УДК 517.954

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ И ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

А. А. Петрова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 06.02.2015 г.

Аннотация. В гильбертовом пространстве абстрактное линейное параболическое уравнение с симметричным оператором и весовым интегральным условием на решение в условиях слабой и обобщённой разрешимости решается приближённо методом Галёркина. Предположения на проекционные подпространства ориентированы на метод конечных элементов. Рассматривается случай проекционных подпространств, построенных по равномерному разбиению области изменения пространственных переменных, а также случай произвольных проекционных подпространств типа конечных элементов. Установлены оценки погрешностей приближённых решений, сходимость приближённых решений к точному решению в различных нормах и порядки скорости сходимости.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, весовое интегральное условие, метод Галеркина, симметричный оператор.

THE CONVERGENCE OF GALERKIN'S METHOD OF APPROXIMATE SOLUTION OF PARABOLIC EQUATION WITH SYMMETRICAL OPERATOR AND WEIGHT INTEGRAL CONDITION

A. A. Petrova

Abstract. In the Hilbert space the abstract linear parabolic equation with symmetrical operator and weight integral condition on solution is considered in the conditions of weak and generalized solubility. This eqation is solved approximately by Galerkin's method. Estimates on projection subspaces are oriented on the finite element method. The case of projection subspaces built by the uniform partition of region of variation of space variables and also case of arbitrary projection subspaces of the type of finite elements are considered. The error estimations of approximate solutions, convergence of approximate solutions to exact solution in different norms and the orders of rate of convergence are established.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, weight integral condition, the Galerkin's method, symmetrical operator.

ОПИСАНИЕ ТОЧНОЙ И ПРИБЛИЖЁННОЙ ЗАДАЧ

Предполагается, что задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u,\, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u,v)$. Пусть для всех $u,\, v \in V$ выполнены оценки

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V,\ \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Очевидно, что форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A: V \to V'$, такой что для $u,\, v \in V$ выполняется $a(u,v) = (Au,v)$. Отсюда следует оценка $\|A\|_{V\to V'} \leqslant M$. Здесь под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v), в силу отждествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [1].

В пространстве V' на $[0,T]$ рассматривается параболическая задача

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}. \tag{2}$$

В (2) заданы функция $t \to f(t) \in V'$, элемент $\overline{u}$ и функция $t \to p(t) \in \mathbb{R}^1$. Производные функций здесь и далее понимаются в обобщённом смысле.

В [2] доказана теорема о существовании слабого решения задачи (2).

Теорема 1. *Пусть в задаче (2) выполнены условия (1), функция* $f \in L_1(0,T;H)\bigcap L_2(0,T;V')$. *Пусть функция* $p(t)$ *абсолютно непрерывная, невозрастающая и принимает положительные значения на* $[0,T]$. *Пусть также* $\overline{u} \in D(A) = \{v \in V|\, Av \in H\}$. *Тогда задача (2) имеет единственное решение* $u(t)$, *такое что* $u \in L_2(0,T;V)\bigcap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T\Big(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt \leqslant C\Big\{\|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int\limits_0^T\|f(t)\|_H\,dt\Big)^2 + \int\limits_0^T\|f(t)\|_{V'}^2\,dt\Big\}.$$

Далее задача (2) решается приближённо методом Галёркина.

Пусть V_h — конечномерное подпространство пространства v. Здесь параметр $h > 0$. Отметим, что на V_h можно рассматривать нормы пространств V, H, V'. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup|(u_h,v_h)|$, где точная верхняя граница берётся по всем $v_h \in V_h$, таким что $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V_h'} \leqslant \|u_h\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на $V_h \subset H$. В [3] замечено, что оператор P_h допускает продолжение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ и справедлива оценка

$$\|\overline{P}_h u\|_{V_h'} \leqslant \|u\|_{V'}\ \ (u \in V'). \tag{3}$$

Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h, v)$, которое получается соответствующим предельным переходом [4].

Задаче (2) поставим в соответствие приближённую в V_h задачу. Определённую на $[0,T]$ функцию $t \to u_h(t) \in V_h$ назовём приближённым решением задачи (2), найденным полудискретным методом Галёркина, если

$$u_h'(t) + A_h u_h(t) = P_h f(t), \quad \int\limits_0^T p(t)u_h(t)\,dt = \overline{u}_h. \tag{4}$$

В (4) оператор $A_h = \overline{P}_h A : V_h \to V_h$, а элемент $\overline{u}_h \in V_h$ определим позже. Заметим, что задача (4) сводится к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным условием на решение. Разрешимость задачи (4) устанавливается, как и для задачи (2).

В данной работе всюду далее предполагается, что форма $a(u,v)$ является симметричной, то есть $a(u,v)=\overline{a(v,u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряжённому числу.

Отметим, что задача (2) с симметричным оператором при $p(t)\equiv 1$ была изучена в [5].

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА

Приведём необходимую в дальнейшем оценку решения уравнения в (4) из [4].

$$\max_{0\ \ t\ \ T}\ \ u_h(t)\ \ ^2_{V_h'}+\int\limits_0^T\Big(\ \ u_h(t)\ \ ^2_H+\ \ A_h^{-1}u_h'(t)\ \ ^2_H\Big)\,dt\qquad M\Big\{\ \ u_h(0)\ \ ^2_{V_h'}+\int\limits_0^T\ \ A_h^{-1}\overline{P}_hf(t)\ \ ^2_H\,dt\Big\}. \quad (5)$$

В (6) оператор A_h^{-1} определяется следующим образом. Из симметричности формы $a(u,v)$, оценки $a(u,v)\geqslant\alpha\ \ u\ \ ^2_V$ и соотношения $(A_hu_h,v_h)=a(u_h,v_h)$, где u_h, $v_h\in V_h$ следует самосопряжённость и положительная определённость оператора $A_h:V_h\to V_h$. В таком случае существует опрератор $A_h^{-1}:V_h\to V_h$. Заметим также, что существует самосопряжённый положительно определённый оператор $A_h^{\frac12}:V_h\to V_h$. Приведём необходимое далее утверждение из [4].

Лемма 1. *Для любых $u_h\in V_h$ выполняются оценки:*

$$\alpha\ \ u_h\ \ ^2_V\qquad A_h^{\frac12}u_h\ \ ^2_H\quad M\ \ u_h\ \ ^2_V, \quad (6)$$

$$\alpha\ \ A_h^{-\frac12}u_h\ \ ^2_H\qquad u_h\ \ ^2_{V_h'}\quad M\ \ A_h^{-\frac12}u_h\ \ ^2_H. \quad (7)$$

Определим теперь гильбертово пространство

$$V(A)=\{u,v\in V\,|\,(u,v)_{V(A)}=a(u,v)\}.$$

Из (1) для всех $u\in V$ следует оценка

$$\alpha^{\frac12}\ \ u\ \ _V\qquad u\ \ _{V(A)}\quad M^{\frac12}\ \ u\ \ _V, \quad (8)$$

которая означает эквивалентность норм в пространсвах V и $V(A)$. Через R_h обозначим ортогональный проектор в пространстве $V(A)$ на V_h. В таком случае, для любого $u\in V$ и любого $v_h\in V_h$ выполняется равенство

$$a(u,v_h)=a(R_hu,v_h). \quad (9)$$

Из (9) для любого $u\in V$ следует равенство $A_hR_hu=\overline{P}_hAu$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и форма $a(u,v)$ симметричная. Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (2), а $u_h(t)$ — решение задачи (4), такое что $\overline{u}_h=R_h\overline{u}$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\ \ t\ \ T}\ \ P_hu(t)-u_h(t)\ \ ^2_{V_h'}+\int\limits_0^T\Big(\ \ u(t)-u_h(t)\ \ ^2_H+\ \ A_h^{-1}[\overline{P}_hu'(t)-u_h'(t)]\ \ ^2_H\Big)\,dt$$

$$K\int\limits_0^T\ \ (I-R_h)u(t)\ \ ^2_H\,dt. \quad (10)$$

Доказательство. К уравнению (2) применим оператор $\overline{P}_h$, и из полученного равенства вычтем уравнение (4). Получим

$$[P_h u(t) - u_h(t)]' + A_h[P_h u(t) - u_h(t)] = \overline{P}_h A(P_h - I)u(t). \tag{11}$$

В (11) правая часть принадлежит пространству $L_2(0,T;V_h')$. Можно воспользоваться оценкой (5). Получим оценку

$$\max_{0 \quad t \quad T} \quad P_h u(t) - u_h(t) \quad ^2_{V_h'} + \int_0^T \quad P_h u(t) - u_h(t) \quad ^2_H + \int_0^T \quad A_h^{-1}[\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)] \quad ^2_H \Big) \, dt$$

$$K \Big\{ \quad P_h u(0) - u_h(0) \quad ^2_{V_h'} + \int_0^T \quad A_h^{-1} \overline{P}_h A(P_h - I)u(t) \quad ^2_H \, dt \Big\}. \tag{12}$$

Свойство (9) позволяет провести оценку

$$\int_0^T \quad A_h^{-1} \overline{P}_h A(P_h - I)u(t) \quad ^2_H \, dt = \int_0^T \quad A_h^{-1} \overline{P}_h A(P_h - R_h)u(t) \quad ^2_H \, dt =$$

$$\int_0^T \quad (P_h - R_h)u(t) \quad ^2_H \, dt \qquad \int_0^T \quad (I - R_h)u(t) \quad ^2_H \, dt.$$

Оценим теперь $\quad P_h u(0) - u_h(0) \quad ^2_{V_h'}$. Обозначим $z_h(t) = P_h u(t) - u_h(t)$. Тогда уравнение (11) примет вид

$$z_h'(t) + A_h z_h(t) = \overline{P}_h A(P_h - I)u(t). \tag{13}$$

Выпишем решение уравнения (13), взятое в точке T

$$z_h(T) = e^{-A_h T} z_h(0) + \int_0^T e^{-A_h(T-s)} \overline{P}_h A(P_h - I)u(s) \, ds. \tag{14}$$

Выразим теперь $z_h(0)$ через $z_h(T)$. Применим к уравнению (2) оператор $\overline{P}_h$. Учитывая отмеченное выше соотношение $\overline{P}_h A u(t) = A_h R_h u(t)$, получим равенство $\overline{P}_h u'(t) + A_h R_h u(t) = \overline{P}_h f(t)$. Вычитая из него уравнение (4), будем иметь

$$z_h'(t) + A_h(R_h u(t) - u_h(t)) = 0. \tag{15}$$

Равенство (15) умножим на $p(t)$ и проинтегрируем от 0 до T:

$$\int_0^T p(t) z_h'(t) \, dt = A_h R_h \int_0^T p(t) u(t) \, dt - A_h \int_0^T p(t) u_h(t) \, dt. \tag{16}$$

Из (2), (4), (16) и условия $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$ следует, что $\int_0^T p(t) z_h'(t) \, dt = 0$. Так как функции $p(t)$ и $z_h(t)$ абсолютно непрерывны, то получим равенство

$$0 = \int_0^T p(t) z_h'(t) \, dt = p(T) z_h(T) - p(0) z_h(0) - \int_0^T p'(t) z_h(t) \, dt,$$

из которого следует, что

$$z_h(0) = \frac{p(T)}{p(0)} z_h(T) - \frac{1}{p(0)} \int\limits_0^T p'(t) z_h(t)\, dt. \tag{17}$$

Теперь из (14) и (17) получаем

$$z_h(0) = \left[\frac{p(T)}{p(0)} e^{-A_h T} + \frac{1}{p(0)} \int\limits_0^T p'(t) e^{-A_h t}\, dt \right] z_h(0) + \frac{p(T)}{p(0)} \int\limits_0^T e^{-A_h(T-s)} \overline{P}_h A(P_h - I) u(s)\, ds -$$

$$\frac{1}{p(0)} \int\limits_0^T \Big(p'(t) \int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)} \overline{P}_h A(P_h - I) u(s)\, ds \Big)\, dt. \tag{18}$$

Рассмотрим в пространстве V_h оператор

$$B_h = I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-A_h T} + \frac{1}{p(0)} \int\limits_0^T p'(t) e^{-A_h t}\, dt.$$

Для оператора B_h существует обратный [2]

$$B_h^{-1} = \Big(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-A_h T} \Big)^{-1} \left[I + \frac{1}{p(0)} \Big(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-A_h T} \Big)^{-1} \int\limits_0^T p'(t) e^{-A_h t}\, dt \right]^{-1},$$

для которого справедлива оценка

$$B_h^{-1} \quad {}_{V_h \to V_h} \qquad \frac{1}{p(0)} \Big(\beta \int\limits_0^T p(t) e^{\beta t}\, dt \Big)^{-1} = M_1, \tag{19}$$

где пространство V_h берётся с нормой пространства H. В (19) $\beta = \alpha/\delta^2$, где константа $\alpha > 0$ из (1), а константа $\delta > 0$ такая, что для всех $v \in V$, в силу непрерывности вложения $V \subset H$, выполняется оценка $\ v \ {}_H \quad \delta \ v \ {}_V$.

Теперь из (18) получаем

$$P_h u(0) - u_h(0) = z_h(0) = B_h^{-1} \left[\frac{p(T)}{p(0)} \int\limits_0^T e^{-A_h(T-s)} \overline{P}_h A(P_h - I) u(s)\, ds - \right.$$

$$\left. \frac{1}{p(0)} \int\limits_0^T p'(t) \int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)} \overline{P}_h A(P_h - I) u(s)\, ds\, dt \right]. \tag{20}$$

Из (20) и (19) и (7) следует оценка

$$P_h u(0) - u_h(0) \ {}_{V_h'} \qquad M_1 M \Big\| A_h^{-\frac{1}{2}} \Big(\frac{p(T)}{p(0)} \int\limits_0^T e^{-A_h(T-s)} A_h(P_h - R_h) u(s)\, ds -$$

$$\frac{1}{p(0)} \int\limits_0^T p'(t) \int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)} A_h(P_h - R_h) u(s)\, ds\, dt \Big) \Big\|_H$$

$$M_1 M \;\; \frac{p(T)}{p(0)} \;\; \int\limits_0^T e^{-A_h(T-s)} A_h^{\frac{1}{2}} (P_h - R_h) u(s)\, ds \;\; {}_H +$$

$$\frac{1}{p(0)} \;\; \int\limits_0^T p'(t) \int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)} A_h^{\frac{1}{2}} (P_h - R_h) u(s)\, ds\, dt \;\; {}_H \;\; . \tag{21}$$

В (21) выражение $\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)} A_h^{\frac{1}{2}} (P_h - R_h) u(s)\, ds$ является решением уравнения

$$v_h'(t) + A_h v_h(t) = A_h^{\frac{1}{2}} (P_h - R_h) u(t)$$

с нулевым начальным условием.

Отметим, что для уравнения в (4) в [6] была получена оценка

$$\max_{0 \;\; t \;\; T} \;\; u_h(t) \;\; {}^2_H + \int\limits_0^T \;\; u_h(t) \;\; {}^2_V \, dt \qquad K \Big\{ \;\; u_h(0) \;\; {}^2_H + \int\limits_0^T \;\; P_h f(t) \;\; {}^2_{V_h'} \, dt \Big\}. \tag{22}$$

Для (21), с учётом (7) и (9), оценка (22) примет вид

$$\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)} A_h^{\frac{1}{2}} (P_h - R_h) u(s)\, ds \;\; {}^2_H \qquad K \int\limits_0^T \;\; A_h^{\frac{1}{2}} (P_h - R_h) u(t) \;\; {}^2_{V_h'} \, dt \qquad KM \int\limits_0^T \;\; (I - R_h) u(t) \;\; {}^2_H \, dt.$$

Тогда имеем

$$P_h u(0) - u_h(0) \;\; {}^2_{V_h'}$$

$$KM \;\; \frac{p(T)}{p(0)} \int\limits_0^T \;\; (I - R_h) u(t) \;\; {}^2_H \, dt + \frac{1}{p(0)} \int\limits_0^T |p'(t)|\, dt \int\limits_0^T \;\; (I - R_h) u(t) \;\; {}^2_H \;\; , dt$$

$$K \int\limits_0^T \;\; (I - R_h) u(t) \;\; {}^2_H \, dt.$$

В результате оценка (12) принимает вид

$$\max_{0 \;\; t \;\; T} \;\; P_h u(t) - u_h(t) \;\; {}^2_{V_h'} + \int\limits_0^T \;\; P_h u(t) - u_h(t) \;\; {}^2_H \, dt +$$

$$\int\limits_0^T \;\; A_h^{-1} [\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)] \;\; {}^2_H \, dt \qquad K \int\limits_0^T \;\; (I - R_h) u(t) \;\; {}^2_H \, dt. \tag{23}$$

Осталось заметить, что

$$\int\limits_0^T \;\; u(t) - u_h(t) \;\; {}^2_H \qquad 2 \int\limits_0^T (\;\; u(t) - P_h u(t) \;\; {}^2_H + \;\; P_h u(t) - u_h(t) \;\; {}^2_H)\, dt \qquad 3 \int\limits_0^T \;\; (I - R_h) u(t) \;\; dt \;\; {}^2_H .$$

Таким образом, получаем из (23) оценку (10).$\square$

Приведём условия, позволяющие из оценки (10) делать выводы о сходимости соответствующих норм погрешностей к нулю. Пусть задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в пространстве V, то есть $\;(I - Q_h)v\; _V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$, где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h. Заметим, что такая последовательность предельно плотна и в пространстве H [7].

Следствие 1. *Пусть $\{V_h\}$ — последовательность конечномерных подпространств, предельно плотная в пространстве V. Тогда, в условиях теоремы 2, при $h \to 0$*

$$\int_0^T \; u(t) - u_h(t)\; {}^2_H \, dt \to 0.$$

Доказательство. Утверждение следует из (10), непрерывного вложения $V \subset H$ и установленной в [8] для любого $v \in V$ оценки

$$(I - R_h)v\; _V \quad M\alpha^{-1}\; (I - Q_h)v\; _V. \tag{24}$$

Далее покажем, что оценка (10) позволяет установить и скорость сходимости.

Пусть существует гильбертово пространство E, такое что $D(A) \subset E \subset V$ и выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$v\; _E \quad d\; Av\; _H \quad (v \in E), \tag{25}$$

где $d > 0$. Например, если параболическое уравнение в области Ω определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то рассматриваем пространства: $H = L_2(\Omega)$, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1\;(\Omega)$, $V' = W_2^{-1}(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1$ (Ω). Если же же на границе области Ω задаётся условие Неймана, то пространства следующие: $H = L_2(\Omega),\ V = W_2^1(\Omega),\ E = W_2^2(\Omega)$ [9].

Пусть подпространства V_h обладают следующим аппроксимационным свойством

$$(I - Q_h)v\; _V \quad r_1 h\; v\; _E \quad (v \in E), \tag{26}$$

типичным для подпространств типа конечных элементов (см., например, [10]). В [11] показано, что из (26) следует оценка

$$(I - R_h)v\; _H \quad r_1 h\; (I - Q_h)v\; _V \quad (v \in V). \tag{27}$$

Следствие 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 2, условия (25) и (26). Тогда*

$$\int_0^T \; u(t) - u_h(t)\; {}^2_H \, dt \quad Kh^2 \int_0^T \; u(t)\; {}^2_V \, dt. \tag{28}$$

Если же решение $u(t)$ задачи (2) более гладкое, а именно $u \in L_2(0, T; E)$, то оценка следующая

$$\int_0^T \; u(t) - u_h(t)\; {}^2_H \, dt \quad Kh^4 \int_0^T \; u(t)\; {}^2_E \, dt. \tag{29}$$

Доказательство. Оценка (28) следует из (10), (24) и (27). А оценка (29) получается из (10), (18), (24) и (26). □

ОБОБЩЁННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Вновь рассмотрим задачу (2). Установим для этой задачи, так называемую, обобщённую разрешимость. Будем оператор A, порождённый формой $a(u,v)$, рассматривать как оператор в пространстве H. Тогда оператор $A : D(A) \subset H \to H$ является самосопряжённым и положительно определённым. Кроме того, для самосопряжённого и положительно опеределённого оператора $A^{\frac{1}{2}}$ область определения $D(A^{\frac{1}{2}}) = V$ и $\ v\ _{V(A)} = \ A^{\frac{1}{2}}v\ _H$ (см., например, [12], [13]).

В H оператор A определяет аналитическую полугруппу e^{-At} [14]. Кроме того, если элемент $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}}) = V$ и функция $f \in L_2(0,T;H)$, то функция

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int\limits_0^t e^{-A(t-s)} f(s)\,ds \tag{30}$$

является в пространстве H решением задачи Коши

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0. \tag{31}$$

Заметим (см., например, [15], [16]), что для такого решения $u(t)$, которое называется обобщённым, выполняется следующая гладкость: $u \in C([0,T],V)$ и u', $Au \in L_2(0,T;H)$. Кроме того, справедлива оценка

$$\max_{0\ t\ T} \ u(t)\ ^2_V + \int\limits_0^T \Big(\ u'(t)\ ^2_V + \ Au(t)\ ^2_H \Big)\,dt \quad K\Big\{ \ u_0\ ^2_V + \int\limits_0^T \ f(t)\ ^2_H\,dt \Big\}. \tag{32}$$

Вернёмся к задаче (2). Укажем достаточные условия на элемент $\overline{u}$ и функцию $f(t)$ для того чтобы эта задача имела обобщённое решение.

Теорема 3. *Пусть форма $a(u,v)$ симметрична и удовлетворяет условиям (1). Пусть в (2) элемент $\overline{u} \in V$, такой что $A\overline{u} \in V$. Пусть также функция $f \in L_1(0,T;V) \bigcap L_2(0,T;H)$. Тоггда задача (2) имеет единственное решение $u(t)$, такое что $u \in C([0,T],V)$, а функции u', $Au \in L_2(0,T;H)$. Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0\ t\ T} \ u(t)\ ^2_V + \int\limits_0^T \Big(\ u'(t)\ ^2_H + \ Au(t)\ ^2_H \Big)\,dt$$

$$K\Big\{ \ A\overline{u}\ ^2_V + \Big(\int\limits_0^T \ f(t)\ _V\,dt \Big)^2 + \int\limits_0^T \ f(t)\ ^2_H\,dt \Big\}. \tag{33}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в сделанных предположениях задача (2) имеет единственное слабое решение. Следовательно, более гладкое обобщённое решение, если оно существует, будет также единственным.

Теперь рассмотрим оператор $B : V \to V$, определённый равенством

$$B = p(0) \quad \Big(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-AT} \Big) + \frac{1}{p(0)} \int\limits_0^T p'(t) e^{-At}\,dt \quad . \tag{34}$$

Покажем обратимость этого оператора.

Для $v \in V$ получаем

$$\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}v \quad {}_{V(A)} = \quad A^{\frac{1}{2}}\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}v \quad {}_{H} \qquad \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\beta T} \quad A^{\frac{1}{2}}v \quad {}_{H} = \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\beta T} \quad v \quad {}_{V(A)},$$

где β — константа, определённая в (19). Так как функция $p(t)$ невозрастающая, то существует оператор $\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1} : V \to V$ и

$$\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1} \quad {}_{V(A)\to V(A)} \qquad \frac{p(0)}{p(0) - p(T)e^{-\beta T}}. \tag{35}$$

Теперь оператор B можем представить в виде

$$B = p(0)\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)\left(I + \frac{1}{p(0)}\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\right). \tag{36}$$

Произведём следующую оценку. Для произвольного $v \in V$ имеем

$$\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}v\,dt \quad {}_{V(A)} = \quad A^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}v\,dt \quad {}_{H} \qquad \int\limits_0^T \quad p'(t)e^{-At}A^{\frac{1}{2}}v \quad {}_{H}\,dt$$

$$\int\limits_0^T |p'(t)|e^{-\beta t} \quad A^{\frac{1}{2}}v \quad {}_{H}\,dt = \left(p(0) - p(T)e^{-\beta T} - \beta\int\limits_0^T p(t)e^{-\beta t}\,dt\right) \quad A^{\frac{1}{2}}v \quad {}_{H} =$$

$$\left(p(0) - p(T)e^{-\beta T} - \beta\int\limits_0^T p(t)e^{-\beta t}\,dt\right) \quad v \quad {}_{V(A)} \tag{37}$$

Из (35), (36) следует оценка

$$\frac{1}{p(0)}\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt \quad {}_{V(A)\to V(A)} \qquad 1 - \frac{\beta}{p(0) - p(T)e^{-\beta t}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\beta t}\,dt < 1. \tag{38}$$

Таким образом, из (36) и (38) следует обратимость оператора B в пространстве V,

$$B^{-1} = \frac{1}{p(0)} \quad I + \frac{1}{p(0)}\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt \quad {}^{-1}\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}. \tag{39}$$

А из (35) и (38) получаем оценку

$$B^{-1} \quad {}_{V(A)\to V(A)} \qquad \frac{1}{p(0)}\cdot\frac{p(0)}{p(0) - p(T)e^{-\beta t}}\cdot\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\beta}{p(0) - p(T)e^{-\beta t}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\beta t}\,dt\right)} =$$

$$\beta\int\limits_0^T p(t)e^{-\beta t}\,dt \quad {}^{-1} = M_2. \tag{40}$$

Рассмотрим теперь элемент

$$u_0 = B^{-1} \quad A\overline{u} + \int\limits_0^T \Big(p(T)e^{-A(T-s)} - p(s)I - \int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big) f(s)\,ds \quad . \tag{41}$$

Заметим, что в силу условий теоремы, элемент $u_0 \in V$. Тогда функция $u(t)$, построенная по формуле (30), будет обобщённым решением задачи (31). Покажем, что для этой функции выполняется интегральное условие в (2).

Домножим правую часть (30) на $p(t)$ и проинтегрируем полученное выражение от 0 до T. Рассмотрим сначала первое слагаемое. С учётом (34) получим

$$\int\limits_0^T p(t)e^{-At}u_0\,dt = \Big(p(0)A^{-1} - p(T)A^{-1}e^{-AT} + \int\limits_0^T p'(t)A^{-1}e^{-At}\,dt\Big)u_0 =$$

$$p(0)A^{-1}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT} + \frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\Big)u_0 = A^{-1}Bu_0.$$

Подставим теперь вместо u_0 его представление (41)

$$\int\limits_0^T p(t)e^{-At}u_0\,dt = \overline{u} + A^{-1}\int\limits_0^T \Big(p(T)e^{-A(T-s)} - p(s)I - \int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big) f(s)\,ds. \tag{42}$$

Теперь преобразуем второе слагаемое

$$\int\limits_0^T p(t)\int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds\,dt = \int\limits_0^T \Big(\int\limits_s^T p(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big) f(s)\,ds =$$

$$A^{-1}\int\limits_0^T \Big(p(s)I - p(T)e^{-A(T-s)} + \int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big) f(s)\,ds. \tag{43}$$

Сложив равенства (42) и (43), получим, что для построенного по формулам (30) и (41) обобщённого решения выполняется интегральное условие $\int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}$.

Заметим, что для полученного обобщённого решения выполняется оценка (32). Таким образом, для получения оценки (33) следует оценить u_0 из (41). Из (40) следует, что

$$u_0 \;{}^2_V \quad 2M_2 \quad A\overline{u} \;{}^2_V + \quad \int\limits_0^T \Big(p(T)e^{-A(T-s)} - p(s)I - \int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big) f(s)\,ds \;{}^2_V \quad . \tag{44}$$

Используя (8), получим следующую оценку для любых $t \in [0, T]$ и для произвольного $v \in V$

$$e^{-At}v \;{}_V \quad \alpha^{-\frac{1}{2}} \; e^{-At}v \;{}_{V(A)} = \alpha^{-\frac{1}{2}} \; A^{\frac{1}{2}}e^{-At}v \;{}_H = \alpha^{-\frac{1}{2}} \; e^{-At}A^{\frac{1}{2}}v \;{}_H$$

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta t} \; A^{\frac{1}{2}}v \;{}_H = \alpha^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta t} \; v \;{}_{V(A)} \quad \alpha^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}} \; v \;{}_V. \tag{45}$$

Теперь из (44) и (45) следует оценка

$$\|u_0\|_V^2 \leqslant K\left\{\|A\overline{u}\|_V^2 + \Big(\int\limits_0^T \|f(t)\|_V\,dt\Big)^2\right\},$$

подставляя которую в (32), получим (33). □

СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА

Пусть для задачи (2) выпоняются условия теоремы 3, которые гарантируют существование обобщённого решения этой задачи. Вновь рассмотрим задачу (4). Отметим, что для неё оценка (33) примет вид

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_h(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T\Big(\|u_h'(t)\|_H^2 + \|A_h u_h(t)\|_H^2\Big)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant K\left\{\|A_h\overline{u}_h\|_V^2 + \left(\int\limits_0^T \|P_h f(t)\|_V\,dt\right)^2 + \int\limits_0^T \|P_h f(t)\|_H^2\,dt\right\}. \tag{46}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Пусть $u(t)$ — обобщённое решение задачи (2) с дополнительной гладкостью $u' \in L_2(0,T;V)$. Пусть $u_h(t)$ — решение задачи (4), такое что $\overline{u}_h = R_h\overline{u}$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|R_h u(t) - u_h(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T\Big(\|u'(t) - u_h'(t)\|_H^2 + \|\overline{P}_h A[u(t) - u_h(t)]\|_H^2\Big)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant K\left\{\left(\int\limits_0^T \|(R_h - P_h)u'(t)\|_V\,dt\right)^2 + \int\limits_0^T \|(R_h - I)u'(t)\|_H^2\,dt\right\}. \tag{47}$$

Доказательство. Применим к обеим частям уравнения в (2) оператор $\overline{P}_h$. С учётом (9) и условий теоремы, будем иметь

$$P_h u'(t) + A_h R_h u(t) = P_h f(t).$$

Вычтем из полученного равенства равенство в (4), получим соотношение

$$(R_h u(t) - u_h(t))' + A_h(R_h u(t) - u_h(t)) = (R_h - P_h)u'(t). \tag{48}$$

Заметим, что $\int\limits_0^T p(t)(R_h u(t) - u_h(t))\,dt = 0$. Тогда из (46) и (48) следует оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|R_h u(t) - u_h(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T\Big(\|R_h u'(t) - u_h'(t)\|_H^2 + \|A_h(R_h u(t) - u_h(t))\|_H^2\Big)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant K\left\{\left(\int\limits_0^T \|(P_h - R_h)u'(t)\|_V\,dt\right)^2 + \int\limits_0^T \|(P_h - R_h)u'(t)\|_H^2\,dt\right\}. \tag{49}$$

Из (49), с учётом (9), легко получается (47). □

Следствие 3. *Пусть $\{V_h\}$ — предельно плотная в пространстве V последовательность конечномерных подпространств, такая что $\ P_h\ _{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Тогда в условиях теоремы 4, при $h \to 0$*

$$\max_{0\ \ t\ \ T}\ \ u(t)-u_h(t)\ \ ^2_V + \int_0^T\ \ u'(t)-u_h'(t)\ \ ^2_H\, dt \to 0.$$

Доказательство. Следует из (24), (47) и непрерывного вложения $V \subset H$. □

Укажем класс подпространств $\{V_h\}$ типа конечных элементов, для которых $\ P_h\ _{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Предположим, что подпространства $\{V_h\}$ удовлетворяют условию (26). Предположим также, что

$$v_h\ _V\quad r_2 h^{-1}\ \ v_h\ _H\quad (v_h \in V_h). \tag{50}$$

В методе конечных элементов условие (50) означает [17] равномерное разбиение области пространственных переменных.

Из (26) и (50) следует оценка $\ P_h\ _{V\to V}\quad r_1 r_2 + 1$ [18].

Следствие 4. *Пусть V_h — конечномерное подпространство пространства V, удовлетворяющее условиям (26) и (50). Пусть выполнены условия теоремы 4. Пусть $u(t)$ — решение задачи (2) с дополнительной гладкостью $u' \in L_1(0,T;E)$, а $u_h(t)$ — решение задачи (4). Тогда выполняются следующие оценки погрешностей*

$$\max_{0\ \ t\ \ T}\ \ u(t)-u_h(t)\ \ ^2_V\quad Kh^2\ \ \max_{0\ \ t\ \ T}\ \ u(t)\ \ ^2_E + \ \ \int_0^T\ \ u'(t)\ \ _E\, dt\ \ ^2 + \int_0^T\ \ u'(t)\ \ ^2_V\, dt\ \ . \tag{51}$$

$$\int_0^T\ \ u'(t)-u_h'(t)\ \ ^2_H\, dt\quad Kh^2\ \ \ \int_0^T\ \ u'(t)\ \ _E\, dt\ \ ^2 + \int_0^T\ \ u'(t)\ \ ^2_V\, dt\ \ . \tag{52}$$

Доказательство. Из (47) следует оценка

$$\max_{0\ \ t\ \ T}\ \ u(t)-u_h(t)\ \ ^2_V\quad 2\ \max_{0\ \ t\ \ T}\ \ (R_h-I)u(t)\ \ ^2_V +$$

$$K\ \ \ \int_0^T\ \ (R_h-P_h)u'(t)\ \ _V\, dt\ \ ^2 + \int_0^T\ \ (R_h-I)u'(t)\ \ ^2_H\, dt\ \ \ . \tag{53}$$

Используя (24) и (26), получим

$$\max_{0\ \ t\ \ T}\ \ (R_h-I)u(t)\ \ ^2_V\quad M^2\alpha^{-2}r_1^2h^2\ \ u(t)\ \ ^2_E \tag{54}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (53). Воспользуемся оценками (50), (27) и (26). Будем иметь

$$\int_0^T\ \ (R_h-P_h)u'(t)\ \ _V\, dt\ \ ^2\quad\ \ r_2h^{-1}\int_0^T\ \ (R_h-P_h)u'(t)\ \ _H\, dt\ \ ^2$$

$$r_2h^{-1}\int_0^T\ \ (R_h-I)u'(t)\ \ _H\, dt\ \ ^2\quad\ \ r_1^4r_2^2h^2\ \ \ \int_0^T\ \ u'(t)\ \ _E\, dt\ \ ^2. \tag{55}$$

Осталось получить оценку для третьего слагаемого в (53). Из (24) и (26) получаем, что

$$\int\limits_0^T \;\; (R_h - I)u'(t) \;\; {}^2_H \, dt \qquad 4r_1^2 h^2 \int\limits_0^T \;\; u(t) \;\; {}^2_V \, dt. \tag{56}$$

Теперь оценка (51) следует из (53), (54), (55) и (46).

Оценка (52) получается аналогично оценке (51). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

2. Петрова, А. А. Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием / А. А. Петрова, В. В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 160–169.

3. Вайникко, Г. М. О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269–1277.

4. Смагин, В. В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, № 3. — С. 143–160.

5. Нгуен, Тыонг Хуен Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с симметричным оператором и интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен, В. В. Смагин // Спектральные и эволюционные задачи. — 2011. — Т. 21, № 2. — С. 65–74.

6. Смагин, В. В. Оценки погрешности проекционного метода для параболических уравнений с несимметричными операторами / В. В. Смагин // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 1997. — № 2. — С. 63–67.

7. Смагин, В. В. Сходимость проекционно-разностного метода для квазилинейных параболических уравнений / В. В. Смагин, Д. С. Сотников // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2006. — № 1. — С. 193–198.

8. Васильева, Т. Е. Сходимость проекционного метода для уравнений с несимметричной главной частью / Т. Е. Васильева, В. В. Смагин // Сборник трудов молодых учёных матем. ф-та Воронежского гос. ун-та. — Воронеж, 2001. — С. 38–42.

9. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

10. Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

11. Смагин, В. В. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений / В. В. Смагин // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. — 2000. — Т. 40, № 6. — С. 908–919.

12. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.

13. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. – 624 с.

14. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

15. Ладыженская, О. А. О решении нестационарных операторных уравнений / О. А. Ладыжская // Математ. сборник. — 1956. — Т. 39 (4). — С. 491–524.

16. Соболевский, П. Е. Обобщённые решения дифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве / П. Е. Соболевский // ДАН СССР. — 1958. — Т. 122, № 6. — С. 994–996.

17. Оганесян, Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец. — Ереван, 1979. — 236 с.

18. Смагин, В. В. Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений / В. В. Смагин // Матем. сборник. — 1994. — Т. 185, № 11. — С. 79–94.

REFERENCES

1. Aubin J.-P. An approximate solution of elliptic boundary problems. [Obe'n Zh.-P. Priblizhennoe reshenie e'llipticheskikh kraevykh zadach]. Moscow: Mir, 1997, 384 p.

2. Petrova A. A., Smagin V. V. Solvability of the variational problem of parabolic type with a weighted integral condition. [Petrova A. A., Smagin V. V. Razreshimost' variacionnoj zadachi parabolicheskogo tipa s vesovym integral'nym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 160–169.

3. Vainikko G. M., Oya P. E. About convergence and rate of convergence of Galerkin's method for abstract evolution equations. [Vajnikko G. M., Oya P. E. O skhodimosti i bystrote skhodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnykh e'volyucionnykh uravnenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1975, vol. 11, no. 7, pp. 1269–1277.

4. Smagin V.V. Estimations of rate of convergence of projection and projection-difference methods for weakly soluble parabolic equations. [Ocenki skorosti skhodimosti proekcionnogo i proekcionno-raznostnogo metodov dlya slabo razreshimykh parabolicheskikh uravnenij]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 3, pp. 143–160.

5. Nguen Thoung Huyen, Smagin V. V. The convergence of Galerkin's method of approximate solution of parabolic equation with symmetrical operator and integral condition on solution. [Nguen Tyong Huen, Smagin V. V. Skhodimost' metoda Galerkina priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s simmetrichnym operatorom i integral'nym usloviem na reshenie]. *Spektral'nye i e'volyucionnye zadachi — The spectral and evolution problems*, 2011, vol. 21, no. 2, pp. 65–74.

6. Smagin V. V. Error estimations of projection method for parabolic equations with nonsymmetric operators. [Smagin V. V. Ocenki pogreshnosti proekcionnogo metoda dlya parabolicheskikh uravnenij s nesimmetrichnym operatorom]. *Trudy matematicheskogo facul'teta. Voronezhskij gosudarstvennyj universitet — Proceedings of mathematic faculty. Voronezh state university*, 1997, no. 2, pp. 63–67.

7. Smagin V. V., Sotnikov D. S. The convergence of projection-difference method for quasilinear parabolic equations. [Smagin V. V., Sotnikov D. S. Skhodimost' proekcionno-raznostnogo metoda dlya kvazilinejnykh parabolicheskikh uravnenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2006, no. 1, pp. 193–198.

8. Vasilieva T. E., Smagin V. V. Convergence of projection method for equations with nonsymmetric main part. [Vasil'eva T. E., Smagin V. V. Skhodimost' proekcionnogo metoda dlya uravnenij s nesimmetrichnoj glavnoj chast'yu]. *Sbornik trudov molodykh uchenykh matematicheskogo facul'teta Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta — Collection of proceedings of young scientists of mathematic faculty of Voronezh State University*, 2001, pp. 38–42.

9. Lions J.-L., Magencs E. Inhomogeneous boundary value problems and their applications. [Lions Zh.-L., Madzhenes E. Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya]. Moscow: Mir, 1971, 372 p.

10. Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Introduction to projection-net-point methods. [Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Vvedenie v proekcionno-setochnye metody]. Moscow: Nauka, 1981, 416 p.

11. Smagin V. V. Mean square estimates of errors of projection-difference method for parabolic equations. [Smagin V. V. Srednekvadratichnye ocenki pogreshnosti proekcionno-raznostnogo metoda dlya parabolicheskikh uravnenij]. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki.

12. Berezansky Yu.M. Expansion by proper functions of self-adjoint operators. [Berezanskij Yu.M. Razlozhenie po sobstvennym funkciyam samosopryazhennykh operatorov]. Kiev: Naukova dumka, 1965, 800 p.

13. Iosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

14. Crane S. G. The liner differential equation in banach space. [Krejn S. G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

15. Ladyzhenskaya O. A. About resolve of nonstationary operator equations. [Ladyzhenskaya O. A. O reshenii nestacionarnykh operatornykh uravnenij]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1956, vol. 39 (4), pp. 491–524.

16. Sobolevsky P. E. General solutions of differential first-order equations in Hilbert space. [Sobolevskij P. E. Obobshchyonnye resheniya diffenencial'nykh uravnenij pervogo poryadka v gil'bertovom prostranstve]. *DAN SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1958, vol. 122, no. 6, pp. 994–996.

17. Oganesyan L. A., Rukhovets L. A. Variational-difference methods of solution of elliptical equations. [Oganesyan L. A., Rukhovets L. A. Variacionno-raznostnye metody resheniya e'llipticheskikh uravnenij]. Yerevan, 1979, 236 p.

18. Smagin V. V. The coercive estimations of errors of projection and projection-difference methods for parabolic equations. [Smagin V. V. Koe'rcetivnye ocenki pogreshnostej proekcionnogo i proekcionno-raznosthogo metodov dlya parabolicheskikh uravhehij]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1994, vol. 185, no. 11, pp. 79–94.

Петрова Анастасия Александровна, магистрант кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: rezolwenta@mail.ru
Тел.: 8–920–453–17–72

Petrova Anastasiya Alexandrovna, undergraduate at Voronezh State University, Department of functional analysis and operation equations, Voronezh, Russia
E-mail: rezolwenta@mail.ru
Tel.: 8–920–453–17–72