

УРАВНЕНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОГО ПРОДОЛЬНО ВОЛОКНИСТОГО, ПОПЕРЕЧНО СЛОИСТОГО И СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО СТЕРЖНЯ

А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, И. А. Тарасюк

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 10.12.2014 г.

Аннотация. В настоящей статье выполнено обобщение вывода уравнения крутильных колебаний круглого однородного стержня (см., например, учебник Арамоновича И. Г. и Левина В. И.). В настоящей статье показано, что формально известное уравнение для линейно деформируемого однородного материала стержня применимо к стержню произвольной длины. При этом длина стержня появляется в решении только при задании конкретных начального и краевых условий. Получены уравнения крутильных колебаний для композиционных стержней, установлена зависимость частоты собственных колебаний стержня от концентрации компонент в смеси. Установлено, что вычисление эффективных характеристик стержня в соответствии с гипотезой Фойгта соответствует решению задачи усреднения для волокнистого (либо coaxially слоистого) вдоль оси стержня материала. Применение гипотезы Рейсса соответствует кручению поперечно слоистого цилиндрического стержня, а применение методики Кравчука-Тарасюка для сужения «вилки» Рейсса-Фойгта соответствует получению наилучшего приближения эффективных свойств структурно неоднородного композиционного материала стержня.

Ключевые слова: уравнения крутильных колебаний круглого стержня, собственные частоты, гипотеза Фойгта, гипотеза Рейсса, эффективные свойства структурно неоднородных композиционных материалов.

EQUATION FOR THE TORSIONAL OSCILATIONS OF A CIRCULAR LONGITUDINAL FIBROUS, CROSS LAYERED AND STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS COMPOSITE ROD

A. S. Kravchuk, A. I. Kravchuk, I. A. Tarasyuk

Abstract. In this article the generalization of output equation of torsional vibrations round homogeneous rod. (See, for example, the textbook Aramonovicha I. G. and Levin V. I.). In this paper it was shown that known equation for homogeneous linearly deformable material of rod can be formally applied to the rod of arbitrary length. The length of the rod appears in the solution only when the investigator sets specific initial and boundary conditions. The equations for torsional oscillations of composite rods was derived, the dependence of the Eigen frequency of oscillations of a rod depends on the concentration of the components in composite materials. It was found that the calculation of effective characteristics of the rod in accordance with the Voigt averaging hypothesis corresponds to solving the problem of fiber material collinear axis of the rod, either coaxially laminate rod. Application of Reiss hypothesis corresponds torsion of cross layered cylindrical rod, and the application of the Kravchuk-Tarasyuk methods of constriction of the «range» Reuss-Voigt corresponds to obtain the best approximation of the effective properties of structurally inhomogeneous composite rod.

Keywords: equation torsional oscillations of the round rod, Eigen frequencies, Voigt hypothesis, Reuss hypothesis, the effective properties of structurally inhomogeneous composites.

ВВЕДЕНИЕ

Вывод уравнения колебания круглого однородного упругого стержня — один из классических примеров получения нестационарных уравнений математической физики [1]. Однако накопленный материал по уравнениям состояния твердого тела, в том числе при сдвиге [2], [3], а также необходимость обобщения вывода данного уравнения на случай структурно неоднородных композиционных стержней заставляют вернуться к классическому уравнению с целью его обобщения и разработки методики решения указанного класса задач.

В статье рассматриваются все наиболее часто встречающиеся в литературе варианты уравнения состояния при кручении. Полученные решения позволяют инженерам как применять непосредственно на практике уже полученные в этой статье результаты, так и решать с помощью предложенной методики более общие задачи.

ОБОБЩЕНИЕ СТАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КРУЧЕНИЯ ОДНОРОДНОГО КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ

При выводе уравнения крутильных колебаний вала (круглого цилиндрического стержня) будем использовать основные положения, лежащие в основе теории кручения круглых стержней из теории сопротивления материалов [1].

Будем предполагать, что поперечные круговые сечения стержня при кручении остаются плоскими и сохраняют между собой первоначальное расстояние, радиусы, проведенные в этих сечениях, не искривляются. Таким образом, кручение круглого вала можно представить как результат сдвигов, вызванных поворотом поперечных сечений друг относительно друга, причем все повороты совершаются вокруг оси вала. Вследствие этого в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения, действующие в плоскости сечения, а нормальные напряжения равны нулю. Так как касательные напряжения симметричны относительно центра поперечного сечения, то они приводятся к паре сил, момент которой называется крутящим моментом [1].

Поскольку рассматриваются только относительные повороты сечений, любое из них можно принять за неподвижное. Будем считать, что неподвижен левый конец круглого стержня. Будем считать для определенности, что длина стержня равна ℓ , а радиус сечения R . Поместим начало координат в центр неподвижного левого сечения и направим ось $0x$ по оси стержня. В результате закручивания стержня поперечное сечение S_1 , взятое на расстоянии x_1 ($x_1 < \ell$) от заделки повернется на угол θ , а сечение S_2 , взятое на расстоянии x_2 ($x_2 < \ell$) повернется на угол $\theta + d\theta$. Таким образом, поворот сечения S_2 относительно S_1 составляет $d\theta$ (Рисунок 1).

Рассмотрим произвольный элемент dS сечения S_1 расположенный на расстоянии r от центра сечения O_1 . Определим величину напряжения τ , вызванного сдвигом элементарного волокна K_1K_2 в положение K_1L_2 (Рисунок 1). В силу того, что угловой мерой угла сдвига волокна $\varepsilon_{x\theta}$ будет являться приращение $d\theta$ угла θ , можно записать, предполагая, что в силу малости сдвига $\operatorname{tg}(\varepsilon_{x\theta}) \approx \varepsilon_{x\theta}$ и малости расстояния $(x_2 - x_1) \approx dx$:

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{r \cdot d\theta}{dx}. \quad (1)$$

Вначале будем рассматривать обобщенное уравнение состояния при чистом сдвиге в виде [3]:

$$\sigma_{x\theta} = \Im(\varepsilon_{x\theta}), \quad (2)$$

где $\Im()$ — произвольная нелинейная монотонно возрастающая функция. Усилие, приходящееся на площадку dS , выразится произведением:

$$\sigma_{x\theta} \cdot dS = \Im\left(\frac{r \cdot d\theta}{dx}\right) \cdot dS.$$

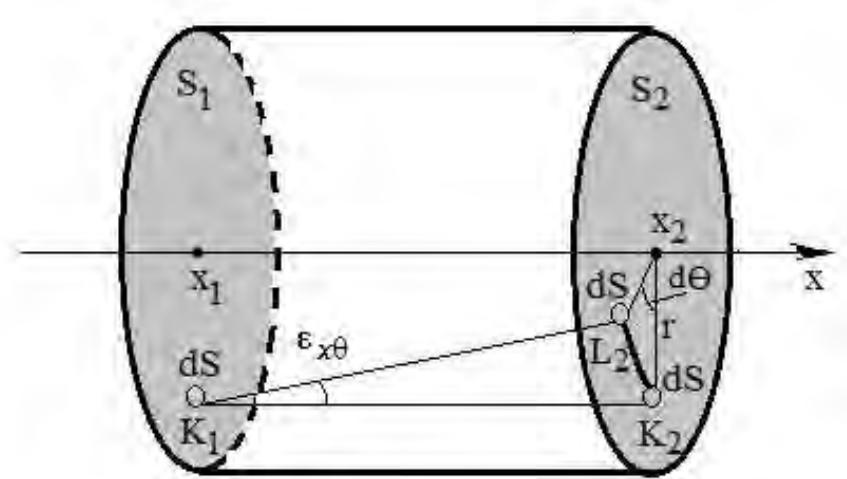


Рис. 1. Перемещение волокна площадью поперечного сечения dS на угол $d\theta$ при кручении сечения S_2 относительно сечения S_1 .

Тогда момент, развиваемый этим усилием, будет направлен перпендикулярно радиусу r и равен:

$$dM = r \cdot \sigma_{x\theta} \cdot dS = r \cdot \Im\left(\frac{r \cdot d\theta}{dx}\right) dS. \quad (3)$$

Очевидно, что величину главного момента M , приложенного к валу, можно найти интегрированием (3) по площади поперечного сечения S_2 :

$$M = \iint_{S_2} r \cdot \Im\left(\frac{r \cdot d\theta}{dx}\right) dS. \quad (4)$$

Из уравнения (4) очевидно, что при решении задач с учетом нелинейного характера деформирования стержня в общем случае нелинейности невозможно выделить полярный момент инерции сечения стержня [1].

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

Перейдем к выводу дифференциального уравнения крутильных колебаний однородного вала (стержня постоянного круглого сечения), продолжая рассматривать его часть, заключенную между сечениями S_1 и S_2 . В данном случае $\theta = \theta(x, t)$ является углом поворота сечения.

Будем использовать второй закон Ньютона, примененный к вращательному движению, по которому произведение момента инерции тела относительно оси на угловое ускорение равно моменту внешних сил относительно оси вращения [1].

Пусть момент $M(x_2)$, действует в сечении S_2 , а момент $M(x_1)$ в сечении S_1 . Исходя из уравнения (4) можно записать, что приращение момента ΔM при переходе от точки x_1 к x_2

определяется формулой:

$$\begin{aligned}
 \Delta M = & \int_{S_2} r \cdot \Im \left(\frac{\partial \theta(x_2, t)}{\partial x} \right) dS - \int_{S_1} r \cdot \Im \left(\frac{\partial \theta(x_1, t)}{\partial x} \right) dS = \\
 & = \int_{S_2} r \cdot \left(\Im \left(\frac{\partial \theta(x_2, t)}{\partial x} \right) - \Im \left(\frac{\partial \theta(x_1, t)}{\partial x} \right) \right) dS = \\
 & = \int_{S_2} \int_{x_1}^{x_2} r \cdot d\Im \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS = \int_{S_2} \int_{x_1}^{x_2} \Im' \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) \frac{r \cdot \partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} dx dS. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования в (5), окончательно получаем:

$$\Delta M = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{S_2} r^2 \cdot \Im' \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS \right) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} dx. \quad (6)$$

где $\Im'(\varepsilon) = \frac{d\Im(\varepsilon)}{d\varepsilon}$.

Пусть суммарное перемещение правого конца волокна K_2 относительно крайнего левого закрепленного конца стержня равно длине дуги $r \cdot \theta$. Тогда касательное ускорение площадки dS при движении по окружности радиуса будет r равно $r \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$. Соответственно инерционная составляющая момента фрагмента волокна длиной dx , находящегося на расстоянии r от оси и имеющего площадь поперечного сечения dS определяется формулой:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\rho \cdot r \cdot \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \right) dx \cdot r dS, \quad (7)$$

где ρ – плотность волокна с поперечным сечением dS однородного стержня. Отметим, что (7) исправляет стандартный вывод уравнения крутильных колебаний [1].

Интегрируя (7) по S_2 , переставляя порядки интегрирования и приравнивая с (6) получаем уравнение баланса моментов в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{S_2} \rho \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \cdot r^2 dS \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{S_2} r^2 \cdot \Im' \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS \right) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} dx. \quad (8)$$

Уравнение (8) можно переписать в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{S_2} \rho \cdot r^2 dS \cdot \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} - \left(\int_{S_2} r^2 \cdot \Im' \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS \right) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) dx = 0. \quad (9)$$

Если ввести обозначение [1], [4] $J_0 = \int_{S_2} r^2 dS = \int_0^{2\pi} r^3 dr d\varphi = \pi R^4 / 2$ и считать, что в (9) участок стержня (x_1, x_2) настолько мал по сравнению с длинной волны, что выполнена

формула Лагранжа [4]:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \left(\rho \cdot J_0 \cdot \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} - \left(\int_{S_2} r^2 \cdot \Im' \left(\frac{r \cdot \partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS \right) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) dx \approx \\ & \approx \left. \left(\rho \cdot J_0 \cdot \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} - \left(\int_{S_2} r^2 \cdot \Im' \left(\frac{r \cdot \partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS \right) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=x_0} \cdot (x_2 - x_1), \quad (10) \end{aligned}$$

где $x_0 \in (x_1, x_2)$ – некоторая точка, то из (10) с очевидностью будет следовать локальное уравнение крутых колебаний стержня:

$$\rho \cdot J_0 \cdot \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \left(\int_{S_2} r^2 \cdot \Im' \left(\frac{r \cdot \partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS \right) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Отметим, что в случае, когда $\Im'(\varepsilon)$ представляет собой константу, т.е. $\Im'(\varepsilon) = G$. Например, в случае линейного однородного материала, сложный коэффициент приобретает общизвестный вид [1]:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}. \quad (12)$$

где $a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. При этом в соответствии с выводом этого уравнения (5)–(10) гипотеза о единичной длине стержня нигде не использовалась.

ЗАМЕЧАНИЕ О НАЧАЛЬНОМ И КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ПРИ СВОБОДНЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ

В качестве примера влияния начальных и краевых условий на решение уравнений (11) или (12) рассмотрим краевые условия свободных крутых колебаний при их начальном запуске с помощью момента сил, приложенного к правому концу стержня.

Начальное условие запуска колебаний линейно-упругого стержня в соответствии с (6) имеет вид:

$$\theta(x, t)|_{t=0} = \frac{M}{J_0} x. \quad (13)$$

Краевыми условиями являются: полное закрепление на левом конце вала и отсутствие крутящего момента при свободных колебаниях на правом конце вала, тогда из (6) получаем:

$$\begin{aligned} \theta(x, t)|_{x=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\ell} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Опуская всем известные рассуждения о построении решения, например, уравнения (12) с помощью метода Фурье при условиях (13) и (14) [1], перейдем к уравнениям, определяющим собственные частоты ω_i стержня при крутых колебаниях:

$$\omega_i = \frac{i \cdot \pi}{\ell} \sqrt{\frac{G}{\rho}} (i = 1, \infty). \quad (15)$$

КРУЧЕНИЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПРОДОЛЬНО ВОЛОКНИСТЫХ, ПОПЕРЕЧНО СЛОИСТЫХ И СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ТЕЛ БЕЗ УЧЕТА РЕОЛОГИИ

Рассмотрим композиционный материал, состоящий из n компонент, деформация которых описывается различными в общем случае нелинейными функциями \mathfrak{S}_k ($k = \overline{1, n}$). Компоненты композиционного материала имеют объемные доли γ_k ($k = \overline{1, n}$).

Далее будем рассматривать некоторый элемент круглого стержня между точками x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) (Рисунок 1). Длина $x_2 - x_1$ фрагмента композиционного вала такова, что объемные доли γ'_k ($k = \overline{1, n}$) компонент композиционного материала для выделенного фрагмента совпадают с концентрациями для всего стержня целиком γ_k ($k = \overline{1, n}$). Фрагмент цилиндра с минимальной длиной ℓ' , удовлетворяющей изложенным выше гипотезам по объемным долям, называется макроточкой композиционного материала. Очевидно, что точки x_1 и x_2 выбираются из условия $\ell' \leq x_2 - x_1$.

В соответствии с общей методикой, примененной для решения задачи определения эффективных параметров стержня, рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в стержне, т.е. в данном случае рассматривается кручение круглого стержня на участке между точками x_1 и x_2 [5].

Принцип реализации метода гомогенизации для цилиндрического стержня круглого сечения заключается в следующем: если армированный материал состоит из N компонент (фаз) и в среднем изотропен (например, имеет место хаотическое армирование и т.п.), можно использовать гипотезу Фойгта для круглого стержня о том, что в простейших опытах на кручение предполагается, что деформации по всему объему композиционного материала цилиндрического стержня однородны. Второй предельный случай (гипотеза Рейсса) заключается в том, что в тех же простейших экспериментах на кручение предполагается, что напряжения по всему объему композиционного материала призматического стержня в среднем однородны.

Полученные на основании этих гипотез формулы, имеют практическую ценность, так как являются соответственно верхней и нижней оценкой истинных модулей композиционного материала [5].

Будем использовать гипотезу Фойгта, которая гласит, что распределение деформаций в рассматриваемом фрагменте стержня однородно, т.е. средние деформации сдвига $\langle \varepsilon_{x\theta} \rangle_\Phi = \varepsilon_{x\theta} = \frac{r \cdot d\theta}{dx}$ для всех компонентов композиционного стержня одинаковы, тогда из уравнения состояния (2) следует:

$$\sigma_{x\theta,k} = \mathfrak{S}_k(\varepsilon_{x\theta}), \quad (16)$$

где $\mathfrak{S}_k()$ ($k = \overline{1, n}$) – произвольная нелинейная монотонно возрастающая функция характеризующая связь напряжений и деформаций для k -ой компоненты материала.

Пусть структура композиционного материала является продольно волокнистой с одинаковой площадью поперечного сечения волокна dS , в этом случае гипотеза Фойгта удовлетворяется автоматически.

Усилие, приходящееся на площадку dS , соответствующую площади поперечного сечения волокна, находящегося на расстоянии радиуса r , из материала с номером k , выразится произведением:

$$\sigma_{x\theta,k} dS = \mathfrak{S}_k \left(\frac{r \cdot d\theta}{dx} \right) dS.$$

Тогда момент, развиваемый этим усилием равен:

$$dM_k = r \cdot \sigma_{x\theta,k} \cdot dS = r \cdot \mathfrak{S}_k \left(\frac{r \cdot d\theta}{dx} \right) dS. \quad (17)$$

Умножая обе части (17) на γ_k и суммируя полученное уравнение по k ($k = \overline{1, n}$), получаем момент $d\langle M \rangle_{\Phi}$ материалов в волокне с координатой r :

$$d\langle M \rangle_{\Phi} = r \cdot \langle \mathfrak{S} \rangle_{\Phi} \left(\frac{r \cdot d\theta}{dx} \right) dS. \quad (18)$$

где $\langle \mathfrak{S} \rangle_{\Phi} = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \mathfrak{S}_k$.

Найдем величину главного момента $\langle M \rangle_{\Phi}$, приложенного к валу, интегрированием (18) по площади поперечного сечения S_2 :

$$\langle M \rangle_{\Phi} = \int_{S_2} r \cdot \langle \mathfrak{S} \rangle_{\Phi} \left(\frac{r \cdot d\theta}{dx} \right) dS. \quad (19)$$

В частности при использовании композиции линейно упругих материалов получаем из (19):

$$\langle M \rangle_{\Phi} = \langle G \rangle_{\Phi} \cdot J_0 \cdot \frac{d\langle \theta(x) \rangle_{\Phi}}{dx}, \quad (20)$$

где $\langle G \rangle_{\Phi} = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot G_k$, G_k – модуль сдвига k -ой компоненты композиционного материала ($k = \overline{1, n}$).

Отметим, что усреднение по Фойгту соответствует физической модели кручения аксиально слоистого цилиндрического стержня с постоянной толщиной слоев либо материала с волокнистой соосно направленной структурой. С методикой усреднения нелинейностей в виде диаграмм Прандтля и степенных функций можно ознакомиться в [6].

Перейдем ко второй предельной гипотезе – гипотезе Рейсса [5]. В соответствии с ней будем предполагать, что в рассматриваемом композиционном теле однородное распределение касательных напряжений, т.е. для каждой компоненты k уравнение состояния будет иметь вид:

$$\sigma_{x\theta,k} = \langle \sigma_{x\theta} \rangle_P = \mathfrak{S}_k (\varepsilon_{x\theta,k}), \quad (21)$$

где $\varepsilon_{x\theta,k}$ – деформации сдвига в соответствующей компоненте материала.

Обращая (21), умножаем на γ_k и суммируем полученное уравнение по k ($k = \overline{1, n}$). В результате перечисленных преобразований получаем усредненное уравнение состояния для гипотезы Рейсса:

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \mathfrak{S}_k^{-1} (\langle \sigma_{x\theta} \rangle_P) = \langle \varepsilon_{x\theta} \rangle_P, \quad (22)$$

где $\langle \varepsilon_{x\theta} \rangle_P = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \varepsilon_{x\theta,k}$. Отметим, что физическая аналогия уравнения (22) и выполнения гипотезы об однородности напряжений $\langle \sigma_{x\theta} \rangle_P$ для всех компонент композиционного материала “по определению” состоит в кручении поперечно слоистого цилиндрического пакета.

Усилие, приходящееся на площадку dS , находящуюся на расстоянии радиуса r в поперечно слоистом пакете, выразится произведением:

$$d\langle M \rangle_P = r \cdot \langle \sigma_{x\theta} \rangle_P \cdot dS = r \cdot \langle \mathfrak{S} \rangle_P (\langle \varepsilon_{x\theta} \rangle_P) dS, \quad (23)$$

где $\langle \mathfrak{S} \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \mathfrak{S}_k^{-1} () \right)^{-1}$.

Найдем величину главного момента $\langle M \rangle_P$, приложенного к валу, интегрированием (23) по площади поперечного сечения S_2 :

$$\langle M \rangle_P = \int_{S_2} r \cdot \langle \mathfrak{S} \rangle_P \left(\frac{r \cdot d\theta}{dx} \right) dS. \quad (24)$$

Уравнение (24) – уравнение кручения композиционного материала в соответствии с гипотезой Рейсса, которая тождественно удовлетворяется при кручении поперечно слоистого цилиндрического стержня. Методика усреднения нелинейностей в виде диаграмм Прандтля и степенных функций изложена в [6].

При использовании поперечно слоистой композиции линейно упругих материалов из (24) получаем:

$$\langle M \rangle_P = \langle G \rangle_P \cdot J_0 \cdot \frac{d \langle \theta(x) \rangle_P}{dx},$$

где $\langle G \rangle_P = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{G_k}$, G_k – модуль сдвига k -ой компоненты композиционного материала ($k = \overline{1, n}$).

Построим эффективную диаграмму деформирования композиционного структурно неоднородного материала в смысле приближения Кравчука-Тарасюка [7] как наиболее теоретически обоснованном варианте определения усредненных деформационных свойств материала стержня. Для этого на первом шаге будем предполагать, что момент, действующий на правое сечение стержня S_2 можно определить как $\langle M \rangle = (\alpha \langle M \rangle_\Phi + (1 - \alpha) \langle M \rangle_P)$ (где $\alpha \in [0, 1]$ – вещественное число) и при этом будем предполагать, что выражение $r \cdot \frac{d\theta}{dx}$ однородно для всех компонент стержня, т.е. $r \cdot \frac{d\theta}{dx} = r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx}$. Тогда из (19) и (24) получаем

$$\langle M \rangle = \int_{S_2} r \cdot \Lambda_{1,\alpha} \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) dS, \quad (25)$$

где $\Lambda_{1,\alpha} \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) = \alpha \cdot \langle \Im \rangle_\Phi \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) + (1 - \alpha) \cdot \langle \Im \rangle_P \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right)$.

Далее на втором шаге будем предполагать, что деформацию сдвига волокна композиционного материала, можно определить как $r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} = r \cdot \left(\alpha \frac{d\langle \theta \rangle_\Phi}{dx} + (1 - \alpha) \frac{d\langle \theta \rangle_P}{dx} \right)$, при этом будем предполагать, что выражение $\langle M \rangle$ однородно для всех компонент стержня, т.е. $\langle M \rangle = \langle M \rangle_\Phi = \langle M \rangle_P$. Тогда из (19) и (24) получаем:

$$\langle \Im \rangle_\Phi^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{d\langle M \rangle}{dS} \right) = \frac{r \cdot d\langle \theta \rangle_\Phi}{dx}, \quad \langle \Im \rangle_P^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{d\langle M \rangle}{dS} \right) = \frac{r \cdot d\langle \theta \rangle_P}{dx}. \quad (26)$$

Суммируя (26) с весовым коэффициентом α , получаем:

$$\Lambda_{2,\alpha}^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{d\langle M \rangle}{dS} \right) = \frac{r \cdot d\langle \theta \rangle}{dx}, \quad (27)$$

где $\Lambda_{2,\alpha}^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{d\langle M \rangle}{dS} \right) = \alpha \cdot \langle \Im \rangle_\Phi^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{d\langle M \rangle}{dS} \right) + (1 - \alpha) \cdot \langle \Im \rangle_P^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{d\langle M \rangle}{dS} \right)$.

Обращая (27) и интегрируя по площади S_2 , получаем:

$$\langle M \rangle = \int_{S_2} r \cdot \Lambda_{2,\alpha} \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) dS. \quad (28)$$

Далее, интегрируя по α на отрезке $[0, 1]$ выражения для $\Lambda_{1,\alpha}(\varepsilon_{x\theta})$ и $\Lambda_{2,\alpha}(\varepsilon_{x\theta})$, можно в нелинейном случае получить “вилку” Кравчука-Тарасюка для оценки разброса эффективных деформационных свойств композиционного неоднородного стержня [7].

Суммируя с весом $1/2$ результаты интегрирования (25) и (28) по α , получаем приближение Кравчука-Тарасюка эффективных свойств композита в уравнении кручения неоднородного стержня:

$$\langle M \rangle = \int_{S_2} r \cdot \Lambda \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) dS, \quad (29)$$

где $\Lambda \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left(\Lambda_{1,\alpha} \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) + \Lambda_{2,\alpha} \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) \right)$.

Методика получения усредненных коэффициентов функции $\Lambda()$ из (29) в случае использования многолинейной диаграммы Прандтля или степенной функции изложены в [6], а в случае использования линейной модели для деформации всех компонент композиционного материала можно получить следующие очевидные равенства:

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,\alpha} \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) &= (\alpha \cdot \langle G \rangle_{\Phi} + (1 - \alpha) \cdot \langle G \rangle_{\text{P}}) \cdot r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \\ \Lambda_{2,\alpha} \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) &= \left(\frac{\alpha}{\langle G \rangle_{\Phi}} + \frac{(1 - \alpha)}{\langle G \rangle_{\text{P}}} \right)^{-1} \cdot r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx}, \\ \Lambda_1 \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) &= \frac{1}{2} (\langle G \rangle_{\Phi} + \langle G \rangle_{\text{P}}) \cdot r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx}, \\ \Lambda_2 \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) &= \frac{\langle G \rangle_{\Phi} \cdot \langle G \rangle_{\text{P}}}{\langle G \rangle_{\Phi} - \langle G \rangle_{\text{P}}} \ln \left(\frac{\langle G \rangle_{\Phi}}{\langle G \rangle_{\text{P}}} \right) \cdot r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx}, \\ \Lambda \left(r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx} \right) &= \frac{1}{4} \left((\langle G \rangle_{\Phi} + \langle G \rangle_{\text{P}}) + 2 \frac{\langle G \rangle_{\Phi} \cdot \langle G \rangle_{\text{P}}}{\langle G \rangle_{\Phi} - \langle G \rangle_{\text{P}}} \ln \left(\frac{\langle G \rangle_{\Phi}}{\langle G \rangle_{\text{P}}} \right) \right) \cdot r \cdot \frac{d\langle \theta \rangle}{dx}. \end{aligned} \quad (30)$$

То есть при использовании неструктурированной композиции из n линейно упругих материалов выражения $\frac{\langle G \rangle_{\Phi} \cdot \langle G \rangle_{\text{P}}}{\langle G \rangle_{\Phi} - \langle G \rangle_{\text{P}}} \ln \left(\frac{\langle G \rangle_{\Phi}}{\langle G \rangle_{\text{P}}} \right)$ и $\frac{1}{2} (\langle G \rangle_{\Phi} + \langle G \rangle_{\text{P}})$ из (30) определяют “вилку” Кравчука-Тарасюка разброса эффективных свойств в среднем изотропного упругого композита [7].

Отметим, что “вилка” Кравчука-Тарасюка гораздо уже “вилки” Рейсса-Фойгта (Рисунок 2) и позволяет с достаточной точностью брать в качестве оценочного значения эффективных свойств композита среднее арифметическое между меньшим и большим числами из “вилки”.

Из (29) и (30) получаем уравнение кручения стержня в приближении Кравчука-Тарасюка эффективных упругих свойств материала:

$$\langle M \rangle = \langle G \rangle_{\text{K-T}} \cdot J_0 \cdot \frac{d\langle \theta(x) \rangle}{dx}, \quad (31)$$

где $\langle G \rangle_{\text{K-T}} = \frac{1}{4} \left((\langle G \rangle_{\Phi} + \langle G \rangle_{\text{P}}) + 2 \frac{\langle G \rangle_{\Phi} \cdot \langle G \rangle_{\text{P}}}{\langle G \rangle_{\Phi} - \langle G \rangle_{\text{P}}} \ln \left(\frac{\langle G \rangle_{\Phi}}{\langle G \rangle_{\text{P}}} \right) \right)$.

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Пусть $\langle \rho \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \rho_k$ – средняя плотность материала стержня на интервале (x_1, x_2) , где ρ_k – плотность k -ой компоненты композиционного материала, а γ_k – ее объемная доля. Тогда инерционная составляющая момента рассматриваемого интервала (x_1, x_2) волокна стержня, находящегося на расстоянии r от оси и имеющего площадь поперечного сечения dS , определяется формулой:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\langle \rho \rangle \cdot r \cdot \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \right) dx \cdot r dS. \quad (32)$$

Не повторяя преобразований (5)-(10) вывода уравнения крутильных колебаний однородного стержня (11), в композиционном нелинейном случае получаем следующее уравнение:

$$\langle \rho \rangle \cdot J_0 \cdot \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \left(\int_{S_2} r^2 \cdot \langle \Im \rangle' \left(\frac{r \cdot \partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS \right) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}, \quad (33)$$

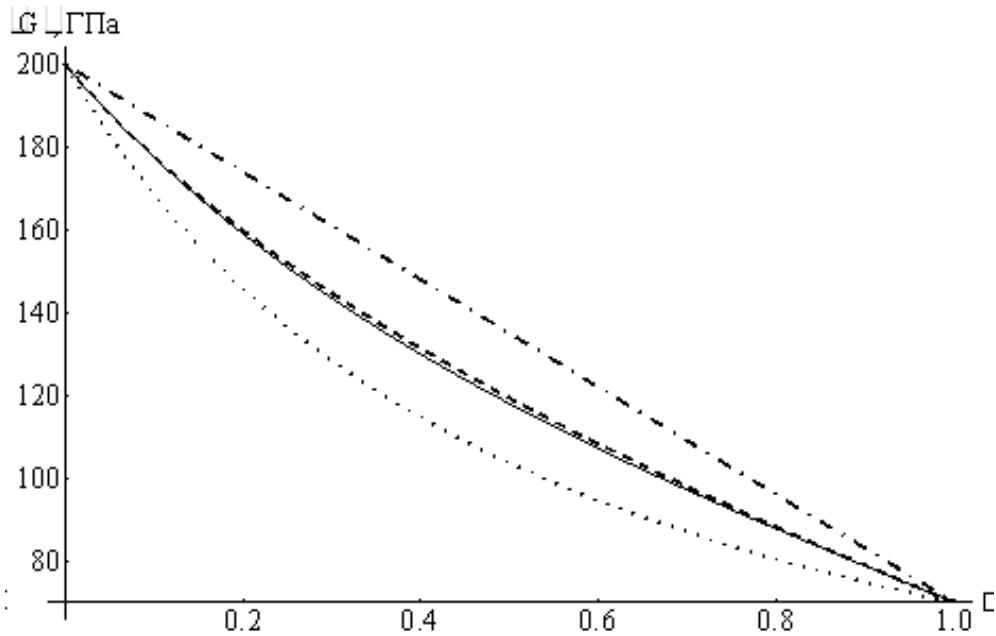


Рис. 2. Зависимость средних значений модуля сдвига от концентрации γ первого материала в двухкомпонентной смеси ($G_1 = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $G_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па):
 $\langle G \rangle_P$ (точечная линия); $\langle G \rangle_\phi$ (штрихпунктирная линия); $\frac{\langle G \rangle_\phi \cdot \langle G \rangle_P}{\langle G \rangle_\phi + \langle G \rangle_P} \ln \left(\frac{\langle G \rangle_\phi}{\langle G \rangle_P} \right)$ (непрерывная линия); $\frac{1}{2} (\langle G \rangle_\phi + \langle G \rangle_P)$ (пунктирная линия)

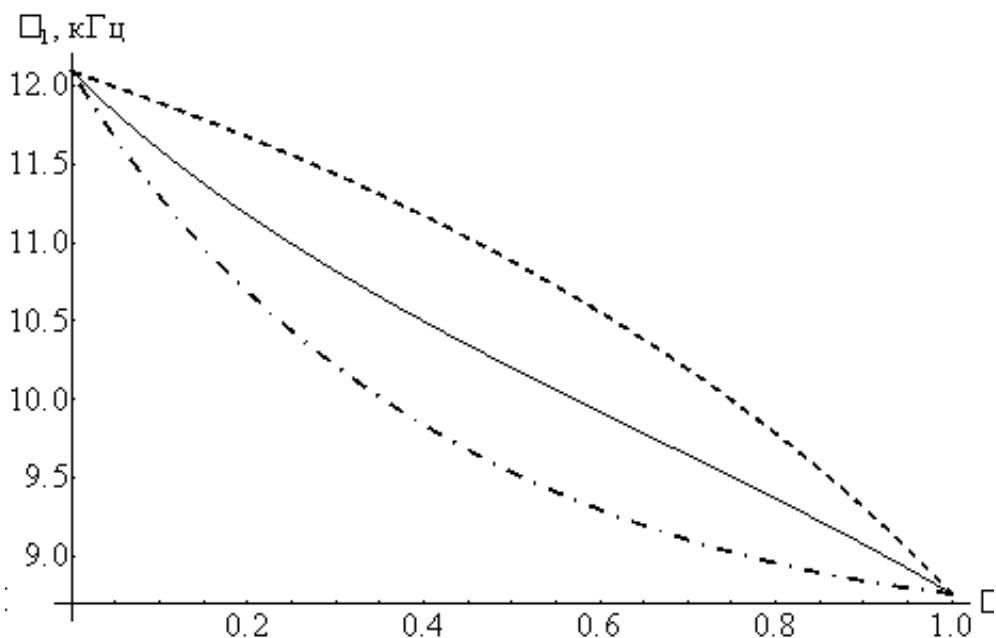


Рис. 3. Зависимость низшей собственной частоты ω_1 (36) крутильных колебаний стержня длины $l = 1.5$ м от концентрации γ первого материала в двухкомпонентной смеси ($G_1 = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $G_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho_1 = 4000$ кг/м³, $\rho_2 = 6000$ кг/м³):
 $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\langle G \rangle_P / \langle \rho \rangle}$ (штрихпунктирная линия); $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\langle G \rangle_\phi / \langle \rho \rangle}$ (пунктирная линия); $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\langle G \rangle_{K-T} / \langle \rho \rangle}$ (непрерывная линия)

где $\langle \Im \rangle'(\varepsilon_{x\theta}) = \frac{d\langle \Im \rangle(\varepsilon_{x\theta})}{d\varepsilon_{x\theta}}$, $\langle \Im \rangle() = \langle \Im \rangle_\Phi()$ – для волокнистого вдоль оси композиционного стержня (18), $\langle \Im \rangle() = \langle \Im \rangle_P()$ – для поперечно слоистого стержня (23) и $\langle \Im \rangle() = \Lambda()$ – для неоднородного композиционного (29) стержня соответственно.

Уравнение (33) в случае линейно упругой деформации всех компонент композиционного материала примут более простой вид, аналогичный (12):

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \langle a \rangle^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}. \quad (34)$$

где $\langle a \rangle = \sqrt{\frac{\langle G \rangle_\Phi}{\langle \rho \rangle}}$ – для волокнистого вдоль оси композиционного материала, $\langle a \rangle = \sqrt{\frac{\langle G \rangle_P}{\langle \rho \rangle}}$ – для поперечно слоистого стержня и $\langle a \rangle = \sqrt{\frac{\langle G \rangle_{K-T}}{\langle \rho \rangle}}$ – для неоднородного упругого композиционного стержня (31).

При этом в соответствии с (15) собственные частоты ω_i при крутильных колебаниях композиционного стержня в зависимости от его структуры (т.е. от конкретного значения $\langle a \rangle$) будут иметь вид (Рисунок 3):

$$\omega_i = \frac{i \cdot \pi}{\ell} \langle a \rangle (i = 1, N). \quad (35)$$

Количество N достоверно вычисленных собственных частот ω_i определяется геометрическими размерами макроточки ℓ' композиционного материала стержня и длиной волны, соответствующей указанной частоте, т.е. должно соблюдаться условие:

$$\ell/N >> \ell'.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье выполнено обобщение вывода уравнения крутильных колебаний круглого однородного стержня (см., например, [1]). В настоящей статье показано, что формально известное уравнение для линейно деформируемого однородного материала стержня применимо к стержню произвольной длины. При этом длина стержня появляется в решении только при задании конкретных начального и краевых условий.

Получены уравнения крутильных колебаний для композиционных стержней, установлена зависимость частоты собственных колебаний стержня от концентрации компонент в смеси.

Установлено, что вычисление эффективных характеристик стержня в соответствии с гипотезой Фойгта соответствует решению задачи усреднения для волокнистого (либо коаксиально слоистого) вдоль оси стержня материала. Применение гипотезы Рейсса соответствует кручению поперечно слоистого цилиндрического стержня, а применение методики Кравчука-Тарасюка для сужения “вилки” Фойгта-Рейсса соответствует получению наилучшего приближения эффективных свойств структурно неоднородного композиционного материала стержня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
2. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
3. Золочевский, А. А. Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А. А. Золочевский, А. Н. Склепус, С. Н. Склепус. – Харьков: Гарант, 2011. – 719 с.
4. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендейев. – М: Наука, 1986. – 544 с.

5. Победря, Б. Е. Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. — М.: Из-во Московского университета, 1984. — 336 с.

6. Кравчук, А. С. Применение простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины в механике твердого тела / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. — 2014. — № 1. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>

7. Тарасюк, И. А. Сужение “вилки” Фойгта-Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов / И. А. Тарасюк, А. С. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. — 2014. — № 3. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf>

8. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

9. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.

10. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

REFERENCES

1. Aramanovich I. G., Levin V. I. The equations of mathematical physics. [Aramanovich I. G., Levin V. I. Uravneniya matematicheskoy fiziki]. Moscow: Nauka, 1969, 288 p.
2. Gorshkov A. G., Starovoytov E. I., Yarovaya A. V. Mechanics of viscoelastoplastic layered structural elements. [Gorshkov A. G., Starovojtov E'. I., Yarovaya A. V. Mekhanika sloistyx vyazkouprugoplasticheskix elementov konstrukcij]. Moscow, 2005, 576 p.
3. Zolochevsky A. A., Sklepus A. N., Sklepus S. N. Nonlinear mechanics of deformable solids. [Zolochevskij A. A., Sklepus A. N., Sklepus S. N. Nelinejnaya mepanika deformiruemogo tverdogo tela]. Kharkiv: The Guarantor, 2011, 719 p.
4. Bronshtein I. N., Semendyaev K. A. Handbook of mathematics for engineers and students of technical colleges. [Bronshtejn I. N., Semendyaev K. A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchixsy uchuzov]. Moscow: Nauka, 1986, 544 p.
5. Pobedria B. E. Mechanics of composite materials. [Pobedrya B. E. Mepanika kompozicionnyx materialov]. Moscow, 1984, 336 p.
6. Kravchuk A. S., Kravchuk A. I. The application of the simplest model of a deformable coating of constant thickness in solid mechanics. [Kravchuk A. S., Kravchuk A. I. Primenenie prosteshej modeli deformiruemogo pokrytiya postoyannoj tolshiny v mepanike tverdogo tela]. APRIORI. Seriya: Estestvennye i texnicheskie nauki [E'lektronnyj resurs] — APRIORI. Series: Natural and Technical Sciences [Electronic Resource], 2014, no. 1, Access mode: <http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>.
7. Tarasyuk I. A., Kravchuk A. S. The narrowing of Voigt-Reuss range in the theory of elastic structurally inhomogeneous isotropic in average composite body without the application of variational principles. [Tarasyuk I. A., Kravchuk A. S. Suzhenie “vilkii” Fojgta-Rejssa v teorii uprugix strukturov neodnorodnyx v srednem izotropnyx kompozicionnyx tel bez primeneniya variacionnyx principov]. APRIORI. Seriya: Estestvennye i texnicheskie nauki [E'lektronnyj resurs] — APRIORI. Series: Natural and Technical Sciences [Electronic Resource], 2014. no. 3, Access mode: <http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf>.
8. Baev A. D., Shabrov S. A., Golovaneva F. V., Meach Mon About unique classical solution

mathematical model of forced vibrations rod system with singularities. [Baev A. D., Shabrov S. A., Golovanyova F. V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoy modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

9. Baev A. D., Shabrov S. A., Golovaneva F. V., Meach Mon The Function Of The Differential Impact Model Fourth Order. [Baev A. D., Shabrov S. A., Golovanyova F. V., Meach Mon Funksiya vliyaniya differencial'noj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo instituta GPS MChS Rossii — Herald of the Voronezh Institute of Russian Ministry for Emergency Situations*, 2014, iss. 3 (12), pp. 65–73.

10. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

Кравчук Александр Степанович, доктор физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет, профессор кафедры био- и наномеханики, Минск, Беларусь

E-mail: ask_Belarus@inbox.ru

Тел.: +375-29-762-76-62

Кравчук Анжелика Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Минск, Беларусь

E-mail: anzhelika.kravchuk@gmail.com

Тарасюк Иван Александрович, Белорусский государственный университет, магистрант кафедры био- и наномеханики, Минск, Беларусь

E-mail: jege.the.owl@gmail.com

Kravchuk Alexander Stepanovich, Dr. of Physics and Mathematics Sc., Dozent, Belarussian State University, Professor of the Department of bio- and nanomechanics, Minsk, Belarus

E-mail: ask_Belarus@inbox.ru

Tel.: +375-29-762-76-62

Kravchuk Anzhelika Ivanovna, Candidate of Physics and Mathematics Sc., Dozent, Belarussian State University, Dozent of the Department of Web Technologies and Computer Modeling, Minsk, Belarus

E-mail: anzhelika.kravchuk@gmail.com

Tarasuk Ivan Alexandrovich, Belarussian State University, student of Master's degree on the Department of bio- and nanomechanics, Minsk, Belarus

E-mail: jege.the.owl@gmail.com