УДК 517.55+519.688

СИСТЕМЫ КВАДРАТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ЗАДАЧЕЙ ОБ АФФИННОЙ ОДНОРОДНОСТИ

А. В. Шиповская

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 27.12.2014 г.

Аннотация. В исследованиях [1]–[5] разработана схема описания аффинно однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства и описаны два класса таких многообразий. Важной особенностью этой схемы является явное решение систем полиномиальных уравнений, описывающих алгебры Ли однородных поверхностей.

В настоящей статье рассмотрена система квадратичных уравнений, связанная с ещё одним классом однородных поверхностей. Однородным многообразиям из этого класса отвечают алгебры Ли,описываемые именно системой уравнений, изучаемой в статье. Статья в целом представляет собой подробное изложение одной из частей краткого сообщения [15], в котором на основе излагаемых ниже результатов приводится полное описание аффинно-однородных поверхностей $(\varepsilon, 0)$-типов в $\mathbb{C}^3$.

Ключевые слова: комплексное пространство, аффинное преобразование, однородное многообразие, векторное поле, алгебра Ли, каноническое уравнение.

SYSTEMS OF QUADRATIC EQUATIONS CONNECTED WITH THE AFFINE HOMOGENEITY PROBLEM

A. V. Shipovskaya

Abstract. In papers [1]-[5] the scheme had been developed of describing of the affine homogeneous real hypersurfaces of 3-dimensional complex space and two classes of such manifolds were described.

An important characteristic of this scheme is an explicit solution of a system of polynomial equations that describe the Lie algebras of homogeneous surfaces.

In this paper we construct and solve the system of quadratic equations associated with one more class of homogeneous surfaces, videlicet with $(\varepsilon, 0)$ class. The consequence of this solution is description of Lie algebras, corresponding to a homogeneous surfaces of the class under consideration. The article is a detailed exposition of one of the parts of the short message [15] – on complete list of affine-homogeneous surfaces $(\varepsilon, 0)$-type in $\mathbb{C}^3$, which is based on the results bellow.

Keywords: complex space, affine transformation, homogeneous manifold, vector field, Lie algebra, canonical equation.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье построена и изучена система квадратичных уравнений, связанная с одним классом аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$.

Известное в геометрии понятие однородности многообразия связывается обычно с транзитивным действием на нем (см., например [14, с. 53]) некоторой группы Ли и, следовательно, с соответствующей алгеброй Ли. В изучаемом в статье случае аффинной однородности в $\mathbb{C}^3$ эти алгебры можно считать матричными (см. [3]); элементами таких алгебр являются комплекснозначные (4×4)-матрицы вида

$$Z = \begin{pmatrix} A1 & A2 & A3 & p_1 \\ B1 & B2 & B3 & p_2 \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Любая такая матрица – это упрощенная запись аффинного векторного поля

$$Z = (A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 w + p_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 w + p_2)\frac{\partial}{\partial z_2} + \qquad (2)$$

$$+(a z_1 + b z_2 + c w + q)\frac{\partial}{\partial w}$$

в пространстве $\mathbb{C}^3$ (см.[5],[7]). Уточним, что координаты в $\mathbb{C}^3$ обозначаются здесь и далее через z_1, z_2, w; через u и v обозначим, соответственно, вещественную и мнимую части комплексной переменной w.

Факт касания аналитической гиперповерхности $M = \{\Phi(z, \bar{z}, u, v) = 0\}$ таким полем можно записать в виде

$$Re\{Z(\Phi)|_M\} \equiv 0. \qquad (3)$$

Утверждение же об аффинной однородности M (вблизи начала координат) означает (см., например, [1]), что совокупность сдвиговых векторов (p_1, p_2, q), отвечающих касательным полям вида (2), накрывает касательную плоскость к M в любой (близкой к началу координат) точке поверхности.

Левая часть тождества (3) является аналитической функцией от пяти вещественных координат, имеющихся на поверхности M. Приравнивая к нулю отдельные тейлоровские коэффициенты этой функции, можно рассматривать тождество (3) как бесконечную совокупность уравнений. Младшие уравнения из этой совокупности устроены достаточно просто. По аналогии с [2] из них извлекается полезная конструктивная информация о тейлоровских коэффициентах уравнений изучаемых однородных (аналитических) поверхностей и о полях на таких поверхностях.

Это удобно делать с использованием понятия *веса монома* от переменных $z, \bar{z}, u$. Будем считать, что переменные z_1, z_2, $\bar{z_1}$, $\bar{z_2}$ имеют вес 1, а переменной u припишем вес 2. Веса отдельных мономов, построенных из переменных z_1, z_2, $\bar{z_1}$, $\bar{z_2}$, u, будем определять по естественному принципу сложения весов. Например, вес монома $z_1 u$ равен 3.

Для нас наиболее важным является общий вид вещественного многочлена от переменных $z, \bar{z}$, имеющего вес 3 (и, следовательно, степень 3):

$$F_3(z, \bar{z}) = (f_{30} z_1^3 + f_{21} z_1^2 z_2 + f_{12} z_1 z_2^2 + f_{03} z_2^3) + (g_{20} z_1^2 + g_{11} z_1 z_2 + g_{02} z_2^2)\overline{z_1} +$$

$$+(h_{20} z_1^2 + h_{11} z_1 z_2 + h_{02 z_2^2})\overline{z_2} + (C.C.), \qquad (4)$$

где $(C.C.)$ – комплексно-сопряженное выражение ко всей группе явно указанных в формуле слагаемых.

Везде в статье будем называть *каноническим уравнением* вещественно-аналитической гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ уравнение вида

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \varepsilon_1(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + \varepsilon_2(z_2^2 + \bar{z}_2^2) + \sum_{k+l+2m \geqslant 3} F_{k\bar{l}m}(z, \bar{z}) u^m. \qquad (5)$$

Здесь $F_{k\bar{l}m}$ – многочлен степени k по переменной z, степени l – по $\bar{z}$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – вещественные неотрицательные числа. Согласно [3], к такому виду можно (локально) привести аффинным преобразованием уравнение произвольной строго псевдо-выпуклой (СПВ) вещественно-аналитической гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$.

Из рассмотрения младших весовых компонент основного соотношения (3) для поверхности, заданной каноническим уравнением (5), видно (см., например, [4]), что:

а) параметр q поля (2), касательного к такой поверхности, является вещественным;

б) параметры a, b касательного поля Z выражаются через коэффициенты канонического уравнения и набор $p = (p_1, p_2)$, по формулам

$$a = 2i(\bar{p}_1 + 2\varepsilon p_1), \ b = 2i(\bar{p}_2 + 2\varepsilon p_2), \tag{6}$$

в) мнимая часть параметра c матрицы (1) пропорциональна параметру q из этой же матрицы.

В зависимости от пары коэффициентов $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ из уравнения (5) интерес представляют (см. [5]) несколько разных типов поверхностей. Однородные поверхности двух типов уже изучены (см. [4],[6]); ниже рассматривается тип $(\varepsilon, 0), 0 < \varepsilon \neq 1/2$. Главным результатом статьи является дополняющее результат работы [3] описание 5-мерных матричных алгебр Ли, отвечающих однородным поверхностям типа $(\varepsilon, 0)$. При этом важную роль в обсуждениях играет многочлен (4) из канонических уравнений соответствующих поверхностей.

Мы следуем при решении нашей задачи схеме, предложенной в [4]. Один из основных моментов этой схемы – выяснение вопроса о возможных размерностях групп (и алгебр) Ли, связанных с обсуждаемыми однородными многообразиями. Для алгебры Ли, состоящей из матриц вида (1), ее размерность – это число вещественных параметров - элементов таких матриц, остающихся свободными при выполнении основного тождества (3) и требования 5-мерности пространства параметров (p_1, p_2, q).

Можно показать, что по аналогии с одним из результатов [5], для размерности алгебры $g(M)$, отвечающей аффинно-однородной поверхности M типа $(\varepsilon, 0)$, справедлива оценка (см. [1])

$$5 \leqslant \dim_{\mathbb{R}} g(M) \leqslant 7. \tag{7}$$

Несложно показать также, что для каждого $\varepsilon : 0 < \varepsilon \neq 1/2$ существует лишь единственная (с точностью до аффинных преобразований) аффинно-однородная поверхность типа $(\varepsilon, 0)$ с 7-мерной алгеброй $g(M)$. Эта поверхность – квадрика

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \varepsilon(z_2^2 + \bar{z}_2^2). \tag{8}$$

Несколько более сложным (см., например, [4]) является случай 6-мерных алгебр, но наибольшую трудность в пространстве $\mathbb{C}^3$ обычно представляет случай однородных вещественных гиперповерхностей с 5-мерными алгебрами. Именно этот случай обсуждается ниже.

1. ПОСТРОЕНИЕ "ОПОРНОЙ" СИСТЕМЫ КВАДРАТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим 5-мерную матричную алгебру Ли, отвечающую аффинно-однородной поверхности типа $(\varepsilon, 0)$. Для четвертых столбцов матриц, входящих в такую алгебру, выполнено условие 5-мерности вещественной линейной оболочки. Это позволяет выбрать в качестве базиса алгебры пять матриц с "простейшими" наборами параметров (p_1, p_2, q), т.е.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом упомянутых следствий основного соотношения (3) базис обсуждаемой алгебры имеет вид ($m_1, ..., m_4 \in \mathbb{R}$):

$$E_1 = \begin{pmatrix} A1_1 & A2_1 & A3_1 & 1 \\ B1_1 & B2_1 & B3_1 & 0 \\ 2\,i\,(1+2\,\varepsilon) & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} A1_2 & A2_2 & A3_2 & i \\ B1_2 & B2_2 & B3_2 & 0 \\ 2-4\,\varepsilon & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} A1_3 & A2_3 & A3_3 & 0 \\ B1_3 & B2_3 & B3_3 & 1 \\ 0 & 2\,i & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} A1_4 & A2_4 & A3_4 & 0 \\ B1_4 & B2_4 & B3_4 & i \\ 0 & 2 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} A1_5 & A2_5 & A3_5 & 0 \\ B1_5 & B2_5 & B3_5 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения отдельной алгебры достаточно подобрать элементы пяти базисных матриц таким образом, чтобы коммутатор (скобка)

$$[E_k, E_l] = E_k \cdot E_l - E_l \cdot E_k \tag{10}$$

любых двух таких матриц разлагался по исходному базису, т.е

$$[E_k, E_l] = r_1 E_1 + r_2 E_2 + r_3 E_3 + r_4 E_4 + r_5 E_5$$

при некоторых вещественных $r_1, ..., r_5$.

Всего имеется $C_5^2 = 10$ таких скобок. При переходе от матричных уравнений к скалярным образуется, вообще говоря, $16 \cdot 10 = 160$ уравнений относительно элементов базисных матриц. Эти элементы являются комплексными числами и входят в уравнения квадратичным образом.

Такая система квадратичных уравнений очень сложна для изучения. Однако, количество уравнений в этой системе можно существенно снизить.

Во-первых, за счет четвертой строки, которая является нулевой, как в исходных матрицах, так и в скобках любых двух базисных матриц, $4 \cdot 10 = 40$ из 160 уравнений выполняются автоматически.

Во-вторых, за счет простого вида последних столбцов базисных матриц можно существенно снизить как количество уравнений, так и число неизвестных величин в обсуждаемой системе. Именно вид 4-ого столбца любой матрицы из обсуждаемой алгебры позволяет легко определить коэффициенты разложения этой матрицы по базису. Для произвольной матрицы M, принадлежащей линейной оболочке матриц $E_1 - E_5$, эти коэффициенты равны:

$$r_1 = Re(M_{14}),\ r_2 = Im(M_{14}),\ r_3 = Re(M_{24}),\ r_4 = Im(M_{24}),\ r_5 = M_{34}. \tag{11}$$

Выпишем последние столбцы некоторых скобок $[E_k, E_l]$, обозначая для краткости любую из таких скобок через D_{kl}:

$$D_{12} : \begin{pmatrix} iA1_1 - A1_2 \\ iB1_1 - B1_2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_{13} : \begin{pmatrix} A2_1 - A1_3 \\ B2_1 - B1_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_{14} : \begin{pmatrix} iA2_1 - A1_4 \\ iB2_1 - B1_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$D_{23}:\begin{pmatrix} -iA1_3+A2_2\\ -iB1_3+B2_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad D_{24}:\begin{pmatrix} -iA1_4+iA2_2\\ -iB1_4+iB2_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad D_{34}:\begin{pmatrix} iA2_3-A2_4\\ iB2_3-B2_4\\ -4\\ 0\end{pmatrix}.$$

Используя полученные формулы (12), можно перейти от рассмотрения скобок D_{kl} к их *исправленным* вариантам. Подставляя для этого в формулы (11) в качестве матрицы M скобки D_{kl}, вычислим для каждой из таких скобок набор коэффициентов $r_1,...,r_5$. Исправленной скобкой R_{kl} будем называть сумму матриц

$$R_{kl}=D_{kl}-(r_1E_1+r_2E_2+r_3E_3+r_4E_4+r_5E_5)$$

именно с такими коэффициентами.

Ясно, что четвертый столбец каждой из 10 обсуждаемых исправленных скобок – нулевой, а потому любая исправленная скобка R_{kl} должна быть нулевой матрицей.

Обращение в нуль такой матрицы равносильно обращению в нуль девяти ее элементов, расположенных в левом верхнем 3×3-блоке. Так наша система сокращается до $90=9\cdot 10$ уравнений, образующих совокупность необходимых и достаточных условий для того, чтобы набор матриц (9) был базисом некоторой алгебры Ли.

Следующим шагом схемы, предложенной в [4], является выделение из такой большой системы более простых замкнутых подсистем и их последовательное изучение. Основной интерес при этом связан с матрицами E_1-E_4, так как E_5 легко выражается, например, из скобки D_{12}:

$$E_5=\frac{1}{4}((r_1E_1+r_2E_2+r_3E_3+r_4E_4)-D_{12}).$$

Эта формула позволяет уменьшить количество неизвестных в изучаемой системе уравнений. Она поясняет также особую роль шести скобок

$$D_{12},D_{13},D_{14},D_{23},D_{24},D_{34}\tag{13}$$

в формулах (12) и в дальнейших рассмотрениях.

Для удобства таких рассмотрений выделим вещественные и мнимые части элементов левых верхних 2×2-блоков матриц E_1-E_4 и запишем эти блоки в виде

$$e_1=\begin{pmatrix} t_1+it_2 & t_3+it_4\\ t_5+it_6 & t_7+it_8\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix} t_9+it_{10} & t_{11}+it_{12}\\ t_{13}+it_{14} & t_{15}+it_{16}\end{pmatrix},$$

$$e_3=\begin{pmatrix} t_{17}+it_{18} & t_{19}+it_{20}\\ t_{21}+it_{22} & t_{23}+it_{24}\end{pmatrix},\quad e_4=\begin{pmatrix} t_{25}+it_{26} & t_{27}+it_{28}\\ t_{29}+it_{30} & t_{31}+it_{32}\end{pmatrix}.$$

Очередное уменьшение количества неизвестных в изучаемой системе можно связать с (3,1)- и (3,2)-элементами скобок (13). Легко видеть, что при фиксированном ε эти элементы линейно зависят от набора вещественных неизвестных

$$t_1,...,t_{32},m_1,m_2,m_3,m_4.\tag{14}$$

Ясно, что и (3,1)- и (3,2)-элементы шести исправленных скобок

$$R_{12},R_{13},R_{14},R_{23},R_{24},R_{34}$$

зависят от этого набора линейным образом. Так как исправленные скобки должны быть нулевыми, мы получаем систему из 12 комплексных линейных соотношений на элементы набора (14).

Подчеркнем, что эта (вспомогательная) система является весьма громоздкой. Еще более сложна система квадратичных уравнений, составляющая основной объект наших исследований. На практике получение и изучение этих систем в точном виде возможно лишь с использованием компьютерных символьных вычислений (автором использован при их построении пакет Maple ([10]) и идеи, аналогичные изложенным в [1]-[5],[11]-[13]).

В связи с этим описание дальнейших (реализованных с использованием компьютера) шагов для получения основного результата статьи имеют во многом поверхностный и иллюстративный характер. Так, из 12 упомянутых уравнений ниже приведены для примера лишь два:

$$it_9 + 8\,i\varepsilon\,t_9 - 8\,t_{10}\varepsilon + 4\,m_1 - 8\,m_1\varepsilon - 4\,t_1 + 8\,\varepsilon\,t_1 + 8\,i\varepsilon\,t_2 - 4\,im_2 - 8\,im_2\varepsilon = 0,$$

$$4\,it_{17} + 8\,i\varepsilon\,t_{17} - 8\,t_{18}\varepsilon - 2\,it_5 + 2\,t_6 - 4\,im_3 - 8\,im_3\varepsilon - 2\,it_3 - 4\,it_3\varepsilon - 2\,t_4 + 4\,t_4\varepsilon = 0.$$

Замечание. В вещественной форме эта система из 24 уравнений имеет ранг, равный 20.

С учетом решения этой линейной подсистемы мы переходим к завершающему шагу упрощения исходной системы (содержащей 90 уравнений),относительно 16 вещественных неизвестных

$$t_1, t_3, t_4, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}, t_{16}, t_{24}, t_{27}, t_{28}, t_{32}, m_1, m_2, m_3, m_4. \tag{15}$$

В нашем подслучае ($(\varepsilon, 0)$–тип) помимо приведенных линейных уравнений в исходной системе имеются также квадратичные и кубические уравнения.

Мы выделяем из нее "ядро" из 16 квадратичных комплексных уравнений. Отметим при этом следующие моменты.

1) Первые восемь из этих уравнений получаются за счет приравнивания к нулю следующих восьми элементов исправленных скобок

$$(R_{13})_{1,2},\ (R_{24})_{1,2},\ (R_{13})_{1,1},\ (R_{14})_{1,1},\ (R_{13})_{2,2},\ (R_{24})_{2,2},\ (R_{23})_{2,1},\ (R_{14})_{2,1}.$$

Эти элементы зависят только от набора (15).

2) В элементы $(R_{12})_{1,1}$ и $(R_{34})_{1,1}$ входят помимо набора (12) еще и отдельные элементы третьих столбцов базисных матриц $E_1 - E_4$. Но разность

$$(D_{12})_{1,1} - (D_{34})_{1,1}$$

двух этих элементов зависит только от набора (15). Аналогичным свойством (квадратичной) зависимости от набора (15) обладают еще три разности $(D_{12})_{1,2} - (D_{34})_{1,2}$, $(D_{12})_{2,1} - (D_{34})_{2,1}$, $(D_{12})_{2,2} - (D_{34})_{2,2}$.

3) Наконец, из рассмотрения (3,3)-элементов исправленных скобок R_{13}, R_{14}, R_{23}, R_{24} получаются еще 4 комплексных квадратичных уравнения.

Некоторые из уравнений заявленной квадратичной системы приведены ниже:

$$\begin{gathered}-it_4t_{12} - it_{11}t_{12} - it_3m_4 - 2\,it_{12}\varepsilon\,t_{11} - 2\,it_{12}\varepsilon\,t_4 - 3\,it_4t_3 - {t_4}^2\varepsilon + \varepsilon\,{t_3}^2 +\\ +{t_{12}}^2\varepsilon - {t_{11}}^2\varepsilon - t_4t_{24} - t_3t_{12} + t_4m_4 + t_3t_{32} + t_3m_3 - t_4t_{11} + 3/2\,{t_4}^2 - 3/2\,{t_3}^2 + 1/2\,{t_{12}}^2 -\\ -1/2\,{t_{11}}^2 + it_3t_{24} + it_{11}t_3 + it_4m_3 - 2\,t_4\varepsilon\,t_{11} - 2\,t_3\varepsilon\,t_{12} +\\ +it_4t_{32} + 2\,it_3\varepsilon\,t_{11} + 2\,it_4\varepsilon\,t_3 = 0,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}-3\,it_{12}t_{11} - 2\,it_{12}\varepsilon\,t_{11} - 2\,it_{12}\varepsilon\,t_4 + it_{11}t_{32} + it_{12}t_4 + it_{11}m_3 + it_{12}m_4 + t_{11}m_4 -\\ -t_{11}t_{24} - t_{12}m_3 - t_{12}t_{32} - it_3t_4 - it_{11}t_3 - it_{12}t_{24} - {t_4}^2\varepsilon + \varepsilon\,{t_3}^2 +\\ +{t_{12}}^2\varepsilon - {t_{11}}^2\varepsilon + t_3t_{12} + t_4t_{11} + 1/2\,{t_4}^2 - 1/2\,{t_3}^2 + 3/2\,{t_{12}}^2\\ -3/2\,{t_{11}}^2 - 2\,t_4\varepsilon\,t_{11} - 2\,t_3\varepsilon\,t_{12} + 2\,it_3\varepsilon\,t_{11} + 2\,it_4\varepsilon\,t_3 = 0,\end{gathered} \tag{17}$$

Замечание. Уравнения (16)и (17) – самые простые. Остальные уравнения по сравнению с ними содержат в 3-4 раза больше слагаемых.

2. КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Подчеркнем, что обсуждаемая подсистема из 16 комплексных уравнений образует совокупность необходимых (но, вообще говоря, не достаточных !) условий на элементы матриц (9), образующих базис алгебры Ли.

Аналогичные системы были построены и решены ранее для поверхностей двух типов (1/2,1/2) и (1/2,0) (см. [3],[4],[11],[12], [13]). Для обсуждаемых здесь типов $(\varepsilon, 0)$, как и для (1/2,1/2), описанная схема приводит к весьма сложным системам уравнений (даже с учетом возможностей пакета символьной математики Maple).

Вместе с тем более детальное по сравнению с [3] рассмотрение младших компонент тождества (3) и использование дополнительных упрощений канонического уравнения (5) для поверхностей типов $(\varepsilon, 0)$ позволяет уменьшить на две единицы количество вещественных неизвестных в обсуждаемой квадратичной подсистеме. Например, по аналогии с рассмотрениями работы [4] получается следующее утверждение.

Предложение 1. Для коэффициентов многочлена (4) из канонического уравнения (5) аффинно-однородной поверхности типа $(\varepsilon, 0)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$ выполняются следующие ограничения:

$$f_{12} = 0,\ f_{03} = 0,\ g_{02} = 0,\ h_{02} = 0; \tag{18}$$

$$3f_{30} + \overline{g_{20}} - 4\varepsilon g_{20} = 0, \quad f_{21} + \overline{h_{20}} - 2\varepsilon g_{11} = 0. \tag{19}$$

Следующим шагом является разделение обсуждений на три случая.

Предложение 2. Пусть $g(M)$ — алгебра, отвечающая аффинно-однородной поверхности M типа $(\varepsilon, 0)$. Для пары элементов $(A2_1, A2_2)$ базисных матриц E_1, E_2 этой алгебры можно считать выполненным одно из трех условий:

$$1)\ (A2_1, A2_2) = (0, 0);\ 2)\ (A2_1, A2_2) = (0, 1);\ 3)\ A2_1 = 1,\ A2_2 \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Полученная в [4] формула для элемента А2 матрицы (1) несколько упростится с учетом формул (18). В частности, для элементов первых двух матриц из базиса (9) получим следующие выражения

$$A2_1 = -\frac{1}{2\varepsilon}(2f_{21} + g_{11}), \quad A2_2 = -\frac{i}{2\varepsilon}(2f_{21} - g_{11}).$$

Заметим теперь, что вид канонического уравнения (5) обсуждаемой однородной поверхности сохраняется при линейных преобразованиях следующих двух типов:

$$1)\ z \to tz,\ w \to t^2 w\ (t \in \mathbb{R}),$$

$$2)\ z_1 \to e^{i\theta} z_1\ (\theta \in \mathbb{R}).$$

При этом первое преобразование умножает каждый из пары коэффициентов (f_{21}, g_{11}) на t, а второе – на $e^{i\theta}$. Это означает, что пару комплексных чисел $(A2_1, A2_2)$ можно привести в одно из трех состояний, заявленных в предложении 4, за счет подходящего выбора значений параметров t и θ. Предложение 2 доказано.

В каждом из трех обозначенных подслучаев этого предложения обсуждения существенно упрощаются. Так, при рассмотрении уравнения (16) в случае 2) его можно разделить на действительную и мнимую части:

$$Re\ :\ (-2\,t_{12}\varepsilon - 3/2 + {t_{12}}^2\varepsilon - {t_{11}}^2\varepsilon + 1/2\,{t_{12}}^2 - 1/2\,{t_{11}}^2 + t_{32} + m_3 - t_{12} + \varepsilon) = 0$$

и

$$Im\ :\ (-2\,t_{12}\varepsilon\,t_{11}+2\,\varepsilon\,t_{11}-t_{12}t_{11}-m_4+t_{11}+t_{24})=0.$$

Далее, выражая из этих уравнений коэффициенты t_{24}, t_{32} и подставляя их в следующее уравнение, получим новое уравнение в следующем виде:

$$(2\,it_{12}\varepsilon-2\,i\varepsilon+it_{12}+2\,t_{11}\varepsilon+i+t_{11})\,(it_{12}+t_{11}+i)\,(it_{12}+t_{11}-i)=0.$$

Несмотря на произошедшее повышение степени (с второй до третьей) это уравнение проще предыдущих в силу возможности использования его линейных составляющих.

Исследование всех трех случаев приводит к следующему результату.

Предложение 3. Система из 16 комплексных квадратичных уравнений имеет двадцать типов решений в случае 1) из предложения 3, два типа решений в случае 3) и не имеет ни одного решения в случае 2).

Пример одного из решений для случая 1) приведен ниже:

$$m_3=0,\ m_4=0,\ t_{27}=0,\ t_{28}=0,\ t_{32}=0,\ t_{24}=0,\ \ t_1=2\,\varepsilon\,m_2+m_2,\ t_2=-2\,\varepsilon\,m_1+m_1.$$

Замечание. Отметим, что здесь в результате решения изучаемой системы были получены формулы для восьми неизвестных из набора (15); значения ещё четырех коэффициентов определяются условиями первого подслучая, а остальные элементы набора (15) остаются свободными.

Далее для каждого из полученных решений квадратичной системы необходима завершающая проверка: достраивается ли оно до алгебры Ли или нет ? Такие проверки уже не представляют сложностей. Но количество алгебр, получаемых в ходе таких проверок (и в частности, алгебр, отвечающих поверхностям из [3]), достаточно велико.

Напомним, что в работе [3] изучался тот же класс однородных поверхностей $(\varepsilon, 0)$ типов, но при двух дополнительных ограничениях:

1) элементы $A3, B3$ всех матриц (9) – нулевые;

2) в $g(M)$ имеется матрица $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

Замечание. Второе из приведенных ограничений на алгебру Ли $g(M)$ означает *жесткость* ее интегральной поверхности, т.е. цилиндричность M в направлении одной из вещественных координат.

В рамках данной статьи рассматриваются лишь "новые" алгебры Ли $g(M)$, для которых нарушено хотя бы одно из этих двух условий работы [3].

Набор "индикаторов" $A3_k, B3_k$, позволяющий отличать новые алгебры Ли от уже известных, несложно вычислить из рассмотрения шести исправленных скобок (12). Например,

$$A3_1=\frac{1}{2}(D_{14})_{1,2}+\varphi(t,m);\ \ A3_2=\frac{1}{2I}(D_{23})_{1,2}+\varphi(t,m);$$

$$A3_3=\frac{1}{-(2-4\varepsilon)}(D_{23})_{1,1}+\varphi(t,m);\ \ A3_4=\frac{1}{-(2-4\varepsilon)}(D_{24})_{1,1}+\varphi(t,m); \tag{20}$$

$$B3_1=\frac{1}{2}(D_{14})_{2,2}+\varphi(t,m);\ \ B3_2=\frac{1}{2I}(D_{23})_{2,2}+\varphi(t,m);$$

$$B3_3=\frac{1}{-2I(1+2\varepsilon)}(D_{13})_{2,1}+\varphi(t,m);\ \ B3_4=\frac{1}{-(2-4\varepsilon)}(D_{24})_{2,1}+\varphi(t,m).$$

Здесь через $\varphi(t,m)$ обозначены выражения, квадратично зависящие от элементов набора (12). Их явные общие формулы имеют для всех восьми интересующих нас "индикаторов" достаточно громоздкий вид и потому здесь не приводятся.

В то же время подстановка в эти формулы наборов (12), отвечающих отдельным решениям "опорной" системы квадратичных уравнений, позволяет делать простые выводы об интересующих нас новых алгебрах. Так установлено, что из 22 типов решений опорной системы, упомянутых выше, лишь три типа отвечают новым алгебрам Ли. Эти алгебры приводятся в следующем разделе.

3. ОПИСАНИЕ АЛГЕБР ДЛЯ "НОВЫХ" ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПОВ $(\varepsilon, 0)$

Ниже представлена теорема, которая является компьютерной реализацией идей, указанных в предыдущих разделах.

Теорема 1. Любая 5-мерная алгебра, отвечающая аффинно-однородной поверхности типа $(\varepsilon, 0)$, либо удовлетворяет условиям 1) и 2), либо имеет базис одного из трех следующих видов

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2\,(1-\mu)\,t_{28} + 2\,i\mu\,t_{27} & 0 & -i\beta & 1 \\ 0 & (1-\mu)\,t_{28} & 0 & 0 \\ 2\,i\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2\,(1-\mu)t_{27} + 2\,i\nu t_{28} & 0 & \beta & i \\ 0 & (1-\mu)t_{27} & 0 & 0 \\ 4-2\,\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -t_{28} + it_{27} & 0 & 0 \\ 2\,\nu t_{28} + i\mu\,t_{27} & 0 & -i\beta & 1 \\ 0 & 2\,i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & t_{27} + it_{28} & 0 & 0 \\ -\mu\,t_{27} + i\nu\,t_{28} & 0 & \beta & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} m_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon t_{27}t_{28} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mu = 1 + 2\varepsilon, \nu = 1 - 2\varepsilon$, $m_5 = t_{28}\,t_{27}(\mu - 1) - i/2(\mu {t_{27}}^2 + \nu {t_{28}}^2)$; $\alpha = 1/2\,\mu {t_{27}}^2$; $\beta = 1/2\ (\mu\,t_{27} - i\nu\,t_{28})\,(t_{27} + it_{28})$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2i\mu t_{27} & 0 & -i\alpha & 1 \\ 0 & i\mu t_{27} & 0 & 0 \\ 2\,i\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} -4\,\varepsilon\,t_{27} & 0 & \alpha & i \\ 0 & -2\,\varepsilon\,t_{27} + it_{16} & 0 & 0 \\ 2\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & it_{27} & 0 & 0 \\ i\mu t_{27} & 0 & -i\alpha & 1 \\ 0 & 2\,i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & t_{27} & 0 & 0 \\ -\mu t_{27} & 0 & \alpha & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} -i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2\,i & 1 \\ -2\,\varepsilon - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,i\,(1+2\,\varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 1/2 & i \\ i\,(-2\,\varepsilon+1) & 0 & 0 & 0 \\ 2-4\,\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2\,i & 1 \\ 0 & 2\,i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_4 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,i & 1/2 & i \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для перехода от полученных алгебр Ли к соответствующим однородным поверхностям необходимо эти алгебры проинтегрировать. Существование интегральных многообразий, отвечающих построенным алгебрам Ли, вытекает из теоремы Фробениуса (см. [14], с. 35), а техника такого интегрирования достаточно подробно описана в [3]-[4]. Ниже приводится итоговое утверждение о полученных алгебрах.

Предложение 4 Интегральными многообразиями, отвечающими алгебрам Ли (21) – (23), являются следующие аффинно-однородные поверхности:

$$Im(\bar{z}_1 w) = |z_2|^2 \pm |z_1|^\alpha e^{\beta \arg z_1} \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}); \qquad (24)$$

$$Im(\bar{z}_1 w) = |z_2|^2 \pm |z_1|^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}); \qquad (25)$$

$$|z_1|^2 Re(\bar{z}_1 w) = \mu\,(Im(\bar{z}_1 z_2))^2 + \nu\,(Re(\bar{z}_1 z_2))^2 \pm |z_1|^2 \qquad (26)$$

$$(\mu = 1 + 2\varepsilon, \ \nu = 1 - 2\varepsilon).$$

В завершение статьи напомним, что для описания всех однородных поверхностей типов $(\varepsilon, 0)$ необходимо рассмотреть еще случай 6-мерных алгебр Ли, отвечающих таким многообразиям.

При этом, согласно [5], описание свойства однородности для поверхностей типа $(1/2, 0)$ в $\mathbb{C}^3$ сводится к изучению лишь 5-мерных алгебр Ли. В связи с этим естественной является гипотеза о полноте описания аффинно-однородных поверхностей типов $(\varepsilon, 0)$ результатами статьи [Л-Х] и списками (24)-(26). В работе [15] эта гипотеза подтверждена. Настоящая статья представляет собой более подробное изложение одной из частей краткого сообщения [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобода, А. В. Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии / А. В. Лобода // Матем. сборник. — 2001. — Т. 192. — С. 3–24.

2. Chern, S. S. Real hypersurfaces in complex manifolds / S. S. Chern, J. K. Moser // Acta Math. — 1974. – Vol. 133, № 3. — P. 219–271.

3. Лобода, А. В. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2003. — № 10. — С. 38–50.

4. Лобода, А. В. Об аффинной однородности поверхностей трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода, Т. Т. З. Нгуен // Тр. МИАН. — 2012. — № 279. — С. 102–119.

5. Лобода, А. В. Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода // Материалы II Междунар. конфер. "Геометрический анализ и его приложения". — Волгоград, 2014. — С. 95–97.

6. Atanov, A. V. Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type (1/2,0) in $\mathbb{C}^3$ / A. V. Atanov, A. V. Loboda, A. V. Shipovskaya // 2014. — http://arxiv.org/pdf/1401.2252v1.pdf.

7. Cartan, E. Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — 1932. — № 11. — P. 17–90.

8. Fels, G. Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 / G. Fels, W. Kaup // Acta Math. — 2008. — V. 210. — P. 1–82.

9. Beloshapka, V. K. Classification of homogeneous CR-manifolds in dimension 4 / V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskiy // J. Math. Anal.Appl. — 2011. — No. 2. — P. 655–672.

10. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. — М.: Солон-Пресс, 2006. — 720 с.

11. Нгуен, Т. Т. З. Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ / Т. Т. З. Нгуен // Математические заметки. — 2013. — Т. 94, № 2. — С. 246–265.

12. Лобода, А. В. О полном описании аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей трубчатого типа пространства $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода // Воронежская зимняя матем. школа: материалы конференц. — Воронеж, 2013. С. 144–145.

13. Нгуен, Т. Т. З. Построение 5-мерных матричных алгебр Ли с помощью пакета MAPLE / Т. Т. З. Нгуен // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 162–170.

14. Бишоп, Р. Геометрия многообразий / Р. Бишоп, Р. Криттенден. — М.: Мир, 1963. — 364 с.

15. Лобода, А. В. О полном списке аффинно-однородных поверхностей $(\varepsilon, 0)$-типов в пространстве $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода, А. В. Шиповская // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2015. — № 6. — С. 1–7.

REFERENCES

1. Loboda A. V. Homogeneous strictly pseudo convex hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ with twodimensional isotropy groups. [Loboda A. V. Odnorodnye strogo psevdo-vypuklye giperpoverxnosti v $\mathbb{C}^3$ s dvumernymi gruppami izotropii]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2001, vol. 192, pp. 3–24.

2. Chern S. S., Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds. Acta Math., 1974, vol. 133, no. 3, pp. 219–271.

3. Loboda A. V., Khodarev A.S. On a family of affine-homogeneous real hyper surfaces of a three-dimensional complex space. [Loboda A. V., Xodarev A. S. Ob odnom semejstve affinno-odnorodnyx veshhestvennyx giperpoverxnostej 3-mernogo kompleksnogo prostranstva]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2003, no. 10, pp. 38–50.

4. Loboda A. V., Nguen T. T. Z. On affine homogeneity of a surfaces of tubular type in $\mathbb{C}^3$. [Loboda A. V., Nguen T. T. Z. Ob affinnoj odnorodnosti poverxnostej trubchatogo tipa v $\mathbb{C}^3$]. *Trudy MIAN — Procedeengs of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 2012, no. 279, pp. 102–119.

5. Loboda A. V. Affinely homogeneous real hypersurfaces of 3-dimensional complex space. [Loboda A. V. Affinno-odnorodnye veshhestvennye giperpoverxnosti 3-mernogo kompleksnogo prostranstva]. Proceedings of the II International Conference "Geometric analysis and its applications". Volgograd, 2014, pp. 95–97.

6. Atanov A. V., Loboda A. V., Shipovskaya A. V. Affine homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces of the type (1/2,0) in $\mathbb{C}^3$. 2014. http://arxiv.org/pdf/1401.2252v1.pdf.

7. Cartan E. Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes. Ann. Math. Pura Appl., 1932. no. 11, pp. 17–90.

8. Fels G., Kaup W. Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5. Acta Math., 2008, vol. 210, pp. 1–82.

9. Beloshapka V. K., Kossovskiy I. G. Classification of homogeneous CR-manifolds in dimension 4. J. Math. Anal. Appl., 2011, no. 2. pp. 655–672.

10. Dyakonov V. P. Maple 9.5/10 in the mathematics, phisics and education. [D'yakonov V. P. Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii]. Moscow, 2006, 720 p.

11. Nguen T. T. Z. Affine homogeneous real hypersurfaces of tubular type in $\mathbb{C}^3$. [Nguen T. T. Z. Affinno-odnorodnye veshhestvennye giperpoverxnosti trubchatogo tipa v $\mathbb{C}^3$]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, iss. 2, pp. 246–265.

12. Loboda A. V. A complete description of affine-homogeneous real hypersurfaces of tubular type in $\mathbb{C}^3$. [Loboda A. V. O polnom opisanii affinno-odnorodnyx veshhestvennyx giperpoverxnostej trubchatogo tipa prostranstva $\mathbb{C}^3$]. Voronezh winter math. shcool, 2013, Voronezh. Abstract of the report, pp. 144–145.

13. Nguen T. T. Z. Construction of 5-dimensional matrix Lie algebras with MAPLE. [Nguen T. T. Z. Postroenie 5-mernyx matrichnyx algebr Li s pomoshh'yu paketa MAPLE]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 162–170.

14. Bishop R., Krittenden R. Geometry of manifolds. [Bishop R., Krittenden R. Geometriya mnogoobrazij]. Moscow: Mir, 1963, 364 p.

15. Loboda A. V., Shipovskaya A. V. On complete list of affinely homogeneous surfaces of $(\varepsilon, 0)$-types in the space $\mathbb{C}^3$. [Loboda A. V., Shipovskaya A. V. O polnom spiske affinno-odnorodnyx poverxnostej $(\varepsilon, 0)$-tipov v prostranstve $\mathbb{C}^3$]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2015, no. 6, pp. 1–7.

Шиповская Александра Владимировна, аспирант кафедры высшей математики, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, Воронеж, Россия
E-mail: al_eksa2112@mail.ru
Тел.: 8–910–243–1998

Shipovskaya Aleksandra Vladimirovna, post-graduate student, chaire of higher mathematics, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh, Russia
E-mail: al_eksa2112@mail.ru
Tel.: 8–910–243–1998