УДК 621.391

АППРОКСИМАЦИЯ ФИНИТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РЯДАМИ ЯКОБИ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ В ВИДЕ БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ю. С. Радченко, В. А. Игнатов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.01.2016 г.

Аннотация. В работе для задач статистической радиотехники, получены аппроксимации финитных распределений в виде рядов по полиномам Якоби с весовой функцией, представляющей обобщенное бета-распределение. Найдены уравнения для расчета параметров полиномов Якоби и предложена методика их решения. Приведен пример аппроксимации финитного распределения. Произведено сравнение точности аппроксимации плотности вероятности первыми членами ортогонального ряда Якоби по евклидовой метрике и критерию омега-квадрат. Показано, что учет полиномов Якоби третьего и четвертого порядка достаточен для достаточно хорошей аппроксимации финитных распределений.

Ключевые слова: Статистическая обработка данных, финитные распределения, полиномы Якоби, гамма-функция, бета-распределение, аппроксимация, критерий омега-квадрат.

APPROXIMATION OF FINITE DISTRIBUTIONS BY MEANS OF JACOBI SERIES WITH THE WEIGHT FUNCTION IN THE FORM OF BETA-DISTRIBUTION

Yu. S. Radchenko, V. A. Ignatov

Abstract. In this paper for the purposes of statistical radio engineering we obtained approximations of the finite distributions in the form of series in Jacobi polynomials based on the beta distribution, examples of such approximations. The authors found equation for the calculation of the parameters of the Jacobi polynomials and the technique of their solution. A comparison of the accuracy of approximation of the probability density (Euclidean distance and omega-square) have been calculated. It is shown that the Jacobi polynomials of third and fourth order is sufficient for a good enough approximation of finite distributions.

Keywords: Statistical data processing, the Jacobi polynomials, finite distribution, gamma function, beta distribution, approximation, omega-square criterion.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач статистической обработки данных является аппроксимация выборочных законов распределения некоторой аналитической моделью [1], [2]. Среди различных методик подгонки распределений широко применяется представление распределений в виде рядов по ортогональным функциям [1]–[4]. Для непрерывных законов распределения наиболее распространены разложения в ряды Грамма – Шмидта (Эджворта), Лагерра, аргумент которых определен на бесконечном или полубесконечном интервале [1]–[3]. Однако для ряда обрабатываемых данных областью определения является конечный интервал [1], [7], [8]. В таком случае указанные выше аппроксимации непригодны. Достаточно универсальным вероятностным законом, определенным на конечном интервале, является обобщенное бета-распределение [4]. С другой стороны система ортогональных полиномов Якоби является достаточно универсальным классом финитных базисных функций. Таким образом, для распределений с компактным носителем целесообразно использовать ряды Якоби с весовой функцией в виде обобщенного бета-распределения.

В данной работе получены аппроксимации распределений в виде рядов по полиномам Якоби, приведен пример подобной аппроксимации, количественно оценена погрешность аппроксимации первыми членами ряда Якоби.

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Стандартное бета распределение имеет вид [4]

$$f_{\mathrm{B}}(x) = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} x^{u-1}(1-x)^{v-1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u,v > 0. \tag{1}$$

Масштабирование аргумента $x = (1+z)/2$, где $z \in [-1,1]$, приводит к обобщенному бета распределению

$$W_0(z) = \frac{1}{2} f_{\mathrm{B}}\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} 2^{-(u+v-1)}(1-z)^{v-1}(1+z)^{u-1}. \tag{2}$$

Такой переход целесообразен, поскольку полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ также определены на интервале $z \in [-1,1]$. Полиномы Якоби образуют ортогональную систему функций с весом $\rho(z) = (1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$

$$\int\limits_{-1}^{1} \rho(z) P_n^{(\alpha,\beta)}(z) P_m^{(\alpha,\beta)}(z)\, dz = d_n^2 \delta_{nm}, \tag{3}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера, d_n^2 — норма полинома

$$d_n^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \tag{4}$$

Расчет полиномов $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ можно производить, используя их рекурсивную связь [5]

$$2(n+1)(n+1+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)} - (2n+1+\alpha+\beta)[(2n+\alpha+\beta)(2n+2+\alpha+\beta)z + \alpha^2 - \beta^2]P_n^{(\alpha,\beta)}(z) +$$
$$+ 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+2+\alpha+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z) = 0. \tag{5}$$

Явный вид полиномов Якоби порядков $n = 0,1,2,3$, необходимый для дальнейших расчетов, таков:

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(z) = 1, \tag{6}$$

$$P_1^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{2}[\alpha - \beta + z(\alpha+\beta+2)],$$

$$P_2^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{z^2}{8}(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4) + \frac{z}{4}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+3) + \frac{1}{8}[(\alpha-\beta)^2 - (\alpha+\beta+4)],$$

$$P_3^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{6}(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha) + \frac{1}{4}(z-1)(2+\alpha)(3+\alpha)(4+\alpha+\beta) +$$

$$+\frac{1}{8}(z-1)^2(3+\alpha)(4+\alpha+\beta)(5+\alpha+\beta)+\frac{1}{48}(z-1)^3(4+\alpha+\beta)(5+\alpha+\beta)(6+\alpha+\beta).$$

Полиномы более высоких порядков можно рассчитать по формуле

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!2^n}\sum_{m=0}^{n}\frac{C_n^m(z-1)^{n-m}(1+z)^m}{\Gamma(\alpha+n-m+1)\Gamma(\beta+k+1},$$

или с помощью рекуррентной формулы (5).

С учетом ортогональности полиномов Якоби можно записать разложение некоторой функции $f(z)$ в виде

$$f(z)=\rho(z)\sum_{n=0}^{\infty}h_nP_n^{(\alpha,\beta)}(z),\qquad h_n=\frac{1}{d_n^2}\int\limits_{-1}^{1}f(z)P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\,dz. \tag{7}$$

РАСЧЕТ АППРОКСИМИРУЮЩЕГО РЯДА

Соотношениям (7) можно придать более удобный для вероятностных расчетов вид. Пусть $W(z)$ аппроксимируемое распределение, $W_0(z)$ определяется формулой (2). Тогда, учитывая что $W_0(z)=C\rho(z)$, где $\alpha=v-1$, $\beta=u-1$ и $C=\dfrac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)}2^{-(u+v-1)}$, можно записать

$$W(z)=W_0(z)\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n^{(v-1,u-1)}(z), \tag{8}$$

$$c_n=\frac{1}{D_n}\int\limits_{-1}^{1}W(z)P_n^{(v-1,u-1)}(z)\,dz, \tag{9}$$

где

$$D_nCd_n^2=\frac{(u+v+n-1)}{n!(u+v+2n-1)}\cdot\frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u+v+n)}. \tag{10}$$

Учитывая свойство гамма-функции $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, получаем

$$\begin{gathered}D_0=1,\qquad D_1=\frac{uv}{u+v+1},\qquad D_2=\frac{u(u+1)v(v+1)}{2(u+v)(u+v+3)},\\ D_3=\frac{1}{6}\cdot\frac{u(u+1)(u+2)v(v+1)(v+2)}{(u+v)(u+v+1)(u+v+5)},D_4=\frac{1}{4!}\frac{\prod\limits_{i=0}^{3}(u+i)(v+i)}{u+v+7)\prod\limits_{i=0}^{2}(u+v+i)}.\end{gathered} \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9) получаем коэффициенты ряда

$$\begin{aligned}&c_0=1,\\ &c_1=\frac{(u+v+1)}{2uv}[(v-u)+M_1(v+u)],\\ &c_2=\frac{2(u+v)(u+v+3)}{v(v+1)u(u+1)}\left\{\frac{M_2}{8}(u+v+1)(u+v+2)+\right.\\ &\qquad\left.\frac{M_1}{4}(v-u)(u+v+1)+\frac{1}{8}[(v-u)^2-(u+v+2)]\right\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $M_k = \int\limits_{-1}^{1} z^k W(z)\,dz$ — k-й начальный момент распределения $W(z)$. Для определения параметров распределения (u,v) и коэффициентов разложения c_n положим $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, аналогично [2], [3]. Таким образом, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} &tM_1 + p = 0, \\ &M_2(t+1)(t+2) + 2M_1 p(t+1) + p^2 - (t+2) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь обозначены $u + v = t$, $v - u = p$. Решая совместно эти уравнения, получаем

$$\begin{aligned} &t = -\left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right) = -\left(1 + \frac{M_1^2 - 1}{\sigma^2}\right), \\ &p = M_1\left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

В (14) введены обозначения $\mu = {}^{\sigma^2}/_{M_1^2}$, $\gamma = (M_1^2 - 1)/M_1^2$, $\sigma^2 = M_2 - M_1$ — дисперсия распределения $W(z)$. Получение решений (14) дано в приложении. Следовательно,

$$\begin{aligned} &v = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right)(M_1 - 1), \\ &u = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right)(M_1 + 1). \end{aligned} \tag{15}$$

Особый случай представляет собой $M_1 = 0$ для симметричного на интервале $z \in [-1,1]$ распределения $W(z)$. Из (13) следует, что $p = v - u = 0$, то есть $u = v$, где $u = \dfrac{1 - M_2}{2M_2}$.

Необходимо отметить, что $0 \leqslant M_1 < 1$. Только в вырожденном случае при $W(z) \to 0.5[\delta(z+1) + \delta(z-1)]$ величина $M_2 \to 1$. Аналогичный анализ показывает, что $|M_1| < 1$.

Пример. Получим аппроксимацию финитного распределения

$$W(z) = p_0 f[g(z)], \quad -1 \leqslant z \leqslant 1, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} &f(x) = ax + (1-a)x^3, \quad a = 0.2, \\ &g(z) = 0.75(1-z)(1+z)^2, \quad p_0 = 1.63551. \end{aligned} \tag{17}$$

Расчеты показывают, что $M_1 = 0.249$, $\sigma^2 = 0.105$, соответственно $v = 2.966 \approx 3$, $u = 4.933 \approx 5$. На рис. 1 приведены для сравнения графики $W(z)$ и $W_0(z)$ — обобщенной бета-функции — ядра аппроксимации. На рис. 2 и рис. 3 приведены графики $W(z)$ и аппроксимаций $W_0(z)\left[1 + c_3 P_3^{(v-1,u-1)}(z)\right]$ и $W_0(z)\left[1 + c_3 P_3^{(v-1,u-1)}(z) + c_4 P_4^{(v-1,u-1)}(z)\right]$, где c_3, c_4 вычислялись по формуле (9): $c_3 = -0{,}046$, $c_4 = -0{,}05$. Как видно из сравнения рисунков, аппроксимация с учетом слагаемого $W_0(z)\left[c_3 P_3^{(v-1,u-1)}(z)\right]$ весьма близка к исходному распределению, а добавление слагаемого $W_0(z)\left[c_4 P_4^{(v-1,u-1)}(z)\right]$ дает практически точное соответствие анализируемому распределению.

Евклидовы нормы ошибок аппроксимации с учетом трех и четырех полиномов Якоби

$$L_2(n) = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (W(z) - W_n(z,v,u))^2\,dz}\,, \quad n = 3,4.$$

Имеют величины $L_2(3) = 0{,}034$, $L_2(4) = 0{,}019$. Заметим, что аппроксимация только обобщенным бета-распределением дает норму $L_2(0) = 0{,}047$. Соотношение метрик равно $L_2(0)/L_2(3) = 1{,}4$, $L_2(0)/L_2(4) = 2{,}5$, $L_2(3)/L_2(4) = 1{,}8$.

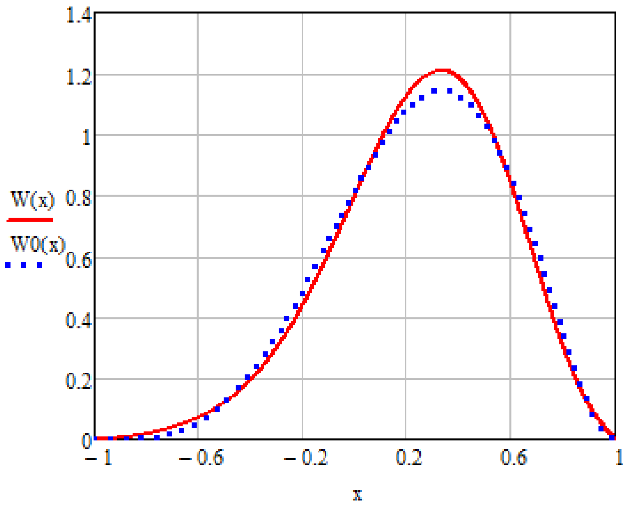

Рис. 1.

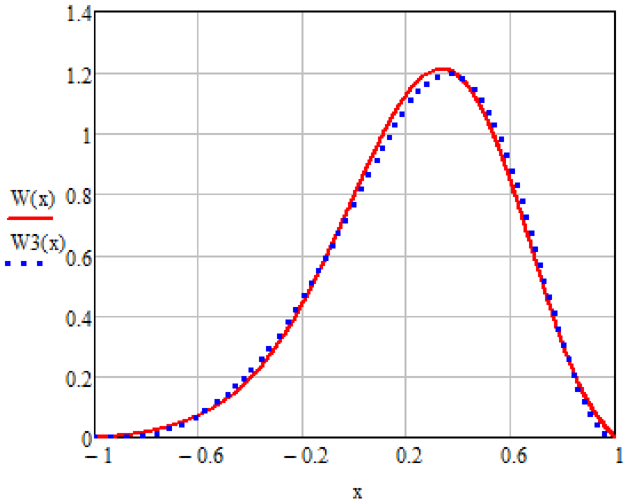

Рис. 2.

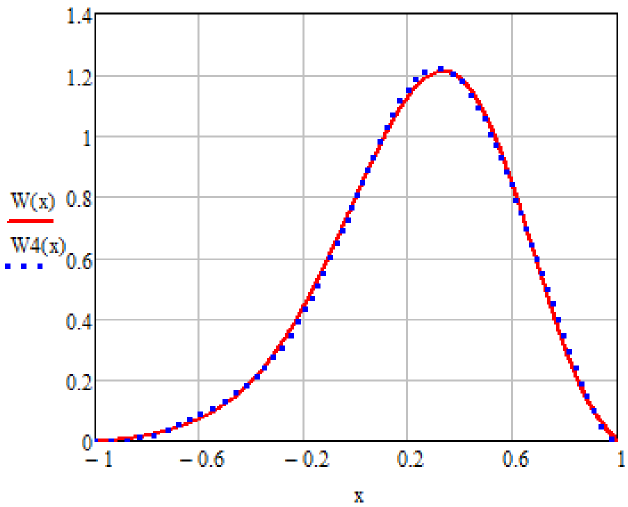

Рис. 3.

Количественное сравнение точности аппроксимации плотности вероятности можно выполнить также с помощью критерия омега-квадрат

$$\omega^2(n) = \int\limits_{-1}^{1} [F(z) - F(z,n)]^2 W(z)\, dz, \tag{18}$$

где $F(z) = \int\limits_{-1}^{z} W(y)\, dy$, $F(z,n) = \int\limits_{-1}^{z} W_n(y,u,v)\, dy$.

Расчеты для приведенного выше примера показывают, что $\sqrt{\omega^2(0)} = 7{,}26 \cdot 10^{-3}$, $\sqrt{\omega^2(3)} = 4{,}65 \cdot 10^{-3}$, $\sqrt{\omega^2(4)} = 1.83 \cdot 10^{-3}$. Изменения метрик при увеличении числа членов ряда $\sqrt{\omega^2(0)/\omega^2(3)} = 1{,}56$, $\sqrt{\omega^2(0)/\omega^2(4)} = 4$, $\sqrt{\omega^2(3)/\omega^2(4)} = 2{,}54$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена аппроксимация финитных распределений в виде рядов по полиномам Якоби с весовой функцией в виде обобщенного бета-распределения. Получены аналитические выражения для коэффициентов разложения ряда. На их основе найдены расчетные соотношения для параметров (u,v) полиномов Якоби $P_n^{(v-1,u-1)}$.

На конкретном примере исследовано поведение ошибки аппроксимации по Евклидовой метрике и критерию омега-квадрат. Показано, что учет членов ряда с $P_3^{(v-1,u-1)}$ и $P_4^{(v-1,u-1)}$ достаточен для аппроксимации финитных распределений.

Данная работа дополняет решение задачи аппроксимации распределений ортогональными многочленами на бесконечном (Грамма–Шмидта–Эджворта) и полубесконечном (разложение Лагерра) для случая конечного носителя плотности вероятности.

Приложение 1. Решение системы уравнений $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ (13).

Из первого уравнения системы (13) следует $p = -tM_1$. Подставляем это значение во второе уравнение (13) и получаем

$$M_2(t+1)(t+2) - 2M_1^2 t(t+1) + M_1^2 t - (t+2) = 0.$$

Вводим вспомогательные константы

$$\mu = \frac{M_2 - M_1^2}{M_1^2} = \frac{\sigma^2}{M_1^2}, \quad \gamma = 1 - \frac{1}{M_1^2}.$$

Раскрывая выражения в квадратном уравнении, получаем его в виде

$$\mu t^2 + (3\mu + \gamma)t + 2(\mu + \gamma) = 0.$$

Дискриминант уравнения равен

$$(3\mu + \gamma)^2 - 8\mu(\mu + \gamma) = (\mu - \gamma)^2.$$

Тогда получаются два корня квадратного уравнения

$$t_{1,2} = \frac{-(3\mu + \gamma) \pm (\mu - \gamma)}{2\mu}.$$

Первый корень (знак +) равен

$$t = -\left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right) = -\left(1 + \frac{M_1^2 - 1}{\sigma^2}\right).$$

Второй корень (знак $-$), равный $t = u + v = -2$, не имеет смысла. Из первого значения t получаем

$$p = -tM_1 = M_1\left(11 + \frac{\gamma}{\mu}\right) = M_1\left(1 + \frac{M_1^2 - 1}{\sigma^2}\right).$$

Из выражений для t, p получаем выражения для (u,v). При анализе выражений необходимо учесть, что $|M_1| < 1$, $\sigma^2 < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликов, Е. И. Прикладной статистический анализ. Учебное пособие для вузов / Е. И. Куликов. — М.: Горячая линия–Телеком, 2008. — 464 с.

2. Левин, Б. Р. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления / Б. Р. Левин, В. Шварц. — М.: Радио и связь, 1985. — 312 с.

3. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.

4. Вадзинский, Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р. Н. Вадзинский. — СПб.: Наука, 2001. — 295 с.

5. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука. Гл. ред. Физ. мат. лит, 1979. — 832 с.

6. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 480 с.

7. Радченко, Ю. С. Статистика структурных изменений изображений на основе спектрального и корреляционного анализа полей / Ю. С. Радченко, В. А. Игнатов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 29–41.

8. Image Quality Assessment: Form Error Visibility to Structural Similarity / Z. Wang, A. Bovik, H. Sheikh, E. Simoncelli // IEEE Transaction on Image Processing. — 2004. — V. 13, № 4. — P. 600–612.

9. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 816 с.

10. Прохоров, С. А. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум / С. А. Прохоров, И. М. Куликовских. — Самара: Самарский научн. центр РАН, 2008. — 300 с.

11. Прикладной анализ случайных процессов / Под ред. С. А. Прохорова. — Самара: Самарский научн. центр РАН, 2007. — 582 с.

REFERENCES

1. Kulikov E. I., Applied statistical analysis. Textbook for high schools. [Kulikov, E. I. Prikladnoj statisticheskij analiz. Uchebnoe posobie dlya vuzov]. Moscow: Hotline – Telecom, 2008, 464 p.

2. Levin, B. R., Schwartz V. Probabilistic models and methods in communication and control systems. [Levin B. R., Shvarc V. Veroyatnostnye modeli i metody v sistemax svyazi i upravleniya]. Moscow: Radio and communication, 1985, 312 p.

3. Tikhonov V. I. Statistical radio engineering. [Tixonov V. I. Statisticheskaya radiotexnika]. Moscow: Radio and communication, 1982, 624 p.

4. Wadzinski R. N. The reference probability distributions. [Vadzinskij R. N. Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam]. SPb.: Science, 2001, 295 p.

5. Handbook of special functions. edited by M. I. Abramovici and I. Stigan. [Spravochnik po special'nym funkciyam. Pod red. M. Abramovica i I. Stigan]. Moscow: Nauka, 1979, 832 p.

6. Suetin P. K., Classical orthogonal polynomials. [Suetin P. K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny]. Moscow: FIZMATLIT, 2005, 480 p.

7. Radchenko Yu. S., Ignatov V. A. Statistics of structural changes images based on the spectral and correlation analysis of fields. [Radchenko Yu. S., Ignatov V. A. Statistika strukturnyx izmenenij izobrazhenij na osnove spektral'nogo i korrelyacionnogo analiza polej]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 29–41.

8. Wang Z., Bovik A., Sheikh H., Simoncelli E. Image Quality Assessment: Form Error Visibility to Structural Similarity, IEEE Transaction on Image Processing, 2004, vol. 13, no. 4, pp. 600–612.

9. Kobzar A. I. Applied mathematical statistics. For engineers and researchers. [Kobzar' A. I. Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnyx rabotnikov]. Moscow: FIZMATLIT, 2006, 816 p.

10. Prokhorov S. A., Kulikovskikh I. M. Orthogonal model correlation and spectral characteristics of random processes. Laboratory workshop. [Proxorov S. A., Kulikovskix I. M. Ortogonal'nye modeli korrelyacionno-spektral'nyx xarakteristik sluchajnyx processov. Laboratornyj praktikum]. Samara: Samara scientific. center of RAS, 2008, 300 p.

11. Applied analysis of random processes. Under the editorship of S. A. Prokhorov. [Prikladnoj analiz sluchajnyx processov. Pod red. S. A. Proxorova]. Samara: Samara scientific. center of RAS, 2007, 572 p.

Радченко Юрий Степанович, д.ф.м.н., профессор кафедры радиофизики Воронежского госуниверситета, Воронеж, Россия
E-mail: ysradchenko@yandex.ru
Тел.: (473)220–89–16

Radchenko Y.S., doctor of science (Phys.-Math.), professor of radio physics department, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: ysradchenko@yandex.ru
Tel.: (473)220–89–16

Игнатов Вадим Александрович, аспирант 2 года обучения кафедры радиофизики Воронежского госуниверситета, Воронеж, Россия
E-mail: ignat26i@mail.ru
Тел.: (473)220–89–16

Ignatov V.A., postgraduated student, department of radio physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: ignat26i@mail.ru
Tel.: (473)220–89–16