

ЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИМПЛЕКСОВ

А. Н. Попов

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступила в редакцию 13.01.2015 г.

Аннотация. В данной работе рассматриваются линейные характеристики регулярных симплексов T_n . Линейные характеристики симплексов представляют собой систему расстояний L_{ij} между элементами e_i и e_j симплекса T_n и систему расстояний между центром и элементами симплекса - радиусами n -мерных каркасных сфер ${}^n R_k$. На основании производящего алгоритма гомологического симплицального ряда найдены рекуррентные соотношения и формулы связи между этими характеристиками. Показано, что линейная характеристика L_{ij} при $i \leq j$ и $i + j < n$ определяется по формуле $L_{ij} = {}^{i+j+1}R_i + {}^{i+j+1}R_j$. Основным результатом работы содержится в утверждении, что квадраты линейных характеристик регулярного симплекса относятся друг к другу как целые числа. Также предложен новый вид алгоритма построения регулярного симплекса.

Ключевые слова: симплекс, линейные характеристики, аура, каркас, каркасные сферы, вершинный радиус-вектор, центриса.

LINEAR CHARACTERISTICS OF THE SIMPLICES

A. N. Popov

Abstract. Linear characteristics of the regular simplex T_n are considered in the paper. Linear characteristics of a simplex represent the system of distances L_{ij} between elements e_i and e_j of the simplex T_n and the system of distances between the center and elements of the simplex - radii of n -dimensional skeletal spheres ${}^n R_k$. The recurrence formulas and relationships between these characteristics were found on the basis of the simplex generation algorithm. It is shown that the linear characteristic L_{ij} is defined by the formula $L_{ij} = {}^{i+j+1}R_i + {}^{i+j+1}R_j$ under $i \leq j$ and $i + j < n$. The main result is contained in the statement that squares of linear characteristics of the regular simplex relate to each other as integers. Also a new regular simplex generation algorithm was proposed.

Keywords: simplex, linear characteristics, aura, skeleton, skeletal spheres, vertex radius-vector, centerix.

1. ВВЕДЕНИЕ

Выпуклая оболочка на множестве точек $\{A_i\}$, $i = \overline{0, n}$, равноудалённых друг от друга в n -мерном евклидовом пространстве E^n называется регулярным n -мерным симплексом или n -симплексом, который будем обозначать $T_n = (A_0 A_1 \dots A_n)$. Совершенно справедливо, что выпуклая оболочка на любом подмножестве из $r + 1$ вершины симплекса T_n для $r = \overline{0, n - 1}$ будет представлять r -симплекс. Чтобы подчеркнуть подчинённость r -симплекса, входящего в состав T_n , будем называть его e_r -элементом или гранью (гипергранью) размерности r . Следует отметить, что понятие гиперграни n -мерного симплекса относительно, хотя обычно под гипергранью понимают элемент e_r , $r \geq 3$. Введём определения ауры элемента и каркаса симплекса.

Определение 1. Аурой $F_r(T_n)$ элемента e_r симплекса T_n будем называть подмножество всех элементов $e_i \in T_n$, примыкающих к e_r , таких что $e_i \cap e_r \neq \{\emptyset\}$.

Аура $F_n(T_n)$ представляет полное множество подмножеств элементов e_r , т.е. состав симплекса. Число элементов e_r в составе симплекса T_n определяется биномиальными коэффициентами $|\{e_r\}| = C_{n+1}^{r+1}$. Аура $F_{n-1}(T_n)$ представляет собой всё множество элементов симплекса T_n за исключением единственной вершины e_0 . Таким образом, возникает система расстояний, которые характеризуют удаление этой вершины до элементов $F_{n-1}(T_n)$.

Определение 2. Структуру, образованную множеством элементов $\{e_k\} \in T_n, k < n$ и сохраняющую порядок примыкания будем называть k -каркасом $Sk_k(T_n)$, т.е. $Sk_k(T_n) = T_n \setminus \{e_i\}, i = \overline{k+1, n}$.

В общем случае под линейными характеристиками симплексов будем понимать систему L_{ij} расстояний между произвольными элементами e_i и $e_j, i, j = \overline{0, n-1}, i \neq j$ и радиусов n -мерных сфер nR_k , касающихся $Sk_k(T_n), i = \overline{k+1, n}$.

Расстояние между элементами e_i и e_j берётся в обычном понимании как минимальное расстояние между любыми парами точек $\mathbf{x} \in e_i$ и $\mathbf{y} \in e_j$:

$$d_{ij} = \min_{\mathbf{x} \in e_i, \mathbf{y} \in e_j} |\mathbf{xy}|$$

Таким образом, расстояние между примыкающими друг к другу элементами e_i и e_j , характеризующимися отношением смежности ($i = j$) или инцидентности ($i \neq j$), равно нулю, и в частности расстояние между e_r и элементами, входящими в его ауру $F_r(T_n)$ равно нулю.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИМПЛЕКСОВ ПРИ $n = 3$

Линейными характеристиками планарного регулярного симплекса T_2 являются величины $L_{00}, L_{01}, {}^2R_0, {}^2R_1$, а в случае трёхмерного симплекса имеем $L_{00}, L_{01}, L_{02}, L_{11}, {}^3R_0, {}^3R_1, {}^3R_2$ (Рис. 1).

Для трёхмерного симплекса L_{00} представляет собой длину ребра правильного тетраэдра. Величина L_{01} характеризует высоту его грани e_2, L_{02} — высоту тетраэдра, L_{11} — расстояние

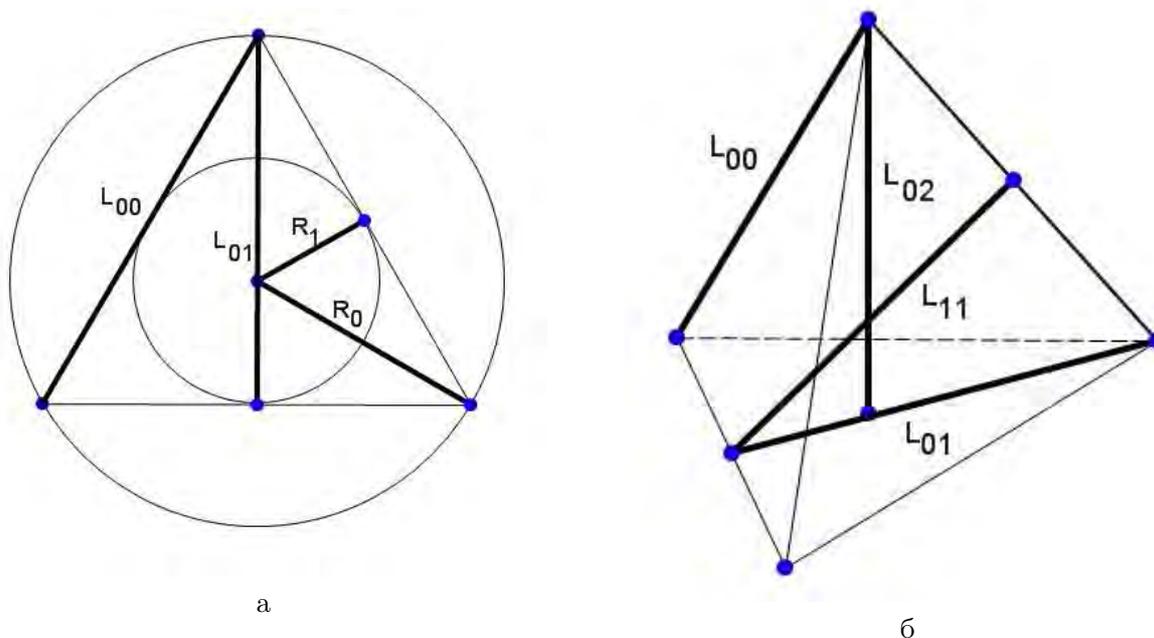


Рис. 1. Линейные характеристики планарного (а) и трёхмерного (б) симплексов

между центрами скрещённых рёбер (бимедиана), 3R_0 — радиус описанной сферы Sp_2 , 3R_1 — радиус сферы Sp_2 , вписанной в каркас $Sk_1(T_3)$, и, наконец 3R_2 — радиус сферы Sp_2 , вписанной в каркас $Sk_2(T_3)$, которая в привычном смысле является сферой, вписанной в тетраэдр. В дальнейшем для удобства примем длину ребра стандартного симплекса, т.е. $L_{00} = 1$.

Из известных соотношений элементарной геометрии легко найти линейные характеристики симплексов T_n для $n = 1, 2, 3$ в численном виде. Таблица 1 компактно представляет эти результаты для квадратов линейных характеристик в случае $n = 3$.

Таблица 1. Линейные характеристики симплекса T_3

i, j	1	2	3	4	5	6	7
$\{R^2, L^2\}$	R_2^2	R_1^2	R_0^2	L_{11}^2	L_{02}^2	L_{01}^2	L_{00}^2
m_i, m_j	1	3	9	12	16	18	24

Отметим следующий результат, что квадраты линейных характеристик симплекса T_3 связаны друг с другом через отношения целых чисел m_i/m_j , приведенных в последней строке. Например, чтобы выразить R_1^2 (квадрат радиуса сферы, вписанной в каркас $Sk_1(T_3)$) через L_{01}^2 (квадрат высоты боковой грани) достаточно записать выражение $R_1^2 = \frac{m_2}{m_6} L_{01}^2 = \frac{L_{01}^2}{6}$, что удобно для решения практических задач. Аналогичный результат имеет место для T_1 и T_2 .

3. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ПРОЦЕДУРА ДЛЯ СИМПЛЕКСА

Естественным образом возникает задача построения гомологического ряда линейных характеристик для симплекса произвольной размерности. Для этого необходимо найти производящие формулы, которые бы связывали характеристики симплекса T_{n+1} с характеристиками симплекса T_n . Производящая процедура для получения симплекса T_{n+1} из T_n в общем виде проста [1]. Формально представим её следующим образом:

Из центра O_n симплекса T_n проводится нормаль ортогональная любым элементам e_r , $r = \overline{0, n}$, входящих в состав T_n ;

На полученной нормали находится точка A_{n+1} равноудалённая от всех вершин T_n ;

Найденная вершина A_{n+1} соединяется отрезками e'_1 со всеми вершинами $A_i \in T_n$, $i = \overline{0, n}$, образуя совместно с множеством $\{e_1\} \in T_n$ каркас $Sk_1(T_{n+1})$;

Любая пара полученных в п.3 новых элементов e'_1 с одним из элементов $e_1 \in T_n$ образует элемент e'_2 . Множество таких элементов совместно с каркасом $Sk_2(T_n)$ образует каркас $Sk_2(T_{n+1})$: $\{e'_2\} \cup Sk_2(T_n) = Sk_2(T_{n+1})$;

Любая тройка полученных в п.4 новых элементов e'_2 с одним из элементов $e_2 \in T_n$ образует элемент e'_3 . Множество таких элементов совместно с каркасом $Sk_3(T_n)$ образует каркас $Sk_3(T_{n+1})$: $\{e'_3\} \cup Sk_3(T_n) = Sk_3(T_{n+1})$;

И т.д. до исчерпывания наполнения состава $\{e'_n\} \cup T_n = Sk_n(T_{n+1})$. Т.о. $T_{n+1} \equiv e_{n+1} = Sk_n(T_{n+1}) \cup \overline{e_{n+1}}$, где $\overline{e_{n+1}}$ означает наполнение старшей границы.

4. СИСТЕМА ПРОИЗВОДЯЩИХ ФОРМУЛ

Определить систему линейных характеристик для T_n помогает следующее утверждение.

Утверждение 1. Система линейных характеристик L_{ij} и nR_j симплекса T_n определяется следующими условиями $i \quad j$, $i + j < n$, $j = \overline{0, n-1}$, $i = 0, \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Очевидно, что $L_{ij} = L_{ji}$, поэтому неравенство $i \quad j$ исключает из рассмотрения повторяющиеся элементы и не приводит к потере общности рассмотрения. Элемент e_j представляет собой симплекс T_j . Тогда всё множество вершин $\{e_0\} \in T_n$ разбивается на 2 подмножества: $\{e'_0\} \in T_j$ и $\{e''_0\} \notin T_j$. Число элементов $|\{e'_0\}| = j + 1$ и соответственно $|\{e''_0\}| = n - j$. Размерность e_j задаётся интервалом $0 \quad j \quad n - 1$. Оценим интервал возможных значений i . С

учётом условия $i \leq j$ и максимальной размерности $e_i'' \notin T_j$ для числа вершин должно выполняться соотношение $i + 1 + j + 1 \leq n + 1$ или $i + j \leq n - 1$. Справедливо также будет $2i \leq n - 1$. Поскольку i принимает целое значение, то $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Таким образом условия, определяющие набор характеристик L_{ij} симплекса T_n представляют собой самосогласованную систему. При этом число допустимых характеристик L_{ij} представляет собой сумму всех чётных чисел не превышающих n , если n – чётное, и сумму всех нечётных чисел, не превышающих n , если n – нечётное.

Набор ${}^n R_j$ естественным образом определяет радиусы сфер, вписанных в соответствующие каркасы $Sk_j(T_n)$.

Центральным моментом построения производящих формул является нахождение высоты $L_{0(n-1)}$ симплекса T_n , которое представляет собой итерационный процесс.

Для симплекса T_2 высота L_{01} находится элементарно (Рис. 1а):

$$L_{01}^2 = L_{00}^2 - {}^1R_0^2$$

Для симплекса T_3 высоту L_{02}^2 можно определить двумя способами (Рис. 1б):
 через ${}^2R_0^2$ как $L_{02}^2 = L_{00}^2 - {}^2R_0^2$
 через ${}^2R_1^2$ как $L_{02}^2 = L_{01}^2 - {}^2R_1^2$

Аналогично для T_4 имеем 3 способа выражения L_{03}^2 :

$$L_{03}^2 = L_{00}^2 - {}^3R_0^2,$$

$$L_{03}^2 = L_{01}^2 - {}^3R_1^2,$$

$$L_{03}^2 = L_{02}^2 - {}^3R_2^2.$$

В общем случае для нахождения высоты симплекса размерности n можем воспользоваться любой из $n - 1$ формул вида

$$L_{0(n-1)}^2 = L_{0j}^2 - {}^{n-1}R_j^2, \tag{1}$$

где $j = \overline{0, n-2}$.

Далее найдём формулы связи для радиусов каркасных сфер. Для этого проведём анализ общего случая для симплекса $T_n (A_0 A_1 \dots A_n)$.

Согласно производящей процедуре (п.3⁰) центр O_n симплекса T_n находится на нормали, проведенной из центра O_{n-1} , симплекса T_{n-1} . Следовательно, O_{n-1} является точкой касания каркасной сферы $(O_n, {}^n R_{n-1})$ каркаса $Sk_{n-1}(T_n)$. Одновременно $(O_n O_{n-1})$ ортогонально всем элементам $\{e_i\} \quad i = \overline{0, n-2}$, полученным на предыдущих шагах производящей процедуры. Для общности можно учитывать ортогональность $(O_n O_{n-1})$ относительно вершин T_{n-1} , которые можно обозначить как центры O_0 нульмерных симплексов T_0 .

Поскольку треугольники вида $\Delta O_n O_{n-1} O_i, \quad i = \overline{0, n-2}$ прямоугольные, то имеем $n - 1$ соотношение вида

$${}^n R_i^2 = {}^n R_{n-1}^2 + {}^{n-1} R_i^2 \tag{2}$$

Рассмотрение прямоугольных треугольников $\Delta A_n O_n O'_i$ с гипотенузой $(A_n O_n), \quad i = \overline{1, n-1}$ даёт ещё $n - 1$ соотношение вида

$${}^n R_0^2 = {}^n R_i^2 + {}^i R_0^2. \tag{3}$$

Объединение соотношений (2) и (3) позволяет получить формулу общего вида

$${}^n R_i^2 = {}^n R_j^2 + {}^j R_i^2 \tag{4}$$

с условиями $0 \leq i < n - 1$ и $i < j < n$.

Получим выражения для характеристик L_{ij} .

Определение 3. Вершинным радиус-вектором называется вектор, имеющий начало в центре, а конец в вершине геометрической фигуры.

Лемма. Сумма всех вершинных радиус-векторов правильного симплекса T_n равна нулю.

Для доказательства леммы воспользуемся индукцией по n . Линейный симплекс T_1 представляет собой отрезок (A_0A_1) с центром в точке O_1 . Вектора $\overrightarrow{O_1A_0}$ и $\overrightarrow{O_1A_1}$ имеют одинаковую длину $|\overrightarrow{O_1A_0}| = |\overrightarrow{O_1A_1}|$ и имеют противоположное направление. Таким образом, $\overrightarrow{O_1A_0} + \overrightarrow{O_1A_1} = 0$. Предполагая, что $\sum_{i=0}^n \overrightarrow{O_nA_i} = 0$ верно для T_n докажем, что $\sum_{i=0}^{n+1} \overrightarrow{O_{n+1}A'_i} = 0$.

Согласно модифицированной производящей процедуре (см. Дополнение) переход к симплексу T_{n+1} осуществляется параллельным переносом симплекса T_n на величину $\frac{1}{n+2}\overrightarrow{L_{0n}}$.

Каждый i -тый вершинный радиус-вектор $i = \overline{0, n}$ симплекса T_n станет равным $\overrightarrow{O_{n+1}A'_i} = \overrightarrow{O_{n+1}A_i} + \frac{1}{n+2}\overrightarrow{L_{0n}}$. Тогда $\sum_{i=0}^{n+1} \overrightarrow{O_{n+1}A'_i} = \sum_{i=0}^n \overrightarrow{O_{n+1}A'_i} + \overrightarrow{O_{n+1}A'_{n+1}} = \sum_{i=0}^n \left(\overrightarrow{O_{n+1}A_i} + \frac{1}{n+2}\overrightarrow{L_{0n}} \right) + \overrightarrow{O_{n+1}A'_{n+1}} = \sum_{i=0}^n \overrightarrow{O_{n+1}A_i} + \frac{n+1}{n+2}\overrightarrow{L_{0n}} + \overrightarrow{O_{n+1}A'_{n+1}}$. Поскольку $O_n = O_{n+1}$, и, следовательно, $\sum_{i=0}^n \overrightarrow{O_{n+1}A_i} = 0$ в соответствии с начальным утверждением, а $\overrightarrow{O_{n+1}A'_{n+1}} = -\frac{n+1}{n+2}\overrightarrow{L_{0n}}$ согласно производящей процедуре симплекса. Таким образом, доказано $\sum_{i=0}^{n+1} \overrightarrow{O_{n+1}A'_i} = 0$.

Утверждение леммы могло быть получено в частности из работы [2], в которой для произвольного симплекса утверждается $\sum_{i=0}^n \mathbf{n}_i^{n-1} V_i = 0$, где \mathbf{n} – нормальный вектор к элементу e_{n-1} , имеющего меру $n-1 V$. Но поскольку все гиперграни e_{n-1} равны, то $\sum_{i=0}^n \mathbf{n}_i = 0$. Если рассматривать двойственный симплекс \widetilde{T}_n (вписанный в T_n таким образом, что $e_{n-1} \rightarrow e_0$ ($C_{n+1}^n = C_{n+1}^1$)), то вершинные радиус-векторы T_n после перенормировки будут соответствовать векторам нормалей \mathbf{n} к гиперграням e_{n-1} симплекса \widetilde{T}_n .

Теорема. Пусть в n -мерном евклидовом пространстве E^n существует система из $n + 1$ векторов $\overrightarrow{O_nA_k}$, таких, что $|\overrightarrow{O_nA_k}| = |\overrightarrow{O_nA'_k}|$ и $|\overrightarrow{A_kA'_k}| = 1$ при $k \neq k'$ и задано разбиение векторов на 2 подмножества из $j + 1$ и $n - j$ векторов. Тогда $\sum_{k=0}^j \overrightarrow{O_nA_k} = - \sum_{k=j+1}^n \overrightarrow{O_nA_k}$.

Доказательство. Выпуклая оболочка на множестве точек $\{A_i\}$ удовлетворяют определению регулярного стандартного симплекса, а распределение точек в пространстве образует его вершинный каркас с центром в точке O_n . Тогда $\overrightarrow{O_nA_k}$ являются вершинными радиус-векторами. Поскольку разбиение охватывает целиком всё множество вершинных радиус-векторов регулярного симплекса, то $\sum_{k=0}^j \overrightarrow{O_nA_k} + \sum_{k=j+1}^n \overrightarrow{O_nA_k} = \sum_{k=0}^n \overrightarrow{O_nA_k}$ и согласно доказанной лемме $\sum_{k=0}^j \overrightarrow{O_nA_k} + \sum_{k=j+1}^n \overrightarrow{O_nA_k} = 0$. Теорема доказана.

Рассмотрим $\sum_{k=0}^j \overrightarrow{O_nA_k}$. Каждое слагаемое суммы можно представить в виде $\overrightarrow{O_nA_k} = \sum_{m=j}^{n-1} \overrightarrow{O_{m+1}O_m} + \overrightarrow{O_jA_k}$, т.о. $\sum_{k=0}^j \overrightarrow{O_nA_k} = \sum_{k=0}^j \sum_{m=j}^{n-1} \overrightarrow{O_{m+1}O_m} + \sum_{k=0}^j \overrightarrow{O_jA_k} = (j + 1) \sum_{m=j}^{n-1} \overrightarrow{O_{m+1}O_m}$. Сумма $\sum_{m=j}^{n-1} \overrightarrow{O_{m+1}O_m}$ есть вектор $\overrightarrow{nR_j}$, квадрат длины которого $nR_j^2 = \sum_{m=j}^{n-1} |O_{m+1}O_m|^2$.

Проведём аналогичные рассуждения для суммы векторов $\sum_{k=j+1}^n \overrightarrow{O_n A_k}$, концы которых образуют вершинный каркас симплекса T_i с центром в точке O'_i , причём $i = n - j - 1$. Для удобства произведём переопределение переменных индексов $A_{k-j-1} \rightarrow A'_l$. Так как $k = \overline{j+1, n}$, то $l = \overline{0, i}$ и тогда каждый вектор из суммы может быть записан как $\overrightarrow{O_n A'_l} = \sum_{m=i}^{n-1} \overrightarrow{O'_{m+1} O'_m} + \overrightarrow{O'_i A'_l}$, т.о. $\sum_{l=0}^i \overrightarrow{O_n A'_l} = \sum_{l=0}^i \sum_{m=i}^{n-1} \overrightarrow{O'_{m+1} O'_m} + \sum_{l=0}^i \overrightarrow{O'_i A'_l} = (i+1) \sum_{m=i}^{n-1} \overrightarrow{O'_{m+1} O'_m}$. Сумма $\sum_{m=i}^{n-1} \overrightarrow{O'_{m+1} O'_m}$ есть вектор $\overrightarrow{{}^n R_i}$, квадрат длины которого ${}^n R_i^2 = \sum_{m=i}^{n-1} O'_{m+1} O'_m{}^2$.

На основании доказанной теоремы имеем $(j+1) \overrightarrow{{}^n R_j} = -(i+1) \overrightarrow{{}^n R_i}$. Поскольку $\overrightarrow{{}^n R_i}$ и $\overrightarrow{{}^n R_j}$ в симплексе T_n определяют расстояния от центра симплекса до элементов e_i и e_j соответственно, то из этого следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Линейная характеристика L_{ij} при $i = j$ и $i + j < n$ определяется по формуле

$$L_{ij} = {}^{i+j+1}R_i + {}^{i+j+1}R_j \tag{5}$$

Таким образом, получены выражения для линейных характеристик симплекса T_n .

5. ЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРАВИЛЬНОГО n -СИМПЛЕКСА. ОБЩИЙ ВИД

Квадраты линейных характеристик для регулярного стандартного симплекса T_n могут быть выражены в виде отношения целых чисел. Квадрат радиуса описанной сферы можно получить последовательно применяя формулы (1) и (2), что с учётом $L_{00}^2 = 1$ даёт известную формулу ${}^n R_0^2 = \frac{n}{2(n+1)}$. Тогда соотношение (3) ${}^n R_i^2 = {}^n R_0^2 - {}^i R_0^2$ легко представить в явном виде:

$${}^n R_i^2 = \frac{n}{2(n+1)} - \frac{i}{2(i+1)} = \frac{n-i}{2(n+1)(i+1)} \tag{6}$$

Высота $L_{0(n-1)}$ симплекса T_n находится из соотношения (1), которое выражает её связь с высотами различных элементов e_{j+1} , входящих в состав симплекса T_n . С учётом формулы (6) можно записать $L_{0(n-1)}^2 = L_{0j}^2 - \frac{n-(j+1)}{2n(j+1)}$

При $j = 0$ получаем известное соотношение $L_{0(n-1)}^2 = L_{00}^2 - \frac{n-1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$.

Квадрат отношения длин отрезков, на которые делит высоту симплекса T_n его центр, определяется как квадрат отношения радиусов $\left({}^n R_{n-1/n} R_0 \right)^2 = \frac{1}{n^2}$.

Для представления L_{ij} в виде квадрата для расчётов может применяться следующая формула:

$$L_{ij}^2 = {}^{i+j+1}R_i^2 + {}^{i+j+1}R_j^2 + 2{}^{i+j+1}R_i {}^{i+j+1}R_j = \frac{(i+1)^2 + (j+1)^2}{2(i+j+2)(i+1)(j+1)} + \frac{1}{i+j+2} \tag{7}$$

Используя полученные формулы (6) и (7), найдём линейные характеристики T_4 и T_5 . Результаты расчёта в нормированном виде сведены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2. Линейные характеристики симплекса T_4 .

i, j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\{R^2, L^2\}$	R_3^2	R_2^2	R_1^2	R_0^2	L_{12}^2	L_{11}^2	L_{03}^2	L_{02}^2	L_{01}^2	L_{00}^2
m_i, m_j	3	8	18	48	50	60	75	80	90	120

Таблица 3. Линейные характеристики симплекса T_5 .

i, j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\{R^2, L^2\}$	R_4^2	R_3^2	R_2^2	R_1^2	R_0^2	L_{22}^2	L_{13}^2	L_{12}^2	L_{11}^2	L_{04}^2	L_{03}^2	L_{02}^2	L_{01}^2	L_{00}^2
m_i, m_j	2	5	10	20	50	40	45	50	60	72	75	80	90	120

Пример 1. Для решения практической задачи нахождения расстояния между несмежными рёбрами гипертетраэдра T_4 по известному радиусу описывающей его гиперсферы $S\rho_3$ достаточно из таблицы 2 взять $\sqrt{m_6/m_4}$ в виде коэффициента к заданному радиусу. В численном виде он равен $\sqrt{5}/2$.

Пример 2. Из таблицы 3 видно, что расстояние между противоположащими ребром и плоскостью L_{12} равно радиусу сферы, описанной вокруг симплекса T_5 .

Пример 3. Найти расстояние L_{33} между несмежными пространственными элементами e_3 . Согласно условию $i + j < n$ это расстояние появляется в 7-симплексах и выше: $L_{33} = 2 \cdot {}^7R_3$, ${}^7R_3^2 = \frac{7-3}{2(7+1)(3+1)} = \frac{1}{16}$ и, т.о. имеем $L_{33} = 1/2$, т.е. это расстояние равно половине длине ребра.

6. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена система линейных характеристик симплексов с естественной индексацией.

Квадраты линейных характеристик симплексов представлены в виде отношения целых чисел, отражая, по сути, комбинаторный состав симплексов.

Система линейных характеристик после перенормировки на барицентрические коэффициенты α позволяет достаточно просто находить расстояния между различными элементами e_i и e_j для произвольного симплекса S_n .

7. ДОПОЛНЕНИЕ. О ГОМОЛОГИИ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ЦЕНТРАМИ КАРКАСНЫХ СФЕР. ЦЕНТРИСА

Расстояния между центрами элементов различной размерности можно выразить через радиусы каркасных сфер. На примере симплекса T_3 (Рис. 2) расстояния между центрами инцидентных элементов, порядок которых отличается на единицу можно записать: $|O_0O_1| = {}^1R_0$, $|O_1O_2| = {}^2R_1$, $|O_2O_3| = {}^3R_2$ и т.д. Или в общем виде $|O_iO_{i+1}| = {}^{i+1}R_i$.

Аналогичным образом можно выписать расстояния между центрами инцидентных элементов произвольного порядка: $|O_0O_2| = {}^2R_0$, $|O_1O_3| = {}^3R_1$, $|O_1O_4| = {}^4R_1$, то есть $|O_iO_j| = {}^jR_i$, $i < j$.

Определение 4. Незамкнутую ломаную $O_0O_1 \dots O_n$ в пространстве E^n для заданного производящего алгоритма будем называть центрисой порядка n . Длина каждого сегмента центрисы представляет собой расстояние между центрами инцидентных элементов симплициального ряда, порядок которых отличается на единицу.

Определим персистентную длину (манхэттенское расстояние между концами ломаной O_0 и O_n) и диаметр (евклидово расстояние между концами ломаной O_0 и O_n) для центрисы конечной и бесконечной длины.

На основании формулы (6) квадрат длины $i + 1$ -го сегмента центрисы запишется как

$$|O_iO_{i+1}|^2 = {}^{i+1}R_i^2 = \frac{1}{2(i+1)(i+2)} \quad (8)$$

Отношение квадратов длин двух последовательных сегментов центрисы равно

$${}^{i+2}R_{i+1}/{}^{i+1}R_i^2 = \frac{i+1}{i+3} \quad (9)$$

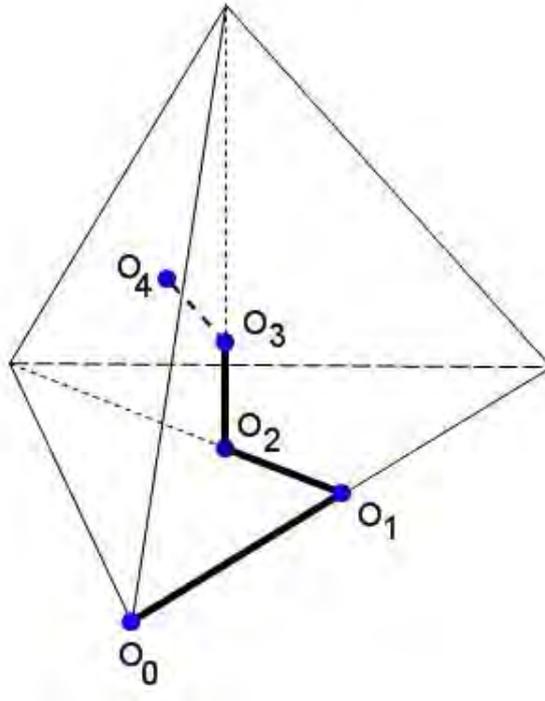


Рис. 2. Центриса, образуемая производящим алгоритмом n . 3^o

Квадрат диаметра $D_{0n}^2 = |O_0O_n|^2$ представляет собой частичную сумму ряда

$$D_{0n}^2 = {}^n R_0^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2(i+1)(i+2)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j(j+1)} = \frac{n}{2(n+1)} \quad (10)$$

Квадрат диаметра бесконечномерной центрисы равен $D_{0\infty}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j(j+1)} = \frac{1}{2}$

Персистентная длина

$$P_{0n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(i+1)(i+2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \quad (11)$$

Отметим, что члены ряда представляют собой среднее геометрическое двух последовательных натуральных чисел. По сути, ряд P_{0n} является гармоническим рядом, и поэтому персистентная длина бесконечномерной центрисы $P_{0\infty}$ будет стремиться к бесконечности.

Для сравнения приведём характеристики кубической центрисы – ломаной линии, связывающей центры последовательных элементов e_i и e_{i+1} при построении n -мерного куба по производящему алгоритму [1]. Сегменты центрисы для n -куба имеют одинаковую длину и равны $1/2$ для куба с единичной длиной ребра.

Квадрат диаметра кубической центрисы порядка n равен $D_{0n}^2 = \frac{n}{4}$, а персистентная длина $P_{0n} = \frac{n}{2}$. Для кубической центрисы как диаметр, так и персистентная длина являются расходящимися.

Поскольку вид центрисы обусловлен производящим алгоритмом n -мерных оболочек, то естественно возникает вопрос, что представляет собой производящий алгоритм для T_n , если зафиксировать положение центра O_n , т.е. сжать центрису до нуля? В этом случае траекторию в образующем пространстве будут описывать вершины и остальные элементы симплекса

T_n , а центр оставаться неподвижным. Представим модифицированный заданным условием производящий алгоритм для получения симплекса T_{n+1} из T_n :

Из центра O_n симплекса T_n проводится нормаль ортогональная любым элементам e_r , $r = \overline{0, n}$, входящих в состав T_n ;

На полученной нормали отмечается точка A_{n+1} , удалённая на расстояние $\frac{n+1}{n+2}L_{0n}$ от O_n , а симплекс T_n сдвигается параллельным переносом на расстояние $\frac{1}{n+2}L_{0n}$ в направлении противоположном вектору $\overrightarrow{O_n A_{n+1}}$;

Последующие пункты модифицированного алгоритма соответствуют пунктам (3)–(6) алгоритма, описанного в (п. 3⁰).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордевский, Д. З. Популярное введение в многомерную геометрию / Д. З. Гордевский, А. С. Лейбин. — Харьков: Издательство Харьковского госуниверситета, 1964. — 192 с.
2. Астахов, А. Т. Одно свойство нормалей к граням n-мерного симплекса / А. Т. Астахов, В. З. Мешков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 91–93.

REFERENCES

1. Gordevskiy D. Z., Leybin A. S. Popular Introduction to Multidimensional Geometry. [Gordevskiy D. Z., Leybin A. S. Populyarnoe vvedenie v mnogomernuyu geometriyu]. Kharkov: Publishing house of Kharkov State University, 1964, 192 p.
2. Astahov A. T., Meshkov V. Z. One property of the normals to the faces of the n-dimensional simplex. [Astahov A. T., Meshkov V. Z. Odno svojstvo normalej k granyam n-mernogo simpleksa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 91–93.

Попов Алексей Николаевич, преподаватель кафедры молекулярной и медицинской биофизики, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина

E-mail: panuniver@mail.ru

Popov Alexey Nikolaevich, Teacher of Department of Molecular and Medical Physics, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

E-mail: panuniver@mail.ru