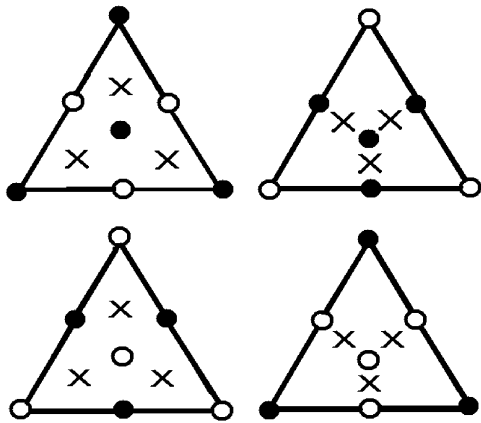


Рис. 2. Схематичное изображение критических точек на области U (в соответствии с рисунком 4)

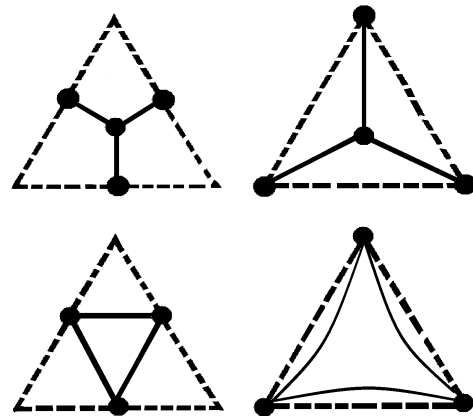


Рис. 3. Характеристические клеточные комплексы, кодирующие расположение критических точек

Расклады критических точек U определяют расклады экстремалей функции W , которые можно представить комплексами на сфере. Им соответствуют следующие фрагменты клеточных комплексов, изображающих расклады критических точек в треугольной области. На рисунках «невидимые» ребра изображены пунктирными линиями (кроме ребер, расположенных на координатных линиях). Последний клеточный комплекс содержит двумерные клетки, являющимися конусами над (изогнутыми) ребрами с вершинами в начале координат.

На основе этих изображений фрагментов можно построить полные изображения трехмерных характеристических клеточных комплексов, соответствующих исходной ключевой функции. Например, первому комплексу соответствует следующий фрагмент общего 3-мерного характеристического комплекса (та его часть, которая принадлежит одному из координатных октантов в \mathbb{R}^3).

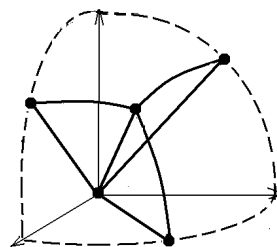


Рис. 4. Фрагмент характеристического 3d-комплекса

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лайнс, М. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы / М. Лайнс, А. Гласс. — М.: Мир, 1981. — 736 с.
2. Изюмов, Ю. А. Фазовые переходы и симметрия кристаллов / Ю. А. Изюмов, В. И. Сыромятников. — Москва, Наука, 1984. — 247 с.
3. Борисович, Ю. Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера / Ю. Г. Борисович, В. Г. Звягин, Ю. И. Сапронов // Успехи матем. наук. — 1977. — Т. 32, вып. 4. — С. 3–54.
4. Бреккер, Т. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Бреккер, Л. Ландер. — М.: Мир, 1977. — 208 с.
5. Арнольд, В. И. Особенности дифференцируемых отображений / В. И. Арнольд. — М.: МЦНМО, 2004. — 672 с.
6. Morse, M. The Critical Points of a Function of n Variables / M. Morse // Trans. Am. Math. Soc. — 1931. — V. 33. — P. 72–91.
7. Morse, M. The calculus of variations in the large / M. Morse. — New York, 1934.
8. Palais, R.S. Morse Theory on Hilbert Manifolds / R.S. Palais // Topology. — 1963. V. 2. — P. 299–340.
9. Милнор, Дж. Теория Морса / Дж. Милнор. — М.: Мир, 1965.
10. Постников, М. М. Введение в теорию Морса / М. М. Постников. — М.: Наука, 1971. — 568 с.
11. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.
12. Костин, Д. В. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем / Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов. — Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2012. — 207 с.
13. Постон, Т. Теория катастроф и её приложения / Т. Постон, И. Стюарт. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
14. Siersma, D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc / D. Siersma // Quart. J. Oxford Ser. — 1981. — V. 32, № 125. — P. 119–127.
15. Сапронов, Ю. И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций / Ю. И. Сапронов // Матем. сборник. — 1989. — Т. 180, № 10. — С. 1299–1310.
16. Белоглазов, А. В. Бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из омбилической точки минимума в вершине угла / А. В. Белоглазов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2006. — № 2. — С. 147–153.
17. Колесникова, И. В. Двухмодовые ветвления экстремалей гладких функционалов в точках минимума с однородными особенностями шестого порядка / И. В. Колесникова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2009. — № 9, вып. 2. — С. 25–30.
18. Колесникова, И. В. Ветвление фаз кристалла, определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка / И. В. Колесникова, Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов // Системы управления и информационные технологии. — 2009. — № 1(35). — С. 72–76.
19. Колесникова, И. В. Максимальные расклады бифурцирующих экстремалей гладкого функционала из угловой точки минимума с омбилической особенностью / И. В. Колесникова, Ю. И. Сапронов, Н. С. Уварова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 205–211.
20. Сапронова, Т. Ю. О разрушении компактных критических орбит инвариантных фредгольмовых функционалов при несимметричных возмущениях / Т. Ю. Сапронова // Труды математического факультета. Новая серия. — 1997. — № 2. — С. 54–58.

REFERENCES

1. Lines M., Glass A. Ferroelectric and related materials. [Lajns M., Glass A. Segnetoe'lektriki i rodstvennyye im materialy]. Moscow: Mir, 1981, 736 p.
2. Izyumov Yu.A., Syromyatnikov V. I. Phase transitions and symmetry crystals. [Izyumov Yu.A., Syromyatnikov V.I. Fazovye perexody i simmetriya kristallov]. Moscow: Nauka, 1984, 247 p.
3. Borisovich Yu. G., Zvyagin V. G. and Sapronov Yu. I. Non-linear Fredholm maps and the Leray-Schauder theory. [Borisovich Yu.G., Zvyagin V.G., Sapronov Yu.I. Nelinejnye fredgol'movy otobrazheniya i teoriya Lere-Shaudera]. *Uspehi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1977, vol. 32, iss. 4, pp. 3–54.
4. Breker T., Lander L. Differentiable Germs and Catastrophes. [Breker T., Lander L. Differenciruemye rostki i katastrofy]. Moscow: Mir, 1977, 208 p.
5. Arnol'd V. I., Varchenko A. N., Gusein-Zade S. M. Singularities of Differentiable Mappings. [Arnol'd V.I., Varchenko A.N., Gusejn-Zade S.M. Osobennosti differenciruemyx otobrazhenij]. Moscow, 2004, 672 p.
6. Morse M. The Critical Points of a Function of n Variables. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1931, vol. 33, pp. 72–91.
7. Morse M. The calculus of variations in the large, New York, 1934.
8. Palais R.S. Morse Theory on Hilbert Manifolds. *Topology*, 1963, vol. 2, pp. 299–340.
9. Milnor J. Morse Theory. [Milnor Dzh. Teoriya Morsa]. Moscow: Mir, 1965.
10. Postnikov M. M. Introduction to the Morse Theory. [Postnikov M.M. Vvedenie v teoriyu Morsa]. Moscow: Nauka, 1971, 568 p.
11. Darinsky B. M., Sapronov Yu.I., Tsaryov S. L. Bifurcations of extremals of Fredholm functionals. [Darinskij B.M., Sapronov Yu.I., Carev S.L. Bifurkacii e'kstremalej fredgol'movyx funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 12, pp. 3–140.
12. Kostin D. V., Sapronov Yu.I., Functional analysis and multimode deflections of the elastic systems. [Kostin D.V., Sapronov Yu.I. Funkcional'nyj analiz i mnogomodovye progiby uprugix sistem]. Voronezh: VGU, 2012, 207 p.
13. Poston T., Stewart I. Catastrophe Theory and Its Applications, Dover Publications. [Poston T., Styuart I. Teoriya katastrof i eyo prilozheniya]. Moscow: Mir, 1980, 608 p.
14. Siersma D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc. *Quart. J. Oxford Ser.*, 1981, vol. 32, no. 125, pp. 119–127.
15. Sapronov Yu.I. Semiregular corner singularities of smooth functions. [Sapronov Yu.I. Poluregulyarnye uglovye osobennosti gladkix funkcij]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1989, vol. 180, no. 10, pp. 1299–1310.
16. Beloglazov A.V. Bifurcations of extremals of Fredholm functionality from umbilic point of a minimum in vertex of corners. [Beloglazov A.V. Bifurkacii e'kstremalej fredgol'mova funkcionala iz ombilicheskoy tochki minimuma v vershine ugla]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2006, no. 2, pp. 147–153.
17. Kolesnikova I.V. Dvukhmodovye of branching of extremals smooth functionalities in minimum points with uniform features of the sixth order. [Kolesnikova I.V. Dvuxmodovye vetvleniya e'kstremalej gladkix funkcionalov v tochkax minimuma s odnorodnymi osobennostyami shestogo poryadka]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 2, pp. 25–30.
18. Kolesnikova I.V., Darinsky B.M., Sapronov Yu.I. Branching of phases crystal, determined

by the thermodynamic potential of the sixth order. [Kolesnikova I.V., Darinskij B.M., Sapronov Yu.I. Vetvlenie faz kristalla, opredelyaemyx termodinamicheskim potencialom shestogo porjadka]. *Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii — Control systems and information technologies*, 2009, no. 1 (35), pp. 72–76.

19. Kolesnikova I.V., Sapronov Yu.I., Uvarova N. S. Maximum deals the bifurcsiruyushchikh of extremals of smooth functionality from an angular point minimum with ombilichesky feature. [Kolesnikova I.V., Sapronov Yu.I., Uvarova N.S. Maksimal'nye rasklady bifurcsiruyushchix e'kstremalej gladkogo funkcionala iz uglovoj tochki minimuma s ombilicheskoj osobennost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 205–211.

20. Sapronova T.Yu. About destruction of compact critical orbits invariant Fredholm functionalities at the asymmetrical indignations. [Sapronova T.Yu. O razrushenii kompaktnyx kriticheskix orbit invariantnyx fredgol'movykh funkcionalov pri nesimmetrichnyx vozmushheniyax]. *Trudy matematicheskogo fakul'teta. Novaya seriya — Works of mathematical faculty. New series*, 1997, no. 2, pp. 54–58.

Даринский Борис Михайлович, д-р ф.-м.наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: darinskii@mail.ru

Darinskii B.M., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: darinskii@mail.ru

Колесникова И.В., к.ф.-м.н., Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kolesnikova_i@math.vsu.ru

Kolesnikova I.V., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kolesnikova_i@math.vsu.ru

Сапронов Юрий Иванович, д-р ф.-м.наук, профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: yusapr@mail.ru

Sapronov Yu.I., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: yusapr@mail.ru

Уварова Н.С., аспирант кафедры математического моделирования, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kolinna@inbox.ru

Uvarova N.S., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kolinna@inbox.ru