УДК 517.927.2; 517.972.2

НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

М. Г. Завгородний[1], С. П. Майорова[2]

[1] — *Воронежский государственный университет,*
[2] — *Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 10.02.2015 г.

Аннотация. Краевые задачи на геометрическом графе (сети) являются в настоящее время достаточно быстро развивающимся разделом теории дифференциальных уравнений. Вызвано это практическими потребностями, так как процессы в сетевых технических структурах (деформации сетки струн и стержневых систем, распределение давлений жидкости в разветвленной системе трубопроводов, распространение тепла в стержневых системах и др.), описываются именно краевыми задачами на геометрических графах.

Настоящая работа посвящена условиям невырожденности энергетических (то есть порождаемых квадратичными функционалами с неотрицательными коэффициентами) краевых задач второго порядка. Доказано, что решение однородной энергетической краевой задачи независимо от коэффициентов дифференциального уравнения на каждом ребре графа постоянно. Полученный результат позволяет найти достаточно простые необходимые и достаточные условия невырожденности энергетических краевых задач. При этом отпадает необходимость вычисления соответствующих характеристических определителей, что сопряжено с громоздкими выкладками, и проверять их равенство нулю. Так краевая задача, описывающая малые упругие поперечные деформации связной сетки струн, невырождена тогда и только тогда, когда существует ребро (струна), лежащее на упругом основании, либо существует вершина, закрепленная на неподвижной опоре или соединенная с пружиной, закрепленной на неподвижной опоре.

Ключевые слова: краевая задача на графе, самосопряженная краевая задача, энергетическая краевая задача, невырожденность.

NONDEGENERACY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF SECOND ORDER ON A GRAPH

M. G. Zavgorodnij, S. P. Majorova

Abstract. Boundary value problems on geometric graph (network) are now quickly developing section of the theory of differential equations. It is caused by practical needs, as the processes in the network technical structures (deformation grid of strings and rod systems, the distribution of pressure of fluid in a branched pipeline system, the distribution of heat in a rod systems, etc.), describes exactly boundary value problems on geometric graphs.

The present work is devoted to the terms of the nondegeneracy of the energy (that is generated by quadratic functionals with non-negative coefficients) of boundary value problems of second order. It is proved that the solution of the homogeneous energy of the boundary value problem regardless of the coefficients of the differential equation on each edge of a graph is continuously. This result allows you to find the rather simple necessary and sufficient conditions for non-degeneracy of the energy boundary value problems. In this case no need to calculate the corresponding of the characteristic determinants, that require cumbersome calculations, and check their equality to zero. So the boundary value problem describing small transverse elastic deformation of the coherent grid of strings, is non-degenerate then only when there is an edge (string), lying on an elastic foundation, either there exists a vertex attached to a fixed support, or connected with a spring attached to a fixed support.

Keywords: boundary value problem on the graph, self-adjoint boundary value problem, energy boundary value problem, nondegeneracy.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Краевым задачам второго порядка, заданным на геометрическом графе, посвящено достаточно много работ (см. монографию [1] и библиографию там же). В ряде этих работ показано, что как и в классической теории дифференциальных уравнений, критерием невырожденности краевых задач на графе является отличие от нуля соответствующего характеристического определителя. Однако указанный критерий сложен для проверки, а в ряде случаев и вообще не применим, так как необходимо знать фундаментальную систему решений дифференциального уравнения.

В настоящей работе доказан эффективный критерий однозначной разрешимости для класса краевых задач, порождаемых функционалами энергии. Он основан на вычислении ранга матрицы, построенной по коэффициентам условий, заданных на границе графа, и условий согласования решения во внутренних вершинах графа. При этом учитываются лишь коэффициенты при значениях решения, а коэффициенты при значениях производной отбрасываются. В частных случаях, важных для приложений, критерий невырожденности приводится в виде оценок количества линейно независимых условий в вершинах графа.

Пусть Γ – связный геометрический граф (см. [1]), в дальнейшем просто граф. Пусть V – множество его вершин и $\Im$ – объединение всех его ребер. На объединении ребер $\Im$ зададим функции $p(x)$ и $q(x)$, принадлежащие (см. [1], [2]) пространствам $C^1(\Im)$ и $C(\Im)$ соответственно. Полагаем $\inf\limits_{x\in\Im} p(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$ на $\Im$. Для произвольной функции $f(x) \in C(\Im)$ рассмотрим на графе Γ самосопряженную краевую задачу (см. [2]) для дифференциального уравнения второго порядка

$$-\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = f(x)(x \in \Im) \tag{1}$$

при нормированных условиях

$$\begin{cases} u(a_\gamma) - \sum\limits_{\eta\in I_1^a} \alpha^a_{\gamma\eta} u(a_\eta) = 0, & \gamma \in I_0^a, \\ u^a_\gamma + \sum\limits_{\eta\in I_0^a} \alpha^a_{\eta\gamma} u^a_\eta = \sum\limits_{\eta\in I_1^a} \alpha^a_{\gamma\eta} u(a_\eta), & \gamma \in I_1^a, \end{cases} \tag{2}$$

заданных в каждой вершине a, где I_0^a — произвольное подмножество множества I^a ребер, инцидентных вершине a; $I_1^a = I^a \backslash I_0^a$; $\alpha^a_{\gamma\eta}$, $\gamma, \eta \in I_0^a$ — произвольные константы и $\alpha^a_{\gamma\eta}$, $\gamma, \eta \in I_1^a$ – константы, удовлетворяющие соотношениям $\alpha^a_{\gamma\eta} = \alpha^a_{\eta\gamma}$. В условиях (2) через $u(a_\gamma)$ обозначен односторонний предел функции $u(x)$ в вершине a вдоль инцидентного ей ребра γ, а через u^a_γ обозначена величина $\pm p(a_\gamma)u'(a_\gamma)$, взятая со знаком "+", если ребро γ ориентировано к вершине a, и со знаком "–", если ребро γ ориентировано от вершины a.

Заметим, что в силу результатов работы [2] краевая задача второго порядка с условиями, локально заданными в вершинах графа, является самосопряженной тогда и только тогда, когда она приводима к виду (1), (2).

Нас будут интересовать условия, при которых краевая задача (1), (2) невырождена, то есть однозначно разрешима для любой функции $f(x) \in C(\Im)$.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Для каждой вершины $a \in V$ относительно односторонних пределов $u(a_\gamma)$, $\gamma \in I_1^a$, построим квадратичную форму $A^a u = \mathop{}_{\gamma,\eta \in I_1^a} \alpha^a_{\gamma\eta} u(a_\gamma)u(a_\eta)$ при коэффициентах $\alpha^a_{\gamma\eta}$, $\gamma,\eta \in I_1^a$, условий (2).

Краевую задачу (1), (2) назовем ***энергетической***, если для каждой вершины a неотрицательна соответствующая ей квадратичная форма A^a.

Теорема 1. *Любое решение $u(x)$ однородной энергетической краевой задачи для дифференциального уравнения*

$$-\big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x) = 0 (x \in \Im) \tag{3}$$

при условиях (2) на каждом ребре $\gamma \in \Im$ постоянно и удовлетворяет условиям

$$u(a_\gamma) - \sum_{\eta \in I_1^a} \alpha^a_{\gamma\eta} u(a_\eta) = 0, \quad \gamma \in I_0^a; \quad \sum_{\eta \in I_1^a} \alpha^a_{\gamma\eta} u(a_\eta) = 0, \quad \gamma \in I_1^a; \tag{4}$$

где $\alpha^a_{\gamma\eta}$ — константы те же, что в условиях (2). Причем, если $q(x) \equiv 0$ на некотором ребре γ, то $u(x) \equiv 0$ на этом ребре γ.

Доказательство. В силу теоремы 6 работы [2] решение $u(x)$ однородной энергетической задачи (3), (2) на каждом ребре $\gamma \in \Im$ постоянно. Причем, если $q(x) \equiv 0$ на некотором ребре, то $u(x) \equiv 0$ на этом ребре. Подставим решение $u(x)$ в условия (2). Учитывая, что $u'(x) \equiv 0$ на $\Im$, получим условия (4). *Теорема доказана.*

Итак, в силу теоремы 1 решение $u(x)$ однородной энергетической краевой задачи (3), (2) на каждом ребре $\gamma \in \Im$ тождественно равно некоторой константе c_γ. Обозначим через $\Im_0$ множество ребер, на каждом из которых функция $q(x)$ не равна тождественно нулю. Положим $\Im_1 = \Im \backslash \Im_0$. По определению на каждом ребре $\gamma \in \Im_1$ функция $q(x) \equiv 0$.

Следствие. *Константы $c_\gamma, \gamma \in \Im$, задающие решение однородной энергетической краевой задачи (3), (2), удовлетворяют однородным условиям*

$$c_\gamma = 0, \quad \gamma \in \Im_0; \quad c_\gamma - \sum_{\eta \in I_1^a \cap \Im_1} \alpha^a_{\gamma\eta} c_\eta = 0, \quad \gamma \in I_0^a; \quad \sum_{\eta \in I_1^a \cap \Im_1} \alpha^a_{\gamma\eta} c_\eta = 0, \quad \gamma \in I_1^a, \tag{5}$$

где $\alpha^a_{\gamma\eta}$ — константы те же, что в условиях (2).

Доказательство. В силу теоремы 1 и определения множества ребер $\Im_0$ решение $u(x)$ энергетической краевой задачи (3), (2) на каждом ребре $\gamma \in \Im_0$ тождественно равно нулю; следовательно, $c_\gamma = 0$ при $\gamma \in \Im_0$. Для каждого ребра $\gamma \in \Im$ в условиях (4) вместо решения $u(x)$ подставим соответствующую ему константу c_γ и исключим из сумм ребра $\gamma \in \Im_0$, на которых $u(x) \equiv 0$. Получим для констант c_γ, $\gamma \in \Im$, условия (5). **Следствие доказано**.

3. НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Так как для каждой вершины a выполняется $I_0^a \subset I^a$ и $I_1^a = I^a \backslash I_0^a$, то количество условий (2), заданных в вершине a, равно количеству ребер множества I^a, то есть равно δ^a, где δ^a – степень вершины a. Поэтому количество κ^a линейно независимых условий (5) в вершине a не превосходит δ^a. Обозначим через V множество всех вершин графа Γ, а через V_0 множество всех вершин $a \in V$, для которых $\kappa^a = \delta^a$.

Лемма 1. *Пусть вершина a принадлежит множеству V_0. Тогда решение однородной энергетической краевой задачи (3), (2) равно тождественно нулю на каждом ребре, инцидентном вершине a.*

Доказательство. Если вершина $a \in V_0$, то количество линейно независимых однородных условий (5) в вершине a равно количеству неизвестных c_γ, $\gamma \in I^a$: $\kappa^a = \delta^a$. Следовательно, $c_\gamma = 0$, $\gamma \in I^a$, то есть $u(x) \equiv 0$ на всех ребрах $\gamma \in I^a$. *Лемма доказана.*

Пусть $\Im_2$ – множество ребер, инцидентных хотя бы одной вершине, принадлежащей множеству V_0.

Лемма 2. *Энергетическая краевая задача (1), (2) невырождена, если каждое ребро, на котором коэффициент $q(x)$ дифференциального уравнения (1) равен тождественно нулю, принадлежит множеству $\Im_2$.*

Доказательство. В силу условия леммы имеем $\Im_0 = \Im_2$. Следовательно, $c_\gamma = 0$ как при $\gamma \in \Im_0$, так и при $\gamma \in \Im_1$. Так как $\Im_0 \cup \Im_1 = \Im$, то решение $u(x)$ однородной энергетической задачи (3), (2) тривиально на всем $\Im$, а значит энергетическая краевая задача (1), (2) невырождена. *Лемма доказана.*

Следствие. *Энергетическая краевая задача (1), (2) невырождена, если коэффициент $q(x)$ дифференциального уравнения (1) отличен от тождественного нуля на каждом ребре графа* Γ.

Исключим из сумм условий (5) все ребра множества $\Im_2$. Обозначим через B матрицу полученной однородной системы линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{ll} c_\gamma - \mathop{}\limits_{\eta \in I_1^a \cap \Im_3} \alpha^a_{\gamma\eta} c_\eta = 0, & \gamma \in I_0^a, \\ \mathop{}\limits_{\eta \in I_1^a \cap \Im_3} \alpha^a_{\gamma\eta} c_\eta = 0, & \gamma \in I_1^a, \end{array}\right. \qquad a \in V \backslash V_0,$$

где $\Im_3 = \Im_1 \backslash \Im_2$. Заметим, что количество столбцов матрицы B равно количеству ребер множества $\Im_3$ и не превосходит количества строк.

Теорема 2 (критерий невырожденности). *Энергетическая краевая задача (1), (2) невырождена тогда и только тогда, когда ранг матрицы B равен количеству ее столбцов.*

Доказательство. В силу теоремы 1 и леммы 1 размерность пространства решений однородной энергетической краевой задачи (3), (2) совпадает с размерностью r пространства решений системы $B\mathbf{c} = 0$, где $\mathbf{c}$ — вектор-столбец, составленный из констант c_γ, $\gamma \in \Im_3$. Так как количество ρ столбцов матрицы B не превосходит количества ее строк, то $r = \rho - rangB$. Следовательно, энергетическая краевая задача (1), (2) невырождена тогда и только тогда, когда ранг матрицы B равен ρ. *Теорема доказана.*

4. НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим частный случай энергетической краевой задачи (1), (2), важный для приложений. А именно, будем полагать, что коэффициенты условий (2) удовлетворяют следующим условиям:

I) в каждой вершине a графа Γ задано не менее $\delta^a - 1$ линейно независимых условий (4), где δ^a – степень вершины a;

II) если количество линейно независимых условий (4) во внутренней вершине a равно $\delta^a - 1$, то эти условия эквивалентны условиям

$$u(a_\gamma) = \beta^a_{\gamma\eta} u(a_\eta), \quad \gamma \in I^a \backslash \{\eta\}, \tag{6}$$

при некотором ребре $\eta \in I^a$ и ненулевых константах $\beta^a_{\gamma\eta}$, $\gamma \in I^a \backslash \{\eta\}$.

Заметим, что если количество линейно независимых условий равно δ^a, то, как отмечалось выше, условия (4) эквивалентны условиям $u(a_\gamma) = 0$, $\gamma \in I^a$. Следовательно, равенства (6) выполняются и в этом случае, например, при $\beta^a_{\gamma\eta} = 1$, $\gamma \in I^a \backslash \{\eta\}$.

Теорема 3. *Если выполнены условия I) и II), то решение $u(x)$ однородной энергетической краевой задачи (3), (2) либо тождественно равно нулю на всем объединении ребер $\Im$, либо не имеет нулей на $\Im$.*

Доказательство. Пусть решение $u(x)$ однородной энергетической краевой задачи обращается в нуль в некоторой точке x_0 некоторого ребра γ. Тогда в силу теоремы 1 имеем $u(x) \equiv 0$ на γ. Итак, существует непустое подмножество $\Im'$ множества ребер $\Im$, на котором решение $u(x)$ тождественно равно нулю. Пусть V' – множество вершин, инцидентных ребрам множества $\Im'$. Тогда в силу равенств (6) решение $u(x)$ тождественно равно нулю на всех ребрах, инцидентных вершинам $a \in V'$. Следовательно, в силу связности графа Γ решение $u(x)$ тождественно равно нулю на всем объединении ребер $\Im$. *Теорема доказана.*

Пусть ребра γ_k, $k = \overline{1,r}$, образуют простой цикл. Пусть β_k, $k = \overline{1,r}$ — константы согласования решения $u(x)$ однородной краевой задачи (3), (2) на ребрах γ_k, γ_{k+1} в их общей вершине a^k: $u(a^k_{\gamma_k}) = \beta_k u(a^k_{\gamma_{k+1}})$, где $\gamma_{r+1} = \gamma_1$. Рассмотрим соотношение

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_r = 1. \tag{7}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия I) и II). Тогда энергетическая краевая задача (1), (2) невырождена тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) существует ребро, на котором функция $q(x)$ отлична от тождественно нулевой;

2) существует вершина a, для которой количество κ^a линейно независимых условий (4) равно δ^a;

3) существует простой цикл, для которого не выполняется соотношение (7).

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение однородной энергетической краевой задачи (3), (2).

1) Пусть существует ребро γ, на котором $q(x){\equiv}0$. Тогда в силу теоремы 1 $c_\gamma = 0$, и в силу теоремы 3 имеем $u(x) \equiv 0$ на $\Im$.

2) Пусть существует вершина a, для которой $\kappa^a = \delta^a$. Тогда в силу леммы 1 $c_\gamma = 0$ при любом $\gamma \in I^a$. Отсюда в силу теоремы 3 $u(x) \equiv 0$ на $\Im$.

3) Пусть существует простой цикл, для которого не выполняется соотношение (7). Тогда тождество $\beta_1\beta_2\ldots\beta_r \cdot c = c$ выполняется, только если значение c решения $u(x)$ на первом ребре цикла равно нулю. Следовательно, $u(x) \equiv 0$ на $\Im$.

Во всех трех случаях мы показали, что решение $u(x)$ тривиально, а это означает невырожденность рассматриваемой краевой задачи.

Пусть теперь не выполняется ни одно из трех условий теоремы, то есть пусть $\Im_0 = \varnothing$, $V_0 = \varnothing$ и выполняется условие (7) для любого простого цикла графа Γ, если такие циклы существуют. Тогда функция $u(x)$, тождественно равная на каждом ребре $\gamma \in \Im$ константе c_γ, при любых константах c_γ, таких, что выполняются условия (6), удовлетворяет как однородному дифференциальному уравнению (3), так и условиям (2), что и означает вырожденность энергетической краевой задачи (1), (2). *Теорема доказана.*

Остановимся на приложениях теорем, доказанных в этом пункте.

5. НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДЕФОРМАЦИИ СЕТКИ НЕПРЕРЫВНО СВЯЗАННЫХ СТРУН

Вершину $a \in V$ назовем *граничной*, если ее степень δ^a равна единице, и *внутренней* в противном случае, когда $\delta^a > 1$. Множество всех граничных вершин обозначим через $\partial\Gamma$ и будем называть *границей графа* Γ.

Рассмотрим самосопряженную краевую задачу (1), (2), у которой условия (2) имеют следующий вид

$$u(a_\gamma) = u(a_\eta), \quad \gamma \in I^a \backslash \{\eta\}; \quad \sum_{\gamma \in I^a} u^a_\gamma + \beta^a \cdot u(a_\eta) = 0 \tag{8}$$

в каждой внутренней вершине a при некотором $\eta \in I^a$ и

$$\alpha^a u^a_\eta + \beta^a \cdot u(a_\eta) = 0 \quad (\alpha^a \geqslant 0, |\alpha^a| + |\beta^a| \neq 0) \tag{9}$$

в каждой граничной вершине a, где η – ребро, инцидентное a. Здесь α^a, $a \in \partial\Gamma$, и β^a, $a \in V$ — некоторые константы.

Лемма 3. *Краевая задача (1), (8), (9) является энергетической тогда и только тогда, когда* $\beta^a \geqslant 0$ *для любой вершины* a.

Доказательство. Пусть $\beta^a \geqslant 0$ для любой вершины a. Тогда для каждой вершины a соответствующая ей квадратичная форма $A^a u = \beta^a \cdot u^2(a_\eta)$ неотрицательна, и краевая задача (1), (8), (9) является энергетической.

Обратно. Пусть краевая задача (1), (8), (9) является энергетической, то есть пусть все приведенные выше квадратичные формы A^a, $a \in V$, неотрицательны. Тогда $\beta^a \geqslant 0$ для любой вершины a. *Лемма доказана.*

Лемма 4. *Решение однородной энергетической краевой задачи (3), (8), (9) постоянно на всем объединении ребер* $\Im$.

Доказательство. В силу теоремы 1 для решения однородной энергетической краевой задачи (3), (8), (9) имеем $u(x) \equiv c_\gamma$ на ребре γ. Причем в силу первой группы условий (8) константы c_γ удовлетворяют условиям $c_\gamma = c_\eta$ при любых $\gamma, \eta \in I^a$, а, следовательно, в силу связности графа Γ и при любых $\gamma, \eta \in \Im$. Итак, $u(x) \equiv c$ на всем объединении ребер $\Im$, где c — константа. *Лемма доказана.*

Теорема 5. *Энергетическая краевая задача (1), (8), (9) невырождена тогда и только тогда, когда существует ребро, на котором* $q(x) \not\equiv 0$ *или существует вершина* a*, для которой* $\beta^a > 0$.

Доказательство. Для энергетической краевой задачи (1), (8), (9) условия I) и II) пункта 4 выполняются. Причем, если $\beta^a > 0$ для некоторой вершины a, то количество линейно независимых условий (4) в этой вершине a равно δ^a. Следовательно, в силу теоремы 4 верно искомое утверждение. Заметим, что в силу условий (8) невырожденность энергетической краевой задачи (1), (8), (9) не зависит от наличия или отсутствия циклов графа Γ. Действительно, так как в каждой внутренней вершине a коэффициенты $\beta^a_{\gamma\eta}$ условий (8) равны единице, то соотношение (7) выполняется для любого существующего простого цикла. *Теорема доказана.*

Энергетическая краевая задача (1), (8), (9) моделирует малые упругие деформации сетки струн, у которой в каждом общем узле непрерывно связаны все струны, инцидентные этому узлу. Коэффициент $p(x)$ дифференциального уравнения (1) задает реакцию струн на растяжение, а коэффициент $q(x)$ – интенсивность жесткости упругого основания, на котором располагаются струны. Правая часть дифференциального уравнения (1) является интенсивностью внешних воздействий. В силу физической природы $p(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$ на множестве $\Im$.

У рассматриваемой сетки все концы a_γ, $\gamma \in I^a$, струн, инцидентных одной и той же внутренней вершине a, смещаются на одно и то же расстояние, то есть выполняется первая группа условий (8). Если $\beta^a > 0$ для внутренней вершины a (общего узла струн), то вершина a соединена с закрепленной на неподвижной опоре пружиной жесткости β^a. Рассмотрим теперь условия (9) для граничной вершины a. Если $\alpha^a = 0$, то конец a_γ струны, инцидентной вершине a, закреплен на неподвижной опоре. Если $\beta^a = 0$, то конец струны a_γ свободен. Наконец, если $\alpha^a > 0$ и $\beta^a > 0$, то граничная вершина a соединена с закрепленной на неподвижной опоре пружиной жесткости $k^a = \beta^a/\alpha^a$.

В силу физических соображений $\beta^a \geqslant 0$ для любой вершины a. Следовательно, краевая задача (1), (8), (9), моделирующая малые упругие деформации сетки непрерывно связанных струн, является энергетической.

Сформулируем теорему настоящего пункта в других терминах.

Теорема 5а. *Краевая задача, моделирующая малые упругие деформации сетки непрерывно связанных струн, невырождена тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) существует ребро, на котором интенсивность жесткости упругого основания $q(x)$ отлична от тождественно нулевой функции;

2) существует вершина (граничная или внутренняя), соединенная с пружиной, закрепленной на неподвижной опоре;

3) существует граничная вершина, закрепленная на неподвижной опоре.

6. НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДЕФОРМАЦИИ СВЯЗНОЙ СЕТКИ СТРУН

Для каждой внутренней вершины a множество I^a инцидентных ей ребер при некотором натуральном числе $p \leqslant \delta^a$ разобьем на такие подмножества I_1^a, $I_2^a, \ldots$, I_p^a, что $\bigcup\limits_{j=1}^{p} I_j^a = I^a$ и $I_j^a \cap I_k^a = \varnothing$ для любых $j \neq k$. Пусть эти множества занумерованы так, что множества I_1^a, $I_2^a, \ldots$, I_r^a при некотором $r \geqslant 0$ содержат не менее двух ребер, а остальные I_{r+1}^a, $I_{r+2}^a, \ldots$, I_p^a состоят ровно из одного ребра. В каждом множестве I_j^a произвольным образом выбираем одно ребро γ_j^a. Рассмотрим самосопряженную краевую задачу (1), (2), у которой условия (2) в каждой граничной вершине a имеют вид (9), а в каждой внутренней вершине a – следующий вид:

$$u(a_\gamma) = u(a_{\gamma_j^a}), \quad \gamma \in I_j^a \backslash \{\gamma_j^a\}, \quad j = \overline{1, r}, \tag{10}$$

$$\sum_{\gamma \in I_j^a} u_\gamma^a + \beta_j^a u(a_{\gamma_j^a}) + \sigma_{j-1}^a \Delta_{j-1}^a u - \sigma_j^a \Delta_j^a u = 0, \quad j = \overline{1, p}, \tag{11}$$

где $\Delta_0^a u = \Delta_p^a u = 0$, $\Delta_j^a u = u(a_{\gamma_{j+1}^a}) - u(a_{\gamma_j^a})$, $j = \overline{1, p-1}$; β_j^a, σ_j^a $(j = \overline{1, p})$ – некоторые константы. Для определенности полагаем $\sigma_0^a = \sigma_p^a = 0$.

Лемма 5. *Краевая задача (1), (9)–(11) является энергетической тогда и только тогда, когда неотрицательны все коэффициенты условий (9)–(11).*

Доказательство. Для каждой вершины $a \in V$ построим (см. пункт 2) квадратичную форму A^a. Имеем $A^a u = \beta^a \cdot u^2(a_\eta)$, если вершина a граничная и $A^a u = \sum\limits_{j=1}^{p} \left(\beta_j^a \cdot u^2(a_{\gamma_j^a}) + \sigma_{j-1}^a \left[\Delta_{j-1}^a u\right]^2 + \sigma_j^a \left[\Delta_j^a u\right]^2\right)$, если вершина a внутренняя.

Пусть все коэффициенты условий (9)–(11) неотрицательны. Тогда все квадратичные формы A^a, $a \in V$, неотрицательны и, следовательно, краевая задача (1), (9)–(11) является энергетической.

Обратно. Пусть краевая задача (1), (9)–(11) является энергетической, то есть пусть все квадратичные формы A^a, $a \in V$, неотрицательны. Тогда, все коэффициенты условий (9)–(11) неотрицательные. *Лемма доказана.*

Лемма 6. *Решение однородной энергетической краевой задачи (3), (9)–(11) постоянно на всем объединении ребер $\Im$. Причем оно равно тождественно нулю на $\Im$, если хотя бы один коэффициент β_j^a условий (11) строго больше нуля хотя бы для одной внутренней вершины a или $\beta^a > 0$ хотя бы для одной граничной вершины a.*

Доказательство. В силу теоремы 1 решение $u(x)$ однородной энергетической краевой задачи (3), (9) - (11) постоянно на каждом ребре $\gamma \in \Im$ и удовлетворяет в каждой внутренней вершине a условиям (10) и следующим условиям $\beta_j^a u(a_{\gamma_j^a}) + \sigma_{j-1}^a \Delta_{j-1}^a u - \sigma_j^a \Delta_j^a u = 0$, $j = \overline{1,p}$. Отсюда $u(a_\gamma) \equiv c$ на каждом ребре $\gamma \in I^a$, а, следовательно, и на объединении ребер $\Im$. Причем c – произвольная константа, если все $\beta_j^a = 0$, $j = \overline{1,p}$, для каждой внутренней вершины a и $\beta^a = 0$ для каждой граничной вершины a. Если хотя бы один из перечисленных коэффициентов условий (9), (11) строго больше нуля, то $c = 0$. **Лемма доказана.**

Теорема 6. *Энергетическая краевая задача (1), (9) – (11) невырождена тогда и только тогда, когда либо существует ребро, на котором* $q(x) \equiv 0$, *либо существует внутренняя вершина* a, *для которой* $\beta_j^a > 0$ *при некотором* j $(1 \quad j \quad p)$, *либо существует граничная вершина* a, *для которой* $\beta^a > 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

Энергетическая краевая задача (1), (9) - (11) моделирует малые упругие деформации связной сетки струн. Как уже отмечалось, коэффициенты $p(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$ дифференциального уравнения (1) задают реакцию струн на растяжение и интенсивность жесткости упругого основания, на котором располагаются струны, а правая часть уравнения (1) является интенсивностью внешних воздействий.

Каждому подмножеству I_j^a множества I^a ребер, инцидентных внутренней вершине a, соответствует группа струн, непрерывно связанных между собой. Эта связь обеспечивает в их общем узле a одинаковость линейных перемещений концов всех струн, принадлежащих к этой группе I_j^a. Следовательно, для каждой группы струн I_j^a выполняются условия (10).

Каждая группа струн I_j^a соединена в их общем узле a пружиной со следующей группой струн I_{j+1}^a. Жесткость пружины, соединяющей группы струн I_j^a и I_{j+1}^a, равна $\sigma_j^a > 0$. Кроме того, если $\beta_j^a > 0$, то группа струн I_j^a соединена в их общем узле a с пружиной, закрепленной на неподвижной опоре. Жесткость такой пружины равна β_j^a. Перечисленные связи струн с пружинами задают условия (11). Механическая интерпретация условий (9) для граничной вершины дана в предыдущем пункте.

Итак, краевая задача (1), (9) - (11) описывает малые упругие деформации описанной выше связной сетки струн. При этом (см. лемму 5) в силу задания коэффициентов дифференциального уравнения (1) и условий (9) - (11) эта краевая задача является энергетической.

Теорему 6 можно сформулировать в следующих терминах.

Теорема 6а. *Краевая задача, моделирующая малые упругие деформации связной сетки струн, невырождена тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий теоремы 5а.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, А. В. Боровских и др. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.

2. Завгородний, М. Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе / М. Г. Завгородний // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 446–456.

3. Баев, А. Д. о свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

4. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

5. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

6. Давыдова, М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений

второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

7. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

REFERENCES

1. Pokornyi Yu. V., Penkin O. M., Pryadiev V. L. et. al. Differential Equations on Geometric Graphs. [Pokornyj Yu. V., Penkin O. M., Pryadiev V. L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: FIZMATLIT, 2004, 272 p.

2. Zavgorodnij M.G. Adjoint and Self-Adjoint Boundary Value Problems on a Geometric Graph. [Zavgorodnij M.G. Sopryazhennye i samosopryazhennye kraevye zadachi na geometricheskom grafe]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 446–456.

3. Baev A. D., Kobylinskii P. A., Davidova M. B. On the Properties of Switching a Class of Degenerate Pseudo-Differential Operators with the Operators Of Differentiation. [Baev A. D., Kobylinskij P. A., Davydova M. B. o svojstvax kommutacii odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov s operatorami differencirovaniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 102–108.

4. Baev A. D., Shabrov S. A., Golovaneva F. V., Meach Mon About unique classical solution mathematical model of forced vibrations rod system with singularities. [Baev A. D., Shabrov S. A., Golovanyova F. V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

5. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

6. Davydova M. B., Shabrov S. A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

7. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon Uniqueness Of The Solution Mathematical Model Of Forced String Oscillation Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon O edinstvennosti resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 50–55.

Завгородний Михаил Григорьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: zavgorodnijm@yandex.ru
Тел.: (473)247–57–65

Zavgorodnij Mikhail G., Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Functional Analysis and Operational Equations of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zavgorodnijm@yandex.ru
Tel.: (473)247–57–65

Майорова Светлана Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования Воронежского государственного технического университета, Воронеж, Россия
E-mail: spmajorova@yandex.ru

Majorova Svetlana P., Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Physical and Mathematical Modeling of Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
E-mail: spmajorova@yandex.ru