УДК 517.956

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. П. Архипов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Госуниверситет — УНПК» (учебно-научно-производственный комплекс)

Поступила в редакцию 20.03.2015 г.

Аннотация. Статья посвящена исследованию возможности построения асимптотик решений общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. С помощью преобразования Фурье по касательным переменным вблизи гиперплоскости вырождения, краевая задача приводится к исследованию обыкновенного дифференциального вырождающегося уравнения второго порядка с параметром. Установлены равномерные по параметру оценки асимптотических представлений решений, допускающие возможность применения обратного преобразования Фурье. Подробно представлены примеры построения асимптотик двух модельных задач как для обобщенных, так и классических решений.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, преобразование и ряды Фурье, асимптотические последовательности и ряды.

Памяти учителя посвящается.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS FOR DEGENERATED ELLIPTIC EQUATIONS

V. P. Arkhipov

Abstract. This paper is devoted to the finding of ability to build some asymptotic solutions of general boundary-value problem for degenerated elliptic equations of second-order. The boundary value problem is brining to research of ordinary degenerated differential equation of second-order with parameter by the help of Fourier transform for tangential variables near the hyperplane of degeneracy. Equal by parameter estimations of asymptotic representation of solution are setting up, considering the ability of applying the Fourier inverse transform. Some detailed examples of building asymptotic solutions for two modeled problems of weak and for classical versions are presented.

Keywords: degenerated differential equations, Fourier transform and series, asymptotic sequences and series.

Вырождающиеся дифференциальные уравнения вызывали достаточно большой интерес в шестидесятых — восьмидесятых годах теперь уже прошлого столетия. В работах М. В. Келдыша, определившего направления исследований, О. А. Олейник, Г. Фикера, А. М. Ильина, С. Г. Михлина, М. И. Вишека и В. В. Грушина, Дж. Дж. Коэна и Л. Ниренберга были заложены основы развития теории. Подробный и качественный анализ достигнутых результатов с подробнейшей библиографией был представлен В. П. Глушко и Ю. Б. Савченко в [1]. Следует отметить весьма существенный вклад в проведенных исследованиях Воронежской школы математиков, созданной В. П. Глушко. Изучение общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений во многом основывается на его работе [2], использующей метод коэрцитивных оценок в специально построенных весовых пространствах. При этом эллиптический в области $G \subset R^n$ дифференциальный оператор второго порядка, вырождающийся на границе S_G, с помощью разбиения единицы, введения локальных координат, выделения в каждой локальной окрестности главных частей уравнения и граничных операторов после преобразования Фурье в касательных направлениях сводится к рассмотрению двухточечной граничной задачи для обыкновенного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка с параметром. Реализуя в своей работе методику исследования, основанную на равенстве Парсеваля и оценках в весовых пространствах типа С. Л. Соболева, В. П. Глушко замечает, что возможно более перспективным является путь, использующий применение обратного преобразования Фурье. В настоящей работе делается попытка показать возможную реализацию этого пути и получить асимптотические представления решений вблизи характеристической поверхности.

Пусть G — ограниченная область пространства R^n, с граничным $(n-1)$-мерным многообразием S_G, являющемся характеристическим для эллиптического дифференциального оператора второго порядка

$$L:\ Lu = \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{i,j}(y)D_j u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(y)D_i u + c(y)u$$

$(\omega(y,\varsigma) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(y)\varsigma_i\varsigma_j > 0$ при $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in G$ и $\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n) \neq 0$; $\omega(y^0, \varsigma) = 0$ при $y^0 \in S_G$). На S_G задан граничный дифференциальный оператор B. Следуя схеме исследования работы [2] и всем необходимым условиям для её реализации после использования разбиения единицы и перехода к локальным координатам $t = t(x)$; $y = (y_1, y_2, \ldots y_{n-1})$, $y_i = y_i(x)$ в окрестности каждой точки $y^0 \in S_G$ в полушаре $U_\delta = \{(t;y) : t^2 + |x|^2 \leqslant \delta^2, t > 0, |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2\}$ получим краевую задачу

$$L_{t,0}\widehat{u} = f(t,x), \quad B_{t,0}\widehat{u}|_{t=0} = g(x), \quad \widehat{u}(\delta, x) = 0. \tag{1}$$

(1. $L_{t,0}$ и $B_{t,0}$ — главные части заданных операторов L и B, записанные в локальных координатах в точке y^0 с замороженными в этой точке коэффициентами по переменным x с $x = 0$. 2. В определенных случаях граничное условие при $t = 0$ снимается (см. [2]).) Преобразование Фурье по переменным $x \to \xi$ приводит задачу (1) к краевой задаче для обыкновенного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка с параметром $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Построенные в [3] асимптотические разложения для вырождающихся уравнений второго порядка дают возможность получить решение этой задачи в явном виде. Применив далее обратное преобразование Фурье придем к решению задачи (1). Представим здесь реализацию предложенной В. П. Глушко схемы на двух конкретных примерах.

1. Рассмотрим модельную для (1) краевую задачу в полосе $\Omega = [0;\delta] \times R^{n-1} \subset R^n$, $t \in [0;\delta]$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in R^{n-1}$:

$$(a(t)\widehat{u'}_t(t,x))'_t + b\widehat{u'}_t(t,x) + A\widehat{u}(t,x) = f(t,x),\ \widehat{u}(0,x) = 0,\ \widehat{u}(\delta,x) = 0; \tag{2}$$

где $a(0)=0$, $b=const<0$, $a(t)>0$, $t\in(0;\delta]$ и $A\widehat{u}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial^2\widehat{u}}{\partial x_i^2}-r\widehat{u}$ $(r\geqslant 0)$. (Если $b>0$ краевое условие при $t=0$ снимается.) Будем предполагать достаточную гладкость всех функций в (2) для выполнения дальнейших операций. После преобразования Фурье по переменным $x\to\xi$, получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на $[0;\delta]$:

$$(a(t)\widetilde{u}'_t(t,\xi))'_t+b\widetilde{u}'_t(t,\xi)-(r+\xi^2)\widetilde{u}(t,\xi)=\widetilde{f}(t,\xi), \tag{3}$$

$$\widetilde{u}(0,\xi)=0,\ \ \widetilde{u}(\delta,\xi)=0; \tag{4}$$

где $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_{n-1})$, $\xi_i\in R^1$, $\xi^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_{n-1}^2$ и $\widetilde{f}(t,\xi)=F_{x\to\xi}\widehat{f}(t,x)$.

При решении задачи (3)–(4) будем опираться на результаты работы [3] для обыкновенного дифференциального уравнения (но без параметра). Основную роль при исследовании решений уравнения (3) играют функциональные последовательности

$$\{\varphi_k(t,\xi)\},\{\psi_k(t,\xi)\},\ \text{где}\ \varphi_{k+1}(t,\xi)=K_1\varphi_k,\quad \psi_{k+1}(t,\xi)=K_2\psi_k,\varphi_0(t,\xi)\equiv\psi_0(t,\xi)\equiv 1, \tag{5}$$

заданные интегральными операторами $K_{1,2}$:

$$K_1\varphi(t,\xi)=\int\limits_0^\delta K_1(t,t_1,\xi)\varphi(t_1,\xi)dt_1,\quad K_2\psi(t,\xi)=\int\limits_0^t K_2(t,t_1,\xi)\psi(t_1,\xi)dt_1,$$

где $K_1(t,t_1,\xi)=\begin{cases} h(t_1,\xi), & 0\leqslant t_1\leqslant t\leqslant\delta\\ h(t_1,\xi)e^{w(t_1,\xi)-w(t,\xi)}, & t\leqslant t_1\leqslant\delta\end{cases}$ и

$$K_2(t,t_1,\xi)=-h(t_1,\xi)[1-e^{w(t,\xi)-w(t_1,\xi)}],\ \ 0\leqslant t_1\leqslant t\leqslant\delta\ \text{при}\ \xi\in R^{n-1},$$

а функции $\alpha(t,\xi)=\sqrt{b^2+4a(t)(r+\xi^2)}$, $w(t,\xi)=\int\limits_t^\delta\dfrac{\alpha(t_1,\xi)}{a(t_1)}dt_1=\int\limits_t^\delta\dfrac{\sqrt{b^2+4a(t_1)(r+\xi^2)}}{a(t_1)}dt_1$ и $h(t,\xi)=\dfrac{\alpha^{-1}(t,\xi)}{4}\cdot\left(a(t)(\dfrac{\alpha'(t,\xi)}{\alpha(t,\xi)})^2-2\left(a(t)\dfrac{\alpha'(t,\xi)}{\alpha(t,\xi)}\right)'\right)$.

В настоящей работе не будем стараться сформулировать максимально точно условия гладкости на функцию $a(t)$, определяющую скорость вырождения уравнения (2), однако примем некоторые условия, обеспечивающие корректность полученных утверждений.

Условие 1. Функция $a(t)\in C^\infty[0;1]$, $a(0)=0$, $a(t)>0$ при $t>0$ и существует $m_1>0$: $\frac{(a'(t))^2}{a(t)}\leqslant m_1$ для $t\in(0;1]$.

(Бесконечная дифференцируемость функции $a(t)$ не требуется для разрешимости в пространствах С. Л. Соболева. Отметим, что при этом $\lim\limits_{t\to 0+0}a'(t)=0$ (сильное вырождение) и для $\xi\in R^{n-1}$ $\lim\limits_{t\to 0+0}h(t,\xi)=0$.)

Лемма 1. При выполнении *Условия 1* функция $h(t,\xi)$ равномерно ограничена в полосе $[0;1]\times R^{n-1}\subset R^n$; т.е. существует $M_h>0$: $|h(t,\xi)|\leqslant M_h$ при $(t;\xi)\in[0;1]\times R^{n-1}$.

Доказательство. Преобразуем:

$$h(t,\xi)=\frac{\alpha^{-1}(t,\xi)}{4}\cdot\left(a(t)\left(\frac{(\alpha^2)'}{2\alpha^2}\right)^2-\left(a(t)\frac{(\alpha^2)'}{\alpha^2}\right)'\right)=$$

$$=\frac{r\xi^2(b^2+4a(t)(r+\xi^2))^{-\frac{1}{2}}}{4}\left(\frac{4(r+\xi^2)a(t)}{1}\left(\frac{a'(t)}{b^2+4a(t)(r+\xi^2)}\right)^2-\left(\frac{2(a^2(t))'}{b^2+4a(t)(r+\xi^2)}\right)'\right)=$$

$$=\frac{(r+\xi^2)((r+\xi^2)(2a(t)(a'(t))^2-4a(t)(a^2(t))''+4(a^2(t))'a'(t))-(a^2(t))''b^2)}{2(b^2+4a(t)(r+\xi^2))^{5/2}}=$$

$$=\frac{[(10a(t)(a'(t))^2-4a(t)(a^2(t))'')(r+\xi^2)-(a^2(t))''b^2](r+\xi^2)}{2(b^2+4a(t)(r+\xi^2))^{\frac{5}{2}}}.$$

Обозначим $z=a(t)(r+\xi^2)\geqslant 0$ и заметим, что из *Условия 1* следует ограниченность $\frac{(a^2(t))''}{a(t)}$, т.е. существует $m_2>0$: $\left|\frac{(a^2(t))''}{a(t)}\right|\leqslant m_2$. Тогда:

$$|h(t,\xi)|=\left|\frac{\left[\left(\frac{10(a'(t))^2}{a(t)}-\frac{4(a^2(t))''}{a(t)}\right)z-\frac{b^2(a^2(t))''}{a(t)}\right]z}{2(b^2+4z)^{\frac{5}{2}}}\right|\leqslant\frac{[(10m_1+4m_2)z+b^2m_2]z}{2(b^2+4z)^{\frac{5}{2}}}\leqslant M_h.$$

Размер области Ω исследования уравнения (2) определяется Условием 2.

Условие 2. Существует $\delta:0<\delta\leqslant 1$ такое, что при любых $\xi\in R^{n-1}$ выполняется неравенство $\int\limits_0^\delta|h(t_1,\xi)|\,dt_1\leqslant\delta\cdot M_h\leqslant\frac{1}{4}$ и $a'(t)>0$ при $t\in(0;\delta]$.

(Заметим, что *Лемма 1* фактически делает *Условие 2* следствием *Условия 1.*)

Отметим несколько полезных свойств операторов $K_{1,2}$ и функциональных последовательностей (5).

Лемма 2. При выполнении *Условий 1–2* справедливы следующие утверждения:
а) ядро $K_1(t,t_1,\xi,\xi_1)$ — непрерывная функция четырех переменных на $[0;\delta]\times[0;\delta]\times R^{n-1}\times R^{n-1}$;
б) для всех $\xi\in R^{n-1}$ оператор K_1 — ограниченный оператор из $C[0;\delta]$ в $C[0;\delta]$ и $\|K_1\|_{C_{[0;\delta]}\to C_{[0;\delta]}}\leqslant\frac{1}{4}$;
в) при всех $\xi\in R^{n-1}$ для любой функции $\varphi(t,\xi)\in C[0;\delta]$

$$\lim_{t\to 0+0}K_1\varphi(t,\xi)=\lim_{t\to 0+0}\left(\int\limits_0^t h(t_1,\xi)\varphi(t_1,\xi)dt_1+e^{-w(t,\xi)}\int\limits_t^\delta h(t_1,\xi)e^{w(t_1,\xi)}\varphi(t_1,\xi)dt_1\right)=0;$$

г) пусть $\varphi_{1,2}(t,\xi)\in C[0;\delta]$ при $\xi\in R^{n-1}$ и существует $\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{\varphi_1(t,\xi)}{\varphi_2(t,\xi)}=A(\xi)$, то существует и $\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{K_1\varphi_1(t,\xi)}{K_1\varphi_2(t,\xi)}=A(\xi)$;
д) при всех $t\in[0;\delta]$ для любой ограниченной интегрируемой функции $\varphi(t,\xi)$ $\lim\limits_{\xi^2\to+\infty}K_1\varphi(t,\xi)=0$.

Абсолютно такие же предложения устанавливаются и для оператора K_2. Свойства операторов $K_{1,2}$ фактически показывают, что последовательности (5) при всех $\xi\in R^{n-1}$ являются асимптотическими при $t\to 0+0$.

Лемма 3. При выполнении *Условий 1–2* функции

$$\Phi(t,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t,\xi),\quad \Psi(t,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t,\xi), \tag{6}$$

при каждом $\xi\in R^{n-1}$ представляющие асимптотические при $t\to 0+0$, абсолютно и равномерно сходящиеся ряды, бесконечно дифференцируемы на $[0;\delta]$. При этом

$$\|\Phi(t,\xi)\|_{C[0;\delta]}\leqslant 2,\quad \|\Psi(t,\xi)\|_{C[0;\delta]}\leqslant 2 \tag{7}$$

и функции

$$\widetilde{u}_1(t,\xi)=\nu_1(t,\xi)\Phi(t,\xi),\quad \widetilde{u}_2(t,\xi)=\nu_2(t,\xi)\Psi(t,\xi), \tag{8}$$

где $v_k(t,\xi)=\alpha^{-\frac{1}{2}}(t,\xi)\exp\left\{\int\limits_t^{\delta}\dfrac{b+(-1)^{k-1}\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}$, образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения (3).

Доказательство *Лемм 2–3* проводится как в [3].

Отметим также, что $\Phi'_t(t,\xi)=\dfrac{\alpha(t,\xi)}{a(t)}\int\limits_t^{\delta}h(t_1,\xi)e^{w(t_1,\xi)-w(t,\xi)}\Phi(t_1,\xi)dt_1$ и

$$\Psi'_t(t,\xi)=-\frac{\alpha(t,\xi)}{a(t)}\int\limits_0^{t}h(t_1,\xi)e^{w(t,\xi)-w(t_1,\xi)}\Psi(t_1,\xi)dt_1. \tag{9}$$

Замечание 1. Нетрудно проверить (см. [3]), что $\Phi(t,\xi)$ при любом $\xi\in R^{n-1}$ даёт решение начальной задачи $\left(\dfrac{a(t)}{\alpha(t,\xi)}\Phi'(t,\xi)\right)'-\Phi'(t,\xi)+h(t,\xi)\Phi(t,\xi)=0$, $\Phi(0,\xi)=1$, $\Phi'(0,\xi)=0$; а $\Psi(t,\xi)$ удовлетворяет условиям: $\left(\dfrac{a(t)}{\alpha(t,\xi)}\Psi'(t,\xi)\right)'+\Psi'(t,\xi)+h(t,\xi)\Psi(t,\xi)=0$, $\Psi(0,\xi)=1$.

Следуя [2], рассмотрим обобщенные решения задачи (3)–(4) в весовых пространствах $\widetilde{H}^2_a(0;\delta)$.

Определение. Функция $\widetilde{u}(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}^m_a(0;\delta)$ $(m\geqslant 0)$, если $u(t)\in L_2(0;\delta)$ имеет обобщенные производные до порядка m на $(0;\delta)$ и конечна норма

$$\|\widetilde{u}\|^2_{m,a}=\sum_{j+2s\leqslant m}\left\|(\sqrt{a(t)}\partial_t)^j\partial_t^s\widetilde{u}\right\|^2\quad (m\geqslant 0),\ (\|\cdot\| \text{ — норма в } L_2(0;\delta)).$$

Теорема 1. Пусть выполнены *Условия 1–2* и $\widetilde{f}(t,\xi)\in L_2(0;\delta)$, тогда при $\xi\in R^{n-1}$ существует непрерывное на $[0;\delta]$ решение $\widetilde{u}(t,\xi)\in\widetilde{H}^2_a(0;\delta)$ задачи (3)-(4):

$$\widetilde{u}(t,\xi)=\left(\frac{\exp\left\{\int\limits_t^{\delta}\dfrac{b-\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\xi)}}\cdot C_{01}(\xi)+C_{02}(t,\xi)\right)\cdot\Psi(t,\xi)+C_{11}(t,\xi)\cdot\Phi(t,\xi), \tag{10}$$

где $C_{01}(\xi)=\dfrac{\Phi(\delta,\xi)}{\Psi(\delta,\xi)}\displaystyle\int\limits_0^\delta \frac{\Psi(t_1,\xi)\exp\left\{-\int\limits_{t_1}^{\delta}\frac{2(r+\xi^2)d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)(r+\xi^2)}+|b|}\right\}}{\sqrt{\alpha(t_1,\xi)}}\widetilde{f}(t_1,\xi)dt_1,$

$$C_{02}(t,\xi)=\int\limits_t^\delta \frac{-\Phi(t_1,\xi)\exp\left\{-\int\limits_t^{t_1}\frac{|b|d\tau}{a(\tau)}\right\}\exp\left\{-\int\limits_t^{t_1}\frac{2(r+\xi^2)d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)(r+\xi^2)}+|b|}\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\xi)\alpha(t_1,\xi)}}\widetilde{f}(t_1,\xi)dt_1,$$

$$C_{11}(t,\xi)=\int\limits_0^t \frac{-\Psi(t_1,\xi)\exp\left\{-\int\limits_{t_1}^{t}\frac{2(r+\xi^2)d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)(r+\xi^2)}+|b|}\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\xi)\alpha(t_1,\xi)}}\widetilde{f}(t_1,\xi)dt_1.$$

При этом выполняется неравенство

$$\left\|a(t)\widetilde{u}''_t(t,\xi)\right\|^2+\left\|\widetilde{u'}_t(t,\xi)\right\|^2+(r+\xi^2)^2\left\|\widetilde{u}(t,\xi)\right\|^2\leqslant C\left\|\widetilde{f}(t,\xi)\right\|^2,\ C>0. \tag{11}$$

(Здесь мы умышленно почти полностью сохраняем формулировки соответствующего предложения из [2].)

Доказательство. Общее решение неоднородного уравнения (3) представимо на $(0;\delta]$ в виде (см. [3])

$$\widetilde{u}(t,\xi)=\widetilde{C}_1(\xi)\cdot\widetilde{u}_1(t,\xi)+\widetilde{C}_2(\xi)\cdot\widetilde{u}_2(t,\xi)+\widetilde{u}_*(t,\xi) \tag{12}$$

где функции $\widetilde{u}_{1,2}(t,\xi)$ определены в (7), а $\widetilde{u}_*(t,\xi)=\displaystyle\int\limits_0^\delta\widetilde{G}(t,t_1,\xi)\widetilde{f}(t_1,\xi)dt_1$, где

$$\widetilde{G}(t,t_1,\xi)=\begin{cases}\dfrac{-\Phi(t,\xi)\Psi(t_1,\xi)\exp\left\{-\displaystyle\int\limits_{t_1}^{t}\frac{b+\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{a(\delta)W(\delta,\xi)\sqrt{\alpha(t,\xi)\alpha(t_1,\xi)}}, & 0<t_1\leqslant t;\\[2ex] \dfrac{-\Phi(t_1,\xi)\Psi(t,\xi)\exp\left\{\displaystyle\int\limits_{t}^{t_1}\frac{b-\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\widehat{x}\right\}}{a(\delta)W(\delta,\xi)\sqrt{\alpha(t,\xi)\alpha(t_1,\xi)}}, & t\leqslant t_1\leqslant\delta,\end{cases}$$

и $W(\delta,\xi)=\widetilde{u}_1(\delta,\xi)\widetilde{u}'_2(\delta,\xi)-\widetilde{u}'_1(\delta,\xi)\widetilde{u}_2(\delta,\xi)$, некоторое решение уравнения (3).

Оценим предельное поведение Вронскиана

$$W(t,\xi)=\widetilde{u}_1\widetilde{u'}_2-\widetilde{u'}_1\widetilde{u}_2=W(\delta,\xi)\exp\left\{\int\limits_t^\delta\frac{b+a'(t_1)}{a(t_1)}dt_1\right\}\neq 0 \text{ (формула Лиувилля).}$$

Преобразуем (см. (8)–(9)):

$$W(t,\xi)=\widetilde{u}_1\widetilde{u}'_2-\widetilde{u}'_1\widetilde{u}_2=(v_1v_2'-v_1'v_2)\Phi\Psi+v_1v_2(\Phi\Psi'-\Phi'\Psi)=$$

$$=\frac{\alpha(t,\xi)v_1v_2}{a(t)}\left[\Phi\Psi-\left(\Psi\int\limits_t^{\delta}h(t_1,\xi)e^{-\int\limits_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}d\tau}\Phi(t_1,\xi)dt_1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Phi\int\limits_0^{t}h(t_1,\xi)e^{-\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}d\tau}\Psi(t_1,\xi)dt_1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{a(t)\exp\left\{\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|dt_1}{a(t_1)}\right\}}\left[\Phi\Psi-\Psi\int\limits_t^{\delta}h(t_1,\xi)e^{-\int\limits_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}d\tau}\Phi(t_1,\xi)dt_1-\right.$$

$$\left.-\Phi\int\limits_0^{t}h(t_1,\xi)e^{-\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}d\tau}\Psi(t_1,\xi)dt_1\right].$$

Из формулы Лиувилля теперь получаем:

$$W(\delta,\xi)=\lim_{t\to0+0}\frac{a(t)W(t,\xi)}{a}(\delta)\exp\left\{-\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|\,dt_1}{a(t_1)}\right\}=\frac{1}{a(\delta)},\tag{13}$$

так как $\lim\limits_{t\to0+0}\int\limits_t^{\delta}h(t_1,\xi)e^{-\int\limits_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}d\tau}\Phi(t_1,\xi)dt_1=\lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{\int\limits_t^{\delta}h(t_1,\xi)e^{\int\limits_{t_1}^{\delta}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}d\tau}\Phi(t_1,\xi)dt_1}{e^{\int\limits_t^{\delta}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}d\tau}}(\dfrac{\infty}{\infty})=$ $\lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{h(t,\xi)e^{\int\limits_t^{\delta}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}d\tau}\Phi(t,\xi)}{e^{\int\limits_t^{\delta}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}d\tau}\frac{\alpha(t,\xi)}{a(t)}}=0$, т.е. $a(\delta)W(\delta,\xi)=1$.

Рассмотрим предельное поведение решений при $t\to0+0$ для $b<0$ и $\xi\in R^{n-1}$.

$$\lim_{t\to0+0}\widetilde{u}_*(t,\xi)=\lim_{t\to0+0}\frac{-\Psi(t,\xi)}{\sqrt{\alpha(t,\xi)}}\int\limits_t^{\delta}\frac{\Phi(t_1,\xi)\exp\left\{-\int\limits_x^{x_1}\frac{|b|+\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t_1,\xi)}}\widetilde{f}(t_1,\xi)dt_1=$$

$$=-|b|^{-1}\cdot\lim_{t\to0+0}\frac{\int\limits_t^{\delta}\frac{\Phi(t_1,\xi)\exp\left\{\int\limits_{x_1}^{\delta}\frac{|b|+\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t_1,\xi)}}\widetilde{f}(t_1,\xi)dt_1}{\exp\left\{\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|+\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}(\frac{\infty}{\infty})=\text{ (по Лопиталю)}$$

$$=-|b|^{-1}\cdot\lim_{t\to0+0}\frac{-\frac{\Phi(t,\xi)\exp\left\{\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|+\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\xi)}}\widetilde{f}(t,\xi)}{-\exp\left\{\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|+\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}\frac{|b|+\alpha(t,\xi)}{2\cdot a(t)}}=0.\tag{14}$$

$$\lim_{t\to 0+0}\widetilde{u}_1(t,\xi)=\lim_{t\to 0+0}v_1(t,\xi)\Phi(t,\xi)=\lim_{t\to 0+0}v_1(t,\xi)=\exp\left\{\int\limits_0^\delta \frac{|b|^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(r+\xi^2)dt_1}{\sqrt{b^2+4a(t_1)(r+\xi^2)}+|b|}\right\}>0\,; \tag{15}$$

$$\lim_{t\to 0+0}\widetilde{u}_2(t,\xi)=\lim_{t\to 0+0}v_2(t,\xi)\Psi(t,\xi)=$$

$$=\exp\left\{-\int\limits_0^\delta \frac{|b|^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(r+\xi^2)dt_1}{\alpha(t_1,\xi)+|b|}\right\}\lim_{t\to 0+0}\exp\{-\int\limits_t^\delta \frac{|b|\,dt_1}{a(t_1)}\}=0. \tag{16}$$

Учитывая (12)–(16), любое решение уравнения (3), удовлетворяющее нулевому условию при $t=0$, имеет вид: $\widetilde{u}(t,\xi)=\widetilde{C}_2(\xi)\cdot\widetilde{u}_2(t,\xi)+\widetilde{u}_*(t,\xi)$. Для выполнения другого граничного условия достаточно выбрать $\widetilde{C}_2(\xi)=-\dfrac{\widetilde{u}_*(\delta,\xi)}{\widetilde{u}_2(\delta,\xi)}=-\dfrac{\alpha^{\frac{1}{2}}(\delta,\xi)\widetilde{u}_*(\delta,\xi)}{\Psi(\delta,\xi)}$.

Условие 2 гарантирует, что $\Psi(\delta,\xi)\neq 0$ при всех $\xi\in R^{n-1}$ (точнее: $\frac{1}{2}\leqslant\Psi(t,\xi)\leqslant\frac{3}{2}$ для $t\in[0;\delta]$). После несложных преобразований с учетом (13) получим формулу (9) решения задачи (3)–(4), представляющую при каждом $\xi\in R^{n-1}$ асимптотические разложения при $t\to 0+0$ по функциям (5). Справедливость неравенства (11) устанавливается прямыми техническими оценками интегралов в (10) или как в [2]. Не будем загромождать статью этими преобразованиями.

Формальное применение обратного преобразования Фурье к (10), возможное ввиду неравенства (11), приводит к $\widehat{u}(t,x)$ — решению задачи (2):

$$\widehat{u}(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{u}_{01,k}(t,x)+\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{u}_{02,k}(t,x), \tag{17}$$

где $\widehat{u}_{01,k}(t,x)=(2\pi)^{1-n}\int\limits_{R^{n-1}}C_{11}(t,\xi)\varphi_k(t,\xi)\exp\{ix\xi\}d\xi$, $x\xi=\sum\limits_{k=1}^{n-1}x_k\cdot\xi_k$,

$$\widehat{u}_{02,k}(t,x)=(2\pi)^{1-n}\int\limits_{R^{n-1}}\left(\frac{\exp\left\{\int\limits_t^\delta\frac{b-\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\xi)}}\cdot C_{01}(\xi)+C_{02}(t,\xi)\right)\psi_k(t,\xi)\exp\{ix\xi\}d\xi.$$

Главные (первые) члены разложения (17) при этом имеют вид:

$$\widehat{u}_{01,0}(t,x)=(2\pi)^{1-n}\int\limits_{R^{n-1}}C_{11}(t,\xi)\exp\{ix\xi\}d\xi,$$

$$\widehat{u}_{02,0}(t,x)=(2\pi)^{1-n}\int\limits_{R^{n-1}}\left(\frac{\exp\left\{\int\limits_t^\delta\frac{b-\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\xi)}}C_{01}(\xi)+C_{02}(t,\xi)\right)\exp\{ix\xi\}d\xi.$$

Не будем подробнее останавливаться на получающихся формулах и условиях, допускающих необходимые преобразования.

Замечание 2. Приведенный пример показывает, что исследование обобщенных решений общих граничных задач, удовлетворяющих условию дополнительности по отношению к α-

эллиптическому оператору L (см. [2]), может быть проведено аналогичным образом и не должно вызывать никаких принципиальных проблем. Однако исследование интегралов в (17) — отдельная непростая работа.

2. Второй пример предоставляет возможность построения классических решений и показывает, как получать оценки возникающих интегралов.

В прямоугольнике $t \in [0;\delta]$, $x \in [0;\pi]$ рассмотрим уравнение:

$$(a(t)u'_t(t,x))'_t + bu'_t(t,x) + Au(t,x) = f(t,x), \tag{18}$$

где $Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a(0) = 0$, $b < 0$, $a(t) > 0$, $t \in (0;\delta]$ и $f(t,x)$ — достаточно гладкая функция.

Специально сохраняем все ранее введенные обозначения и предположения.

Ограничимся исследованием однородной задачи Дирихле, т.е. решений уравнения (18), удовлетворяющих условиям (при некотором $\delta > 0$):

$$u(t,0) = u(t,\pi) = u(0,x) = u(\delta,x) = 0. \tag{19}$$

Решение ищем в стандартном для метода Фурье виде:

$$u(t,x) = \sum_{p=1}^{\infty} T(t,p)\sin px. \tag{20}$$

Для краткости изложения будем считать выполненными *Условия 1–2.*

Не акцентируя внимания на точных условиях разложимости, представим функцию $z = f(t,x)$ в виде ряда Фурье:

$$f(t,x) = \sum_{p=1}^{\infty} \widetilde{f}(t,p)\sin px. \tag{21}$$

Коэффициенты разложения (20) определяются как решения краевых задач с параметром:

$$(a(t)T'_t(t,p))'_t + bT'_t(t,p) - p^2T(t,p) = \widetilde{f}(t,p), \quad T(0,p) = T(\delta,p) = 0 \tag{22}$$

и устанавливаются их равномерные асимптотики при $t \to 0+0$ и $p \in N$. Задача (22) полностью совпадает с (3)–(4) при $r = 0$, отличаясь лишь дискретным значением одномерного параметра $p \in N$. Поэтому её решение $T(t,p)$ при $\widetilde{f}(t,p) \in C[0;\delta]$ может быть для любого $p \in N$ представлено в виде (10):

$$T(t,p) = \left(\frac{\exp\left\{ \int\limits_t^\delta \frac{b-\alpha(\tau,p)}{2\cdot a(\tau)} d\tau \right\}}{\sqrt{\alpha(t,p)}} \cdot C_{01}(p) + C_{02}(t,p) \right) \cdot \Psi(t,p) + C_{11}(t,p)\cdot\Phi(t,p), \tag{23}$$

где $C_{01}(p) = \dfrac{\Phi(\delta,p)}{\Psi(\delta,p)} \displaystyle\int\limits_0^\delta \frac{\Psi(t_1,p)\exp\left\{ -\int\limits_{t_1}^\delta \frac{2p^2 d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)p^2}+|b|} \right\}}{\sqrt{\alpha(t_1,p)}} \widetilde{f}(t_1,p)dt_1,$

$$C_{02}(t,p) = \int\limits_t^\delta \frac{-\Phi(t_1,p)\exp\left\{ -\int\limits_t^{t_1} \frac{|b|d\tau}{a(\tau)} \right\} \exp\left\{ -\int\limits_t^{t_1} \frac{2p^2 d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)p^2}+|b|} \right\}}{\sqrt{\alpha(t,p)\alpha(t_1,p)}} \widetilde{f}(t_1,p)dt_1,$$

$$C_{11}(t,p)=\int\limits_0^t \frac{-\Psi(t_1,p)\exp\left\{-\int\limits_{t_1}^{t}\frac{2p^2d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)p^2}+|b|}\right\}}{\sqrt{\alpha(t,p)\alpha(t_1,p)}}\widetilde{f}(t_1,p)dt_1.$$

Сохраним здесь все обозначения первого примера, считая, что в них $r=0$ и ξ заменено на $p\in N$. Например $\alpha(t,p)=\sqrt{b^2+4a(t)p^2}$.

Как следует из результатов работы [3], функции $T(t,p)$ при всех $p\in N$ обладают достаточной гладкостью, чтобы представлять классическое решение задачи (22), т.е. $T(t,p)$, $T'_t(t,p)$ и $a(t)T''_t(t,p)$ принадлежат $C[0;\delta]$ и удовлетворяют условиям (22). Для того, чтобы функция $u(t,x)$, определенная в (20) и (23), давала классическое решение для (19) достаточно доказать равномерную при $t\in[0;\delta]$ сходимость мажорирующих рядов:

$$\sum_{p=1}^{\infty}p^2\left|T(t,p)\right|,\quad \sum_{p=1}^{\infty}\left|T'_t(t,p)\right|,\quad \sum_{p=1}^{\infty}\left|(a(t)T'_t(t,p))'_t\right|.$$

Проведём их анализ при условии сходимости ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|$.

Лемма 4. Пусть выполнены *Условия 1-2* и для всех $p\in N$ функция $\widetilde{f}(t,p)$ непрерывна при $t\in[0;\delta]$, тогда при некотором $M_0>0$:

$$|T(t,p)|\leqslant\frac{M_0}{p^2}\max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right| \text{ для всех } t\in[0;\delta] \text{ и } p\in N.$$

Доказательство. Из (23) с учетом (7) получаем:

$$|T(t,p)|\leqslant 2\left(\frac{\exp\left\{\int\limits_t^{\delta}\frac{b-\alpha(\tau,p)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,p)}}\cdot|C_{01}(p)|+|C_{02}(t,p)|+|C_{11}(t,p)|\right). \tag{24}$$

Оценим каждое слагаемое из правой части, не ставя цели получить точные неравенства.

Для первого напомним, что $\frac{1}{2}\leqslant\Psi(t,p)\leqslant\frac{3}{2}$ и $|\Phi(t,p)|\leqslant 2$ для $t\in[0;\delta]$ и всех $p\in N$. Интегрируя по частям получим:

$$\int\limits_0^{\delta}\frac{\exp\left\{-\int\limits_{t_1}^{\delta}\frac{2p^2d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)p^2}+|b|}\right\}}{\sqrt{\alpha(t_1,p)}}dt_1=$$

$$=\frac{\alpha(\delta,p)+|b|}{2p^2\sqrt{\alpha(\delta,p)}}-\frac{\sqrt{|b|}}{p^2}\exp\left\{-\int\limits_0^{\delta}\frac{2p^2d\tau}{\alpha(\tau,p)+|b|}\right\}-\int\limits_0^{\delta}\frac{\exp\left\{-\int\limits_{t_1}^{\delta}\frac{2p^2d\tau}{\alpha(\tau,p)+|b|}\right\}}{2p^2}\left(\frac{\alpha(t_1,p)+|b|}{\sqrt{\alpha(t_1,p)}}\right)'dt_1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2p^2}\left(\sqrt{\alpha(\delta,p)}+\frac{|b|}{\sqrt{\alpha(\delta,p)}}\right)\leqslant\frac{\widetilde{m}_{01}}{p^{\frac{3}{2}}},$$

где $\widetilde{m}_{01}=(b^2+4a(\delta))^{1/4}$ (т.к. $a'(x_1)>0$). Тогда:

$$|C_{01}(p)|\leqslant\frac{6\widetilde{m}_{01}}{p^{\frac{3}{2}}}\max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|. \tag{25}$$

Отметим, что $\alpha^{-\frac{1}{2}}(t,p)\exp\left\{\int\limits_t^\delta \frac{b-\alpha(\tau,p)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\} = \exp\left\{-\int\limits_t^\delta \frac{|b|}{a(\tau)}d\tau\right\} A(t,p)B(t,p)$, где $A(t,p) = \exp\left\{-\int\limits_t^\delta \frac{2p^2 d\tau}{\alpha(\tau,p)+|b|}\right\}$, $B(t,p) = \alpha^{-\frac{1}{2}}(t,p)$. Далее при $t \in [0;\frac{\delta}{2}]$:

$$A(t,p)B(t,p) \leqslant \alpha^{-\frac{1}{2}}(0,p)\exp\left\{-\int\limits_{1/2}^{\delta} \frac{2p^2 d\tau}{\alpha(\tau,p)+|b|}\right\} \leqslant |b|^{-1}\exp\left\{\frac{-\delta p^2}{\sqrt{b^2+4a(\delta)p^2}+|b|}\right\} \leqslant \frac{m*}{p};$$

и при $t \in [\frac{\delta}{2};\delta]$: $A(t,p)B(t,p) \leqslant \alpha^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta}{2},p\right)\exp\left\{-\int\limits_t^\delta \frac{2p^2 d\tau}{\alpha(\tau,p)+|b|}\right\} \leqslant \alpha^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta}{2},p\right) \leqslant \frac{m**}{\sqrt{p}}$.

В целом из этих оценок и (25) получаем:

$$\frac{\exp\left\{\int\limits_t^\delta \frac{b-\alpha(\tau,p)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,p)}}|C_{01}(p)| \leqslant \exp\left\{\int\limits_t^\delta \frac{-|b|}{a(\tau)}d\tau\right\}\frac{m_{01}}{p^2}\max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right| \text{ при } m_{01}>0. \tag{26}$$

Для второго слагаемого в (24):

$$|C_{02}(t,p)| \leqslant \frac{2\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|}{\sqrt{\alpha(t,p)}}\int\limits_t^\delta \frac{\exp\left\{-\int\limits_t^{t_1}\frac{(\alpha(\tau,p)+|b|)d\tau}{2a(\tau)}\right\}}{\sqrt{\alpha(t_1,p)}}dt_1 =$$

$$= \frac{2\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|}{\sqrt{\alpha(t,p)}}\left(\frac{2a(t)}{\sqrt{\alpha(t,p)}(\alpha(t,p)+|b|)} - \exp\left\{-\int\limits_t^\delta \frac{(\alpha(\tau,p)+|b|)d\tau}{2a(\tau)}\right\}\frac{2a(\delta)}{\sqrt{\alpha(\delta,p)}(\alpha(\delta,p)+|b|)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_t^\delta \exp\left\{-\int\limits_t^{t_1}\frac{(\alpha(\tau,p)+|b|)d\tau}{2a(\tau)}\right\}\left(\frac{2a(t_1)}{\sqrt{\alpha(t_1,p)}(\alpha(t_1,p)+|b|)}\right)' dt_1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|}{\sqrt{\alpha(t,p)}}\left(\frac{2a(t)}{\sqrt{\alpha(t,p)}(\alpha(t,p)+|b|)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_t^\delta \exp\left\{-\int\limits_t^{t_1}\frac{(\alpha(\tau,p)+|b|)d\tau}{2a(\tau)}\right\}\frac{2a'(t_1)}{\sqrt{\alpha(t_1,p)}(\alpha(t_1,p)+|b|)}dt_1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|}{\alpha(t,p)(\alpha(t,p)+|b|)}\left(a(t) + \int\limits_t^\delta a'(t_1)\exp\left\{-\int\limits_t^{t_1}\frac{|b|\,d\tau}{a(\tau)}\right\}dt_1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4a(t)\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|}{\alpha(t,p)(\alpha(t,p)+|b|)}\left(1 + \frac{\int\limits_t^\delta a'(t_1)\exp\left\{-\int\limits_t^{t_1}\frac{|b|d\tau}{a(\tau)}\right\}dt_1}{a(t)}\right) \leqslant \frac{m_{02}\cdot a(t)}{\alpha^2(t,p)}\max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|. \tag{27}$$

($\alpha(t,p)$ — возрастающая, а $\dfrac{\int\limits_t^\delta a'(t_1)\exp\left\{-\int\limits_t^{t_1}\frac{|b|d\tau}{a(\tau)}\right\}dt_1}{a(t)}$ — ограниченная на $[0;\delta]$ функция, так как $\lim\limits_{t\to 0+0} e^{-\int\limits_t^\delta \frac{|b|-a'(\tau)}{a(\tau)}d\tau} \int\limits_t^\delta a'(t_1)e^{\int\limits_{t_1}^\delta \frac{|b|}{a(\tau)}d\tau} dt_1 = \lim\limits_{t\to 0+0} \dfrac{\int\limits_t^\delta a'(t_1)e^{\int\limits_{t_1}^\delta \frac{|b|}{a(\tau)}d\tau} dx_1}{e^{\int\limits_t^\delta \frac{|b|-a'(\tau)}{a(\tau)}d\tau}} = \dfrac{a(\delta)a'(0)}{|b|-a'(0)} = 0.$)

Продолжая (27), получаем:

$$|C_{02}(t,p)| \leqslant \frac{m_{02}\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|}{p^2}\frac{p^2 a(t)}{\alpha^2(t,p)} \leqslant \frac{m_{02}}{p^2}\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(x,p)\right| \text{ при всех } p\in N. \quad (28)$$

Рассмотрим третье слагаемое из правой части неравенства (24). Как и выше:

$$|C_{11}(t,p)| \leqslant \frac{2\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|}{\sqrt{\alpha(t,p)}}\int\limits_0^t \frac{\exp\left\{-\int\limits_{t_1}^t \frac{2p^2 d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)p^2}+|b|}\right\}}{\sqrt{\alpha(t_1,p)}}dt_1 \leqslant \frac{2}{p^2}\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|. \quad (29)$$

Действительно, после интегрирования по частям:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha(t,p)}}\int\limits_0^t \frac{\exp\left\{-\int\limits_{t_1}^t \frac{2p^2 d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)p^2}+|b|}\right\}}{\sqrt{\alpha(t_1,p)}}dt_1 =$$

$$= \frac{\alpha(t,p)+|b|}{2p^2\alpha(t,p)} - \frac{\alpha(0,p)+|b|}{2p^2\sqrt{\alpha(t,p)}\sqrt{\alpha(0,p)}}\exp\left\{-\int\limits_0^t \frac{2p^2 d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)p^2}+|b|}\right\} -$$

$$- \frac{1}{2p^2\sqrt{\alpha(t,p)}}\int\limits_0^t \frac{\alpha(t_1,p)-|b|}{\alpha^2(t_1,p)\sqrt{\alpha(t_1,p)}}a'(t_1)p^2\exp\left\{-\int\limits_{t_1}^t \frac{2p^2 d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)p^2}+|b|}\right\}dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2p^2}\left(1+\frac{|b|}{\alpha(0,p)}\right) = \frac{1}{p^2}$$

$\left(\text{так как } \left(\dfrac{\alpha(t,p)+|b|}{\sqrt{\alpha(t,p)}}\right)' = \dfrac{(\alpha(t,p)-|b|)a'(t)p^2}{\alpha^2(t,p)\sqrt{\alpha(t,p)}}\right)$ получаем (29).

Объединяя (26)–(29), завершаем доказательство, при $M_0 = 2(m_{01}+m_{02}+2)$.

Лемма 5. Пусть выполнены *Условия 1–2* и для всех $p\in N$ функция $\widetilde{f}(t,p)$ непрерывна при $t\in[0;\delta]$, тогда существует $M_1>0$ такое, что:

$$\left|T_t'(t,p)\right| \leqslant M_1\cdot\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right| \text{ для всех } t\in[0;\delta] \text{ и } p\in N.$$

Доказательство. Возможность дифференцирования в (23) не вызывает сомнения. Рассмотрим оценки отдельных, полученных при этом, слагаемых. Из (11), оценок (7) и *Леммы 1*, интегрируя по частям и вспоминая (27), получаем при $t\in[0;\delta]$ и всех $p\in N$:

$$\left|\Phi_t'(t,p)\right| \leqslant 2M_h\cdot\frac{\alpha(t,p)}{a(t)}\left(e^{-\int\limits_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,p)}{a(\tau)}d\tau}\left(-\frac{a(t_1)}{\alpha(t_1,p)}\right)\Bigg|_t^\delta - \int\limits_t^\delta e^{-\int\limits_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,p)}{a(\tau)}d\tau}\left(-\frac{a(t_1)}{\alpha(t_1,p)}\right)'dt_1\right) =$$

$$= 2M_h\frac{\alpha(t,p)}{a(t)}\left(\frac{a(t)}{\alpha(t,p)} - \frac{a(\delta)}{\alpha(\delta,p)}e^{-\int\limits_t^\delta\frac{\alpha(\tau,p)}{a(\tau)}d\tau} + \int\limits_t^\delta e^{-\int\limits_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,p)}{a(\tau)}d\tau}\frac{a'(t_1)\alpha^2(t_1,p)-2a(t_1)a'(t_1)p^2}{\alpha^3(t_1,p)}dt_1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2M_h(1+\frac{\alpha(t,p)}{a(t)}\int\limits_t^{\delta} e^{-\int\limits_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,p)}{a(\tau)}d\tau}\frac{a'(t_1)}{\alpha(t_1,p)}dt_1) \leqslant 2M(1+\frac{1}{a(t)}\int\limits_t^{\delta} a'(t_1)e^{-\int\limits_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,p)}{a(\tau)}d\tau}dt_1) \leqslant$$

$$\leqslant 2M_h(1+\frac{1}{a(t)}\int\limits_t^{\delta} a'(t_1)e^{-\int\limits_t^{t_1}\frac{|b|}{a(\tau)}d\tau}dt_1) = 2M(1+\frac{1}{a(\delta)}e^{-\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|-a'(\tau)}{a(\tau)}d\tau}\int\limits_t^{\delta} a'(t_1)e^{\int\limits_{t_1}^{\delta}\frac{|b|}{a(\tau)}d\tau}dt_1) \leqslant m_\Phi. \tag{30}$$

Аналогично: $|\Psi_t'(t,p)| \leqslant 2M\frac{\alpha(t,p)}{a(t)}(e^{-\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tau,p)}{a(\tau)}d\tau}(\frac{a(t_1)}{\alpha(t_1,p)})\Big|_0^t - \int\limits_0^t e^{-\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tau,p)}{a(\tau)}d\tau}(\frac{a(t_1)}{\alpha(t_1,p)})'dt_1) =$

$$= 2M\frac{\alpha(t,p)}{a(t)}(\frac{a(t)}{\alpha(t,p)} - \int\limits_0^t e^{-\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tau,p)}{a(\tau)}d\tau}\frac{a'(t_1)(\alpha^2(t_1,p)-2a(t_1)p^2)}{\alpha^3(t_1,p)}dt_1) \leqslant 2M. \tag{31}$$

Преобразуем: $\frac{\exp\{\int\limits_t^{\delta}\frac{b-\alpha(\tau,p)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\}}{\sqrt{\alpha(t,p)}} = \exp\{-\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|d\tau}{a(\tau)}\}A(t,p)B(t,p)$. (ср. (25)-(26))

$$(\exp\{-\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|\,d\tau}{a(\tau)}\})' = \exp\{-\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|\,d\tau}{a(\tau)}\}\frac{|b|}{a(t)} = \frac{|b|}{a(\delta)}\exp\{-\int\limits_t^{\delta}\frac{(|b|-a'(\tau))d\tau}{a(\tau)}\},$$

$$A'(t,p) = A(t,p)\frac{2p^2}{|b|+\sqrt{b^2+4a(t)p^2}} = A(t,p)\frac{\alpha(t,p)-|b|}{2a(t)},$$

$$B'(t,p) = (\alpha^{-\frac{1}{2}}(t,p))_x' = -B(t,p)\frac{a'(t)p^2}{\alpha^2(t,p)} = -B(t,p)\frac{a'(t)}{4a(t)}\frac{4a(t)p^2}{\alpha^2(t,p)}.$$

Далее: $(\frac{\exp\{\int\limits_t^{\delta}\frac{b-\alpha(\tau,p)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\}}{\sqrt{\alpha(t,p)}})' = (\exp\{-\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|d\tau}{a(\tau)}\}A(t,p)B(t,p))' =$

$$= (\exp\{-\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|\,d\tau}{a(\tau)}\})'A(t,p)B(t,p) + \exp\{-\int\limits_t^{\delta}\frac{|b|\,d\tau}{a(\tau)}\}(A'(t,p)B(t,p)+A(t,p)B'(t,p)) =$$

$$= \exp\{-\int\limits_t^{\delta}\frac{(|b|-a'(\tau))d\tau}{a(\tau)}\}A(t,p)B(t,p)\{\frac{|b|}{a(\delta)} + \frac{\alpha(t,p)-|b|}{2a(\delta)} - \frac{a'(t)}{4a(\delta)}\frac{4a(t)p^2}{\alpha^2(t,p)}\}.$$

Учитывая (26) теперь получаем: $\left|(\frac{\exp\{\int\limits_t^{\delta}\frac{b-\alpha(\tau,p)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\}}{\sqrt{\alpha(t,p)}})'C_{01}(p)\right| \leqslant$

$$\leqslant \exp\{\int\limits_t^{\delta}\frac{(a'(\tau)-|b|)d\tau}{a(\tau)}\}(\frac{2(\alpha(t,p)+|b|)+a'(t)}{2a(\delta)})\,|A(t,p)B(t,p)C_{01}(p)| \leqslant \frac{\widetilde{m}_{01}}{p}\max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|. \tag{32}$$

Необходимы также оценки $C_{02}'(t,p)$ и $C_{11}'(t,p)$. Преобразуем:

$$C_{02}'(t,p) = C_{02}(t,p)(\frac{2p^2}{\sqrt{b^2+4a(t)p^2}+|b|} + \frac{|b|}{a(t)} - \frac{a'(t)p^2}{\alpha^2(t,p)}) + \frac{\Phi(t,p)}{\alpha(t,p)}\widetilde{f}(t,p) =$$
$$= C_{02}(t,p)(\frac{\sqrt{b^2+4a(t)p^2}+|b|}{2a(t)} - \frac{a'(t)p^2}{\alpha^2(t,p)}) + \frac{\Phi(t,p)}{\alpha(t,p)}\widetilde{f}(t,p).$$

Воспользуемся оценками (27), (28) и получим, что

$$\left|C'_{02}(t,p)\right| \leqslant \frac{m_{02}\cdot a(t)}{\alpha^2(t,p)} \max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right| \left(\frac{\alpha(t,p)+|b|}{2a(t)} + \frac{a'(t)p^2}{\alpha^2(t,p)}\right) + \left|\frac{\Phi(t,p)}{\alpha(t,p)}\widetilde{f}(t,p)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{m_{02}}{\alpha(t,p)}\left(1+\frac{a'(t)}{4\alpha(t,p)}\right) + \frac{2}{\alpha(t,p)}\right) \max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right| \leqslant \frac{\widetilde{m}_{02}}{\alpha(t,p)} \max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|. \qquad (33)$$

Наконец, $C'_{11}(t,p) = \left(B(t,p)\int\limits_0^t \frac{-\Psi(t_1,p)\exp\{-\int\limits_{t_1}^{t}\frac{2p^2\,d\tau}{\sqrt{b^2+4a(\tau)p^2}+|b|}\}}{\sqrt{\alpha(t_1,p)}}\widetilde{f}(t_1,p)dt_1\right)' =$
$= p^2\left(-\frac{a'(t)}{\alpha^2(t,p)} + \frac{2}{\alpha(t,p)+|b|}\right)C_{11}(t,p) - \frac{\Psi(t,p)}{\alpha(t,p)}\widetilde{f}(t,p)$и из (29) следует

$$\left|C'_{11}(t,p)\right| \leqslant \left(\frac{2a'(t)}{\alpha^2(t,p)} + \frac{4}{\alpha(t,p)+|b|} + \frac{2}{\alpha(t,p)}\right) \max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right| \leqslant \widetilde{m}_{11} \max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|. \qquad (34)$$

Дифференцируя (23) и объединяя неравенства (30)–(34) завершаем доказательство.

Лемма 6. Если выполнены *Условия 1-2* и функция $\widetilde{f}(t,p)$ непрерывна при $t\in[0;\delta]$ для всех $p\in N$, то существует $M_2>0$ такое, что:

$$\left|(a(t)T'_t(t,p))'_t\right| \leqslant M_2\cdot\max_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right| \text{ для всех } t\in[0;\delta] \text{ и } p\in N.$$

Доказательство леммы 6 немедленно следует из равенства (22) и лемм 4 – 5.

Леммы 4-6 фактически устанавливают, что формулы (20) и (23) дают решение задачи (18)-(19). Точная формулировка условий разрешимости этой задачи определяется условиями разложимости функции $f(t,x)$ в (21), допускающими выполнения лемм 4-6 и обеспечивающими сходимость ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|$. Так как $\widetilde{f}(t,p)$ - коэффициенты Фурье, то, как известно из математического анализа, они стремятся к нулю с ростом p и при определенной гладкости функции $f(t,x)$ гарантируют сходимость ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\max\limits_{[0;\delta]}\left|\widetilde{f}(t,p)\right|$. Для этого, например, достаточно потребовать от $f(t,x)$ согласования с граничными условиями: $f(t,0)=f(t,\pi)=f(0,x)=f(\delta,x)=0$ и непрерывной дифференцируемости в рассматриваемой области $\Omega_1=[0;\delta]\times[0;\pi]$ (разложение (21) при этом предполагает нечетное продолжение $f(t,x)$ по переменной x на отрезок $[0;2\pi]$). Таким образом справедливо следующее утверждение(опустим его подробное обсуждение):

Теорема 2. Пусть выполнены *Условия 1-2* . Для любой функции $f(t,x)\in C^1(\Omega_1)$, удовлетворяющей условиям согласования $f(t,0)=f(t,\pi)=0$, $f(0,x)=f(\delta,x)=0$ существует единственное классическое решение $u(t,x)$ задачи (18)-(19), допускающее представление в виде (20), (23).

Замечание 3. 1. Формулы (20), (23) представляют решение задачи (18)-(19) как ряд Фурье с коэффициентами в виде асимптотических при $t\to 0+0$ рядов по системам функций $\{\varphi_k(t,x)\}$, $\{\psi_k(t,x)\}$ и могут быть использованы для разработки схем численного решения.

2. В представленной статье достаточно выполнения *Условия 1* на $[0;\delta]$.

3. *Условия 1-2* очевидно выполняются для функций вида $a(t)=t^m,\ m\geqslant 2$ и $a(t)=\exp\{-t^{-k}\},\ k>0$.

4. Выводы и методы второго примера могут быть применены для исследования решений общих граничных задач для уравнения (18) с общим эллиптическим оператором Au в виде рядов по его собственным функциям.

Работа выполнена в рамках проектной части Государственного задания № 9.101.2014/К на тему "Гидродинамические эффекты в напорно-сдвиговых течениях сред сложной реологии в каналах переменной геометрии".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушко, В. П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи / В. П. Глушко, Ю. Б. Савченко // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анал. — 1985. — Т. 23. — С. 125–218.

2. Глушко, В. П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В. П. Глушко // Труды Московского математического общества. — 1970. — Т. 23. — С. 113–178.

3. Архипов, В. П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной / В. П. Архипов // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 10. — С. 1383–1393.

4. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

5. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

6. Баев, А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

7. Баев, А. Д. Теоремы о “следах” для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 63–75.

REFERENCES

1. Glushko V.P., Savchenko Yu.B. Higher-order degenerate elliptic equations: spaces, operators, boundary-value problems. [Glushko V.P., Savchenko Yu.B. Vyrozhdayushhiesya e'llipticheskie uravneniya vysokogo poryadka: prostranstva, operatory, granichnye zadachi]. *Itogi nauki i texniki. Seriya: Matematicheskij analiz — The results of science and technology. Series: Mathematical analysis*, 1985, vol. 23, pp. 125–218.

2. Glushko V.P. Estimates and solvability of general boundary value problems for degenerate elliptic equations of second order. [Glushko V.P. Ocenki v $L2$ i razreshimost' obshhix granichnyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya e'llipticheskix uravnenij vtorogo poryadka]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshhestva — Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 1970, vol. 23, pp. 113–178.

3. Arkhipov V.P. Linear Second-Order Differential Equations with Degenerating Coeffcient of the Second Derivative. [Arxipov V.P. Linejnye differencial'nye uravneniya vtorogo poryadka s vyrozhdayushhimsya koe'fficientom pri starshej proizvodnoj]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 10, pp. 1383–1393.

4. Baev A. D., Kobylinskii P. A., Davidova M. B. On the Properties of Switching a Class of Degenerate Pseudo-Differential Operators with the Operators Of Differentiation. [Baev A. D., Kobylinskij P. A., Davydova M. B. O svojstvax kommutacii odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov s operatorami differencirovaniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 102–108.

5. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo*

universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2014, no. 2, pp. 66–73.

6. Baev A. D., Kovalevsky R. A. Theorems on boundedness and composition for a class of weighted pseudodifferential operators. [Baev A. D., Kovalevskij R. A. Teoremy ob ogranichennosti i kompozicii dlya odnogo klassa vesovyx psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 39–49.

7. Baev A. D., Kovalevsky R. A., Davidova M. B.. [Theorems about the «trecas» for a class of pseudodifferential operators with degeneracy]. *Baev A. D., Kovalevskij R. A., Davydova M. B. Teoremy o "sledax" dlya odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem — Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2015, no. 2, pp. 63–75

Архипов Виктор Петрович, к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВПО "Госуниверситет — УНПК", Орёл, Российская Федерация
E-mail: varhipov@inbox.ru

Arkhipov Viktor P., Candidate of science, docent, Senior Scientific Researcher, State University ESPC, Oryel , Russian Federation
E-mail: varhipov@inbox.ru