УДК 517.972

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ В СРЕДНЕМ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Н. Ивакин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.03.2014 г.

Аннотация. В данной статье рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка со случайными коэффициентами. Данные коэффициенты являются случайными независимыми процессами. Целью изучения такого вида уравнения является получение некоторых сведения о моментных функциях его решения. С помощью метода, предложенного Задорожним В. Г., происходит переход к соответствующему детерминированному дифференциальному уравнению, решение которого уже известно. Находится формулы для почти-периодических и ограниченных математических ожиданий решений линейного неоднородного дифференциального уравнения. Полученные формулы могут использоваться, если известны характеристические функционалы случайных процессов.

Ключевые слова: почти-периодические процессы, ограниченные процессы, случайный процесс, моментные функции, вариационная производная.

ALMOST PERIODIC AND LIMITED IN MEAN SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM COEFFICIENTS

A. N. Ivakin

Abstract. This article discusses the linear inhomogeneous first order differential equation with random coefficients. These factors are random independent processes. The purpose of the study of this type of equation is to get some information about the moment functions of its decision. Using the method proposed Zadorozhniy V. G, the transition to the corresponding deterministic differential equation whose solution is already known. Periodic and limited mathematical expectation for solution of inhomogeneous linear differential equation is found. Received formulas can be used if characteristic functionals of random processes are known.

Keywords: almost periodic processes, limited processes, random processes, moment functions, variational derivative.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = \varepsilon(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $\varepsilon(t, w)$, $f(t, w)$ — случайные процессы, зависимость от случайного события w в дальнейшем в обозначении не указывается, x_0 — заданная случайная величина.

Характеристическим функционалом процесса $\varepsilon(t)$ называется выражение [1, стр. 192]

$$M\left(\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}\varepsilon(s)u(s)\,ds\right)\right),$$

где M — математическое ожидание по функции распределения процесса $\varepsilon(s)$, $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $u\in L_1(\mathbb{R})$, $L_1(\mathbb{R})$ — пространство суммируемых на $\mathbb{R}$ функций.

Будем считать, что случайные процессы ε и f заданы характеристическими функционалами.

Определение. Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, X — банахово пространство и $L\subset X$ — подпространство. Если для функционала $y: X\to\mathbb{C}$ приращение $y(x(\cdot)+h(\cdot))-y(x(\cdot))$ можно записать в виде

$$y(x(\cdot)+h(\cdot))-y(x(\cdot))=A(x(\cdot))h(\cdot)+w(x(\cdot),h(\cdot),\quad \forall h\in L,$$

где $A(x(\cdot))$ — линейный по h, ограниченный на L функционал и $\frac{|w(x(\cdot),h(\cdot))|}{\|h\|}\to 0$ при $\|h(\cdot)\|\to 0$, то $A(x(\cdot))h(\cdot)$ называется дифференциалом функционала y в точке x в направлении подпространства L и обозначается $dy(x(\cdot),h)$ или $y'(x)h$. Линейный функционал $A(x(\cdot))$ называется производной в направлении подпространства L и обозначается $y'(x)$.

Определение. [1, стр. 13] Пусть X — банахово пространство функций $x: G\to R$ и L — подпространство в X плотное в пространстве $L_2(G)$. Если дифференциал $y'(x)h$ функционала $y: X\to\mathbb{C}$ в направлении подпространства L записывается в виде

$$y'(x(\cdot))h(\cdot)=\int\limits_G\varphi(x(\cdot),s)h(s)\,ds\forall h\in L,$$

где $\varphi: X\times G\to G$ и интеграл понимается в смысле Лебега, то $\varphi(x(\cdot),s)$ называется вариационной производной функционала y в точке $x(\cdot)$ в направлении L и обозначается $\frac{\delta y(x)}{\delta x(s)}$.

Хорошо известны условия существования ограниченных или почти-периодических решений детерминированных уравнений (1) (см., например [2], [3]. Если $\varepsilon(t)$ и $f(t)$ являются случайными процессами, то задача становится сложнее. Случай периодических в среднем решений уравнения рассмотрен в [4], [5].

Определение. [ср. 6, стр. 70] Решение уравнения (1) называется ограниченным (почти-периодическим) в среднем, если математическое ожидание решения является ограниченной (почти-периодической) на $\mathbb{R}$ функцией.

Определение. Решение уравнения (1) называется ограниченным (почти-периодическим) в широком смысле, если математическое ожидание и дисперсионная функция этого решения являются ограниченными (почти-периодическими) на $\mathbb{R}$ функциями.

В данной статье находятся условия существования ограниченных и почти-периодических в среднем решений уравнения (1).

2. ПЕРЕХОД К ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕ

Перейдем от задачи Коши (1), (2) к детерминированной задаче по аналогии с тем, как это сделано в работе [7]. Для этого введем отображение

$$y(t,u(\cdot),v(\cdot))=M\left(x(t)\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s)\right)\,ds\right)\right),$$

где математическое ожидание вычисляется по функциям распределения процессов ε, f и случайной величины x_0, $u \in L_1(\mathbb{R})$, $v \in L_1(\mathbb{R})$.

Заметим, что $y(t,0,0) = M(x(t))$.

Умножим (1) и (2) на $\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s))\,ds\right)$ и возьмем математическое ожидание полученных выражений. Получим

$$M\left[\dot{x}\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s))\,ds\right)\right] = \\ = M\left[\varepsilon(t)x(t)\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s))\,ds\right)\right] + \\ + M\left[f(t)\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s))\,ds\right)\right],$$

$$M\left[x(t_0)\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s))\,ds\right)\right] = \\ = M\left[x_0\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s))\,ds\right)\right].$$

Эти уравнения можно записать с помощью $y(t,u(\cdot),v(\cdot))$ в виде

$$\frac{\partial y(t,u(\cdot),v(\cdot))}{\partial t} = -i\frac{\delta y(t,u(\cdot),v(\cdot))}{\delta u(t)} - i\frac{\psi(u(\cdot),v(\cdot))}{\delta v(t)}, \tag{3}$$

$$y(t_0,u(\cdot),v(\cdot)) = Mx_0\psi(u(\cdot),v(\cdot)), \tag{4}$$

где $\psi(u(\cdot),v(\cdot)) = M\left(\exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}}(\varepsilon(s)u(s)+f(s)v(s))\,ds\right)\right)$ — характеристический функционал процессов $\varepsilon(s)$, $f(s)$, $u,v \in L_1(\mathbb{R})$.

Мы перешли от задачи (1), (2) со случайными коэффициентами к детерминированной задаче (3), (4) с обычной и вариационной производными.

3. ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР

Введем в рассмотрение функцию

$$\chi(t,s,\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \leqslant \tau \leqslant s, \\ -1, & \text{если } s \leqslant \tau \leqslant t, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим множество непрерывных ограниченных на $L_1(\mathbb{R})$ отображений $\varphi : L_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ с нормой $\|\varphi\| = \sup\limits_{u\in L_1(\mathbb{R})}|\varphi(u)|$. Пусть I — оператор тождественного преобразования. Введем в рассмотрение оператор $U(t,s)$ по правилу

$$U(t,s)\varphi(u(\cdot)) = \varphi(u(\cdot)+i\chi(t,s,\cdot)).$$

В дальнейшем для простоты записи вместо $\chi(t,s,\cdot)$ будем писать $\chi(t,s)$. Оператор $U(t,s)$ называется эволюционным.

Лемма. Оператор обладает следующими свойствами:

$$U(t,t) = I;$$

$$U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s);$$

$$U^{-1}(t,s) = U(s,t);$$

$$U(t,s)U(\tau,\sigma) = U(\tau,\sigma)U(t,s).$$

Доказательство. 1) $U(t,t)\varphi(u(\cdot)) = \varphi(u(\cdot) + \chi(t,t)) = \varphi(u(\cdot))$.

2) $U(t,\tau)U(\tau,s)\varphi(u(\cdot)) = U(t,\tau)\varphi(u(\cdot) + i\chi(\tau,s)) = \varphi(u(\cdot) + i\chi(\tau,s) + i\chi(t,\tau)) = \varphi(u(\cdot) + i\chi(t,s)) = U(t,s)\varphi(u(\cdot))$.

3) $U(s,t)U(t,s) = U(s,s) = I$; $U(t,s)U(s,t) = I$.

4) $U(t,s)U(\tau,\sigma)\varphi(u(\cdot)) = \varphi(u(\cdot) + i\chi(t,s) + i\chi(\tau,\sigma)) = \varphi(u(\cdot) + i\chi(\tau,\sigma) + i\chi(t,s)) = U(\tau,\sigma)U(t,s)\varphi(u(\cdot))$.

Случайный процесс $\varepsilon(t)$, заданный характеристическим функционалом вида

$$\varphi_\varepsilon(u(\cdot)) = \exp\left(i\int\limits_{\mathbb{R}} M\varepsilon(s)u(s)\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)\,ds_1ds_2\right), \tag{5}$$

где $b(s_1,s_2) = M(\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)) - M(\varepsilon(s_1))\,M(\varepsilon(s_2))$ называется гауссовым (нормальным) случайным процессом.

4. ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 1. [1, стр. 220]. Если $u(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$, $v(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$, $\varepsilon(t)$, $f(t)$ — независимые случайные процессы, и характеристические функционалы $\varphi_\varepsilon(u(\cdot))$, $\varphi_f(v(\cdot))$ имеют вариационные производные, тогда

$$y(t,u(\cdot),v(\cdot)) = Mx_0U(t,t_0)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\varphi_f(v(\cdot)) - i\int\limits_{t_0}^{t} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds \tag{6}$$

является решением задачи (3), (4).

Теорема 2. Если $\varepsilon(t)$ случайный процесс, заданный характеристическим функционалом (5), где $\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}$, $M\varepsilon(t) = a_0 + a_1(t)$ — почти-периодические функции t, а $b(s_1,s_2)$ почти-периодическая функция по каждой переменной, $a_0 \neq 0$, и $\int\limits_0^t a_1(\tau)\,d\tau$, $\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_1(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2$ — ограниченные функции по t, тогда уравнение (3) имеет почти-периодическое решение по переменной t, которое записывается в виде

$$y(t,u(\cdot),v(\cdot)) = i\int\limits_{t}^{+\infty} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds, \tag{7}$$

если $a_0 > 0$, и

$$y(t,u(\cdot),v(\cdot)) = -i\int\limits_{-\infty}^{t} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds, \tag{8}$$

если $a_0 < 0$.

Доказательство. Решение (6) при $t_0 = 0$ имеет вид

$$y(t,u,v) = U(t,0)\left[Mx_0\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\varphi_f(v(\cdot)) - i\int\limits_0^t U(0,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds\right]. \tag{9}$$

1) Пусть $a_0 > 0$. Устремим $t \to +\infty$ и предположим, что $U(0,t)y(t,u,v) \to 0$ при $t \to \infty$. Получим

$$Mx_0\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\varphi_f(v(\cdot)) = i\int\limits_0^{+\infty} U(0,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds.$$

Подставим найденное выражение в (9)

$$y(t,u,v) = i\int\limits_0^{+\infty} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds - i\int\limits_0^{t} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds =$$
$$= i\int\limits_t^{+\infty} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds.$$

Покажем, что найденное решение является почти-периодическим. Пусть δ — любое число и ω — общий δ почти-период функций $a_1(\tau)$ и $b(\tau_1,\tau_2)$, тогда

$$|y(t,\omega,u,v) - y(t,u,v)| =$$
$$= \left|i\int\limits_{t+\omega}^{+\infty} U(t,\omega,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds - i\int\limits_t^{+\infty} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds\right| =$$
$$= \left|\int\limits_t^{+\infty}\left[U(t+\omega,s+\omega)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)} - U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}\right]ds\right| =$$
$$= \left|\int\limits_t^{+\infty} U(t+\omega,s+\omega)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\left[\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s+\omega)} - \frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}\right]ds +\right.$$
$$\left. + \int\limits_t^{+\infty}[U(t+\omega,s+\omega) - U(t,s)]\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int\limits_t^{+\infty} U(t+\omega,s+\omega)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\left[\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s+\omega)} - \frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}\right]ds\right| +$$
$$+ \left|\int\limits_t^{+\infty}[U(t+\omega,s+\omega) - U(t,s)]\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}ds\right| = J_1 + J_2.$$

$$J_1 < \delta\int\limits_t^{+\infty}|U(t+\omega,s+\omega)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))|\,ds =$$

$$= \delta \int\limits_t^{+\infty} \exp\left[a_0(t-s) + \int\limits_s^t a_1(\tau+\omega)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b(\tau_1+\omega,\tau_2+\omega)\,d\tau_1 d\tau_2\right] +$$

$$+ i\int\limits_{\mathbb{R}} a_1(\tau)u(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(\tau_1+\omega,\tau_2+\omega)u(\tau_1)u(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \;\; ds <$$

$$< \delta L \int\limits_t^{+\infty} \exp(a_0(t-s))\,ds = \frac{\delta L}{a_0}.$$

$$J_2 \quad K \int\limits_t^{+\infty} [U(t+\omega, s+\omega) - U(t,s)]\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\,ds \;\; =$$

$$= K \; \Bigg(\exp\left[a_0(t-s) + \int\limits_s^t a_1(\tau+\omega)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b(\tau_1+\omega,\tau_2+\omega)\,d\tau_1 d\tau_2 + \right.$$

$$\left. + i\int\limits_{\mathbb{R}} a_1(\tau)u(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(\tau_1+\omega,\tau_2+\omega)u(\tau_1)u(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right] -$$

$$- \exp\left[a_0(t-s) + \int\limits_s^t a_1(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 + \right.$$

$$\left. + i\int\limits_{\mathbb{R}} a_1(\tau)u(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(\tau_1+\omega,\tau_2+\omega)u(\tau_1)u(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right]\Bigg)$$

$$KL \int\limits_t^{+\infty} \exp\left(a_0(t-s)\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_s^t (a_1(\tau+\omega) + a_1(\tau))\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int\limits_s^t\int\limits_s^t (b(\tau_1+\omega,\tau_2+\omega) + b(\tau_1,\tau_2))\,d\tau_1 d\tau_2\right) \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\int\limits_s^t (a_1(\tau+\omega) - a_1(\tau))\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int\limits_s^t\int\limits_s^t (b(\tau_1+\omega,\tau_2+\omega) - b(\tau_1,\tau_2))\,d\tau_1 d\tau_2 ds\right.$$

$$KLN \int\limits_t^{+\infty} \exp(a_0(s-t)) \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\int\limits_s^t (a_1(\tau+\omega) - a_1(\tau))\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int\limits_s^t\int\limits_s^t (b(\tau_1+\omega,\tau_2+\omega) - b(\tau_1,\tau_2))\,d\tau_1 d\tau_2\right) ds \;\; <$$

$$< KLN\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2\right) \int\limits_t^{+\infty} \exp(a_0(t-s))ds = \frac{KLN\,\mathrm{sh}(\delta)}{a_0}.$$

Таким образом получили, что $(y(y+\omega,u,v) - y(t,u,v)| < \frac{\delta L}{|a_0|} + \frac{KLN\,\mathrm{sh}(\delta)}{a_0}$.

Поскольку δ — любое число, то отсюда следует, что $y(t,u,v)$ — почти-периодическая функция по t. Аналогично рассматривается случай $a_0 > 0$.

5. ОГРАНИЧЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 3. Если $\varepsilon(t)$ случайный процесс, заданный характеристическим функционалом (5), где $\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(t)}$, $M\varepsilon(t) = a_0 + a_1(t)$ — непрерывные, ограниченные функции на вещественной оси, $b(s_1, s_2)$ непрерывная, ограниченная функция по каждой переменной, $a_0 \neq 0$, и $\int\limits_0^t a_1(\tau)\,d\tau$, $\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_1(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2$ — ограниченные функции по $t \in \mathbb{R}$, тогда уравнение (3) имеет ограниченное решение по переменной $t \in \mathbb{R}$, которое записывается в виде (7), (8).

Доказательство. 1) Пусть $a_0 > 0$. Устремим $t \to +\infty$ и положим, что $U(0,t)y(t,u,v) \to 0$ при $t \to +\infty$. Получим

$$Mx_0\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\varphi_f(v(\cdot)) = i\int\limits_0^{+\infty} U(0,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}\,ds.$$

Подставим найденное выражение в (9) и найдем

$$y(t,u(\cdot),v(\cdot)) = i\int\limits_t^{+\infty} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}\,ds.$$

Докажем, что это решение является ограниченным по переменной t

$$|y(t,u(\cdot),v(\cdot))| = \int\limits_t^{+\infty} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}\,ds \qquad K\int\limits_t^{+\infty} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\,ds =$$

$$= K\int\limits_t^{+\infty}\exp\Bigg[a_0(t-s) + \int\limits_s^t a_1(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+\ i\int\limits_{\mathbb{R}} a_1(\tau)u(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(\tau_1,\tau_2)u(\tau_1)u(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 ds\Bigg] \qquad KL\int\limits_t^{+\infty}\exp(a_0(t-s))\,ds = \frac{KL}{a_0}.$$

Значит, $y(t,u(\cdot),v(\cdot))$ — ограниченная на вещественной оси функция по t. Аналогично рассматривается случай $a_0 > 0$.

Теорема 4. Если $\varepsilon(t)$ случайный процесс, заданный характеристическим функционалом (5), где $M\varepsilon(t)$ — ограниченные функции, $b(s_1, s_2)$ ограниченная функция по каждой переменной, $M\varepsilon(t) \geqslant a_0 > 0$ (или $M\varepsilon(t) \quad a_0 < 0$), $a_0 \neq 0$, и $\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_1(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2$, $\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(t)}$ — ограниченные функции по $t \in \mathbb{R}$, тогда уравнение (3) имеет ограниченное решение по переменной $t \in \mathbb{R}$, которое записывается в виде (7), (8).

Доказательство. Формулы (7), (8) получаем также, как и в предыдущем случаи. Покажем, что при $a_0 > 0$ решение ограничено:

$$|y(t,u(\cdot),v(\cdot))| = \int\limits_t^{+\infty} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\frac{\delta\varphi_f(v(\cdot))}{\delta v(s)}\,ds \qquad K\int\limits_t^{+\infty} U(t,s)\varphi_\varepsilon(u(\cdot))\,ds =$$

$$= K\int\limits_t^{+\infty}\exp\left[\int\limits_s^t M\varepsilon(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 + \right.$$

$$\left. +i\int\limits_{\mathbb{R}} M\varepsilon(\tau)u(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(\tau_1,\tau_2)u(\tau_1)u(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 ds\right]$$

$$KL\int\limits_t^{+\infty}\exp(a_0(t-s))\,ds = \frac{KL}{a_0}.$$

Значит, $y(t,u(\cdot),v(\cdot))$ — ограниченная функция. Аналогично доказывается случай $a_0 > 0$.

6. ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ В СРЕДНЕМ РЕШЕНИЯ

Теорема 5. Если $\varepsilon(t)$ случайный процесс, заданный характеристическим функционалом (5), где $Mf(t)$, $M\varepsilon(t) = a_0 + a_1(t)$ — почти-периодические (ограниченные) функции, $b(s_1,s_2)$ почти-периодическая(ограниченная) функция по каждой переменной, $a_0 \neq 0$, и $\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_1(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2$ — ограниченные функции по t, тогда уравнение (1) имеет почти-периодическое (ограниченное) в среднем решение, математическое ожидание которого записывается в виде

$$Mx(t) = -\int\limits_t^{+\infty}\varphi_\varepsilon(i\chi(t,s))Mf(s)\,ds, \tag{10}$$

если $a_0 > 0$, и

$$Mx(t) = i\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi_\varepsilon(i\chi(t,s))Mf(s)\,ds, \tag{11}$$

если $a_0 < 0$.

Доказательство. Формулы (10), (11) следуют из формул (7), (8) и условия $y(t,0,0) = M(x(t))$.

Автор благодарен Задорожнему В.Г. за помощь в подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задорожний, В. Г. Методы вариационного анализа / В. Г. Задорожний. — М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и стохастическая динамика”, 2006. — 316 с.

2. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — С.-Пб.: Лань, 2008. — 480 с.

3. Перов, А. И. Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка / А. И. Перов, И. Д. Коструб. — Воронеж: Издетельско-полиграфический центр “Научная книга”, 2013. — 227 с.

4. Задорожний, В. Г. О периодических в среднем решениях линейного дифференциального уравнения первого порядка с равномерно распределенным случайным коэффициентом / В. Г. Задорожний // Вестник факультета ПММ. — 2009. — вып. 7. — С. 41–47.

5. Задорожний, В. Г. Периодические в среднем решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами / В. Г. Задорожний, Г. А. Курина // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 6. — С. 726–741.

6. Хасьминский, Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

7. Сухарев, А. Ю. О моментных функциях решения задачи Коши для однородного уравнения Шредингера со случайными коэффициентами / А. Ю. Сухарев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 151–159.

8. Костылев, В. И. Энергетическое различение некоторых случайных векторов / В. И. Костылев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 212–218.

9. Машков, Е. Ю. О стохастических уравнениях леонтьевского типа / Е. Ю. Машков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 121–128.

REFERENCES

1. Zadorozniy V. G. Methods of Variational Analysis. [Zadorozniy V. G. Metody variatsionnogo analiza]. Moscow–Izhevsk, 2006, 316 p.

2. Demidovich B. P. Lectures on mathematical theory of stability. [Demidovich B. P. Lekcii po matematicheskoi teorii ustoichivosti]. Saint Petersburg: Lan, 2008, 480 p.

3. Perov A. I., Kostrub I. D. Bounded solutions of nonlinear vector-matrix differential equations of n-th order. [Perov A. I., Kostrub I. D. Ogranichennye resheniya nelinejnyx vektorno-matrichnyx differencial'nyx uravnenij n-go poryadka]. Voronezh: CPI Science Book, 2013, 227 p.

4. Zadorozniy V. G. On Mean Periodic solutions of a linear differential equation of the first order with a uniformly distributed random factor. [Zadorozniy V. G. O periodicheskih v srednem resheniyah lineinogo differencialnogo uravneniya pervogo poryadka s ravnomerno raspredelennim sluchainim koefficientom]. *Vestnik fakulteta PMM — Proceedings of faculty AMM*, 2009, no. 7, pp. 41–47.

5. Zadorozniy V. G., Kurina G. A. Mean Periodic solutions of linear inhomogeneous first order differential equation with random coefficients. [Zadorozniy V. G., Kurina G. A. Periodicheskie v srednem resheniya lineinogo neodnorodnogo differencialnogo uravneniya pervogo poryadka so sluchainimi koefficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2014, vol. 50, iss. 6, pp. 726–741.

6. Khas'minskii R. Z. Stability of systems of differential equations under random perturbations of their parameters. [Hasminskii R. Z. Ustoichivost sistem differencialnih uravnenii pri sluchainih vozmuscheniyah ih parametrov]. Moscow: Nauka, 1969, 367 p.

7. Sukharev A. Y. On the moment functions of solutions of the Cauchy problem for the Schrödinger equation with homogeneous random coefficients. [Suharev A. Yu. O momentnih funkciyah resheniya zadachi Koshi dlya odnorodnogo uravneniya Shredingera so sluchainimi koefficientami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 151–159.

8. Kostylev V. I. Energy Separation of Some Random Vectors. [Kostylev V. I. E'nergeticheskoe razlichenie nekotoryx sluchajnyx vektorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 212–218.

9. Mashkov E. Yu. On the Stochastic Leontieff Type Equation. [Mashkov E. Yu. O stoxasticheskix uravneniyax leont'evskogo tipa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo*

universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2014, no. 3, pp. 121–128.

Ивакин А. Н., аспирант кафедры "Нелинейные колебания" Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: pwian@mail.ru
Тел.: 79081436543

Ivakin A. N., post-graduate student of department "Nonlinear oscillations", Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: pwian@mail.ru
Tel.: 79081436543