УДК 539.374

О БОКОВОМ ВЫДАВЛИВАНИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ИЗ КОНТЕЙНЕРА

И. Н. Желнов, Ю. М. Мяснянкин, А. И. Шашкин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.01.2015 г.

Аннотация. В работе рассматривается один из вариантов задачи о боковом выдавливании через отверстие жесткопластического материала из гладкого контейнера в условиях плоской деформации. Пластический материал считается несжимаемым, а стенки контейнера считаются абсолютно гладкими. Угол раствора веера характеристик предполагается заранее неизвестным и определяется при решении задачи в напряжениях. Показано, что в некоторых случаях при решении подобных задач предельное давление на штамп можно определить без подробного анализа напряженного состояния в пластической области. Результаты, полученные в криволинейных координатах, сравниваются с известным решением.

Ключевые слова: пластичность, плоская деформация, боковое выдавливание из контейнера, предельная нагрузка, теория течения.

ABOUT SIDE EXTRUSION PLASTIC MATERIAL CONTAINER

I. N. Zhelnov, Y. M. Myasnyankin, A. I. Shashkin

Abstract. The paper deals with one of the variants of the lateral extrusion of the material through the hole of a rigid container in a smooth plane strain. Plastic material is considered to be incompressible, and the container wall are considered absolutely smooth. Fan angle characteristics assumed known in advance and determined to solve the problem on their toes. It is shown that in some cases, when solving such problems limit the pressure on the stamp can be determined without a detailed analysis of the state of stress in the plastic region. Results obtained in curvilinear coordinates are compared with the known solution.

Keywords: plasticity, plane strain, side squeezing from the container, load limit, theory of flow.

ВВЕДЕНИЕ

Ввиду практической значимости, технологические задачи формовки (прокатка, волочение, штамповка и др.) рассматривались многими авторами: А. Надаи, Л. Прандтлем, Г. Генки, Р. Хиллом, В. В. Соколовским, Л. М. Качановым, Д. Д. Ивлевым и другими. Достаточно полные списки литературы по этим исследованиям изложены в монографиях [1]–[3]. Одна из таких практически важных задач была рассмотрена двумя авторами в работе [6]. В данном исследовании решается задача о боковом выдавливании пластического материала из контейнера, проводится сравнение результатов с известным решением.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О БОКОВОМ ВЫДАВЛИВАНИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ИЗ КОНТЕЙНЕРА

Рассмотрим задачу о боковом выдавливании идеально жесткопластического материала из контейнера при условии плоской деформации. В полости контейнера расположен жесткопластический материал, который выдавливается из него жестким штампом шириной H через отверстие CD шириной h (рис. 1). Пусть стенки контейнера абсолютно гладкие, штамп движется вниз со скоростью V_0.

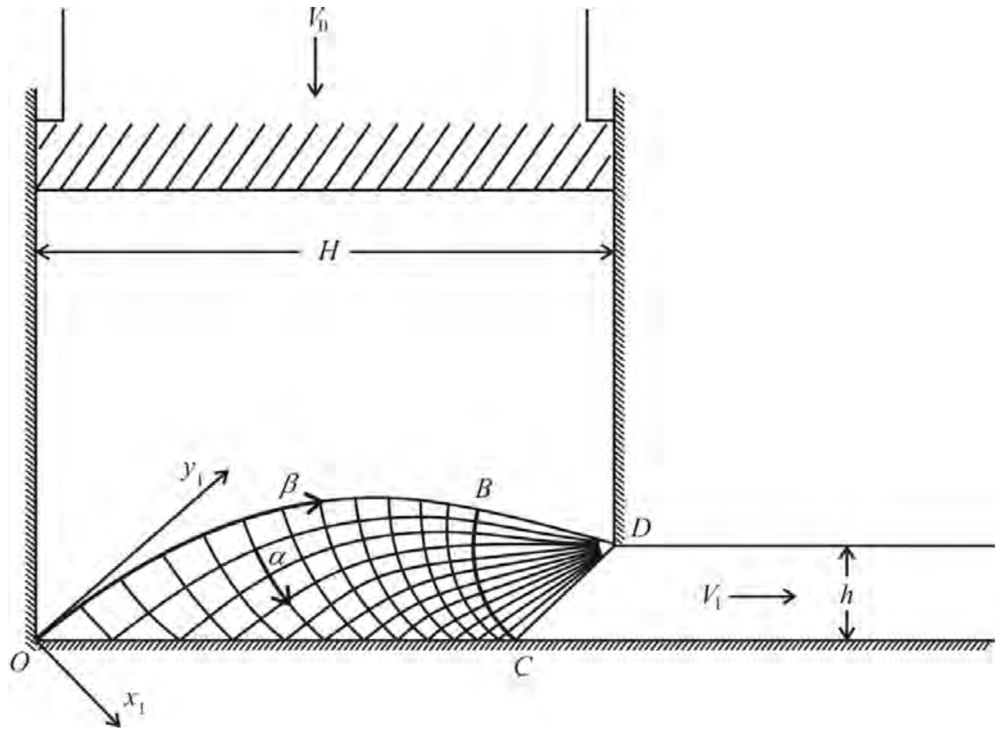

Рис. 1. *Схема бокового выдавливания идеально жесткопластического материала из контейнера с изображением предполагаемой сетки линий скольжения.*

Здесь $OBDC$ – пластическая область, OBD и DC – жесткопластическая граница, BDC – веер характеристик с вершиной в точке D, материал выше линии OBD и правее линии CD будем считать жестким, а CD – отрезком прямой. Так как стенки контейнера абсолютно гладкие, то линии скольжения составляют с ними угол равный $\frac{\pi}{4}$, а угол веера CDB (обозначим его через γ) меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Аналогичная сетка линий скольжения рассмотрена в задаче о давлении гладкого плоского штампа на жесткопластическую полосу, лежащую на гладком основании в предположении, что вдоль контактной поверхности штампа действует равномерно распределенное нормальное давление [1], [2]. Заметим, что угол BDC заранее неизвестен, но его можно определить путем решения задачи в напряжениях из условия совпадения конца сетки линий скольжения с точкой O (рис. 1), или рассматривая поле скоростей.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ “В СКОРОСТЯХ”

Рассмотрим поле скоростей, заданное уравнениями Гейрингер:

$$\begin{cases} du - vd\varphi = 0 & \text{вдоль линии} \quad \alpha, \\ dv + ud\varphi = 0 & \text{вдоль линии} \quad \beta, \end{cases} \tag{1}$$

где u и v – компоненты вектора скорости, отнесенные к линиям α и β соответственно, φ — угол между осью x и направлением линии α.

Введем криволинейные координаты (α, β), связанные линиями α и β как криволинейными осями [1].

$$2\alpha = \frac{\sigma_0}{2k} - \left(\frac{\sigma}{2k} - \varphi\right), \qquad 2\beta = -\frac{\sigma_0}{2k} + \left(\frac{\sigma}{2k} + \varphi\right). \tag{2}$$

Здесь k — предел текучести материала, σ — гидростатическое давление, σ_0 — значение гидростатического давления σ в начале координат.

Из соотношений (2) следует, что $\varphi = \alpha + \beta$. Тогда $d\varphi = d\alpha$ на линии α, $d\varphi = d\beta$ на линии β, и уравнения (1) могут быть переписаны в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} - v = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \beta} + u = 0, \tag{3}$$

исключая вырожденный случай, когда одно из семейств линий скольжения является отрезками прямых.

Для нахождения поля скоростей проще всего применитьчисленное интегрирование уравнений (3) в плоскости (α, β) [1], [2].

Введем декартову систему координат x_1Oy_1, так чтобы в точке O выполнялись равенства $\alpha = \beta = 0$. Так как в контейнере жесткий материал движется вниз со скоростью V_0, то

$$\left.\begin{array}{l} \text{вдоль линии } OB: \alpha = 0, \quad -\gamma \leqslant \beta \leqslant 0, \quad u = V_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right), \\ \text{вдоль линии } OC: \alpha = -\beta, \quad u = v. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) получим значение скорости v вдоль линии OB:

$$\alpha = 0, \ -\gamma \leqslant \beta \leqslant 0, \ v = -V_0\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) - \sqrt{2}\right). \tag{5}$$

Таким образом, поле скоростей в области OBC определяется путем решения третьей краевой задачи для уравнений (3).

С другой стороны, скорость жесткой зоны V_0 и горизонтальная скорость V_1 вследствие несжимаемости пластического материала связаны соотношением:

$$HV_0 = hV_1. \tag{6}$$

Приравнивая горизонтальную скорость в точке C, полученную из решения краевой задачи (3) – (5) при $\alpha = -\beta = \gamma$, к V_1 из (6), придем к соотношению между углом раствора веера γ и геометрическими размерами контейнера $\frac{H}{h}$.

Зависимость между углом γ и безразмерной величиной $\frac{H}{h}$ представлена на рис. 2. Пунктирная линия на этом рисунке соответствует решению, полученному Соколовским В. В. [2], который исходил из рассмотрения напряженного состояния.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ШТАМП

Для определения предельного давления P на штамп спроектируем все силы, действующие по сечению *OMCD,* на вертикальную ось (рис. 3). Такой прием используется в работе [4].

Проектируя все силы, действующие вдоль CD, на горизонтальную ось и приравнивая их сумму к нулю, получим значение σ в точке C:

$$\sigma_C = -k. \tag{7}$$

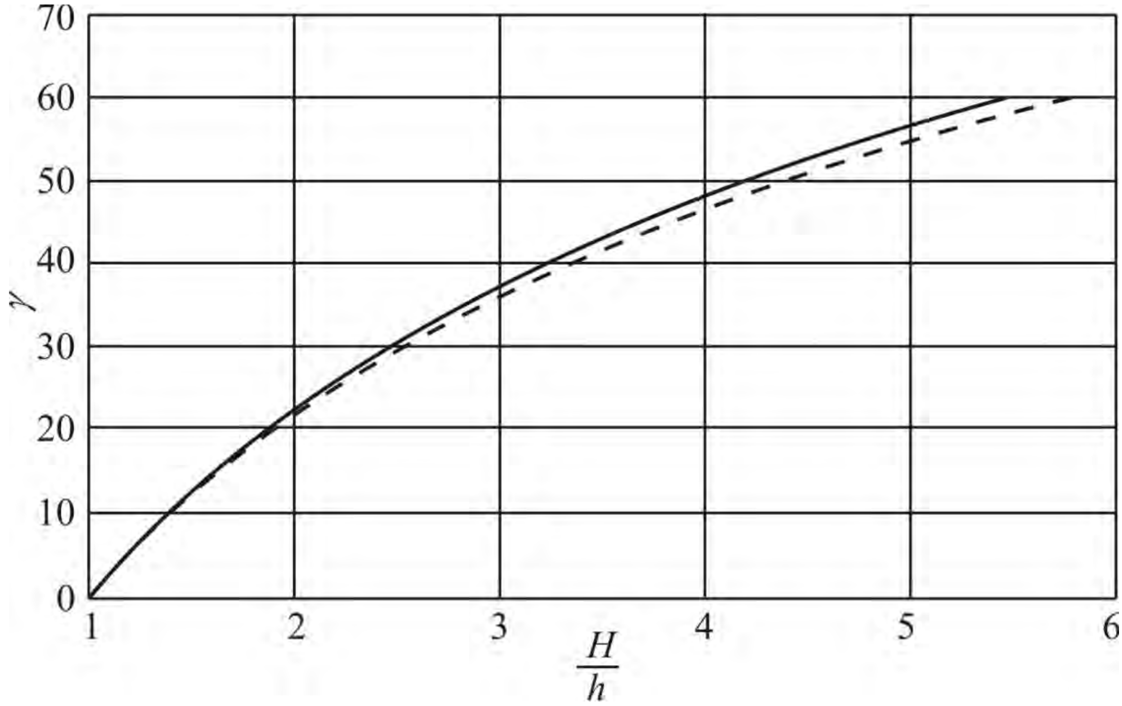

Рис. 2. *График зависимости угла раствора веера* γ *от безразмерной величины* $\frac{H}{h}$.

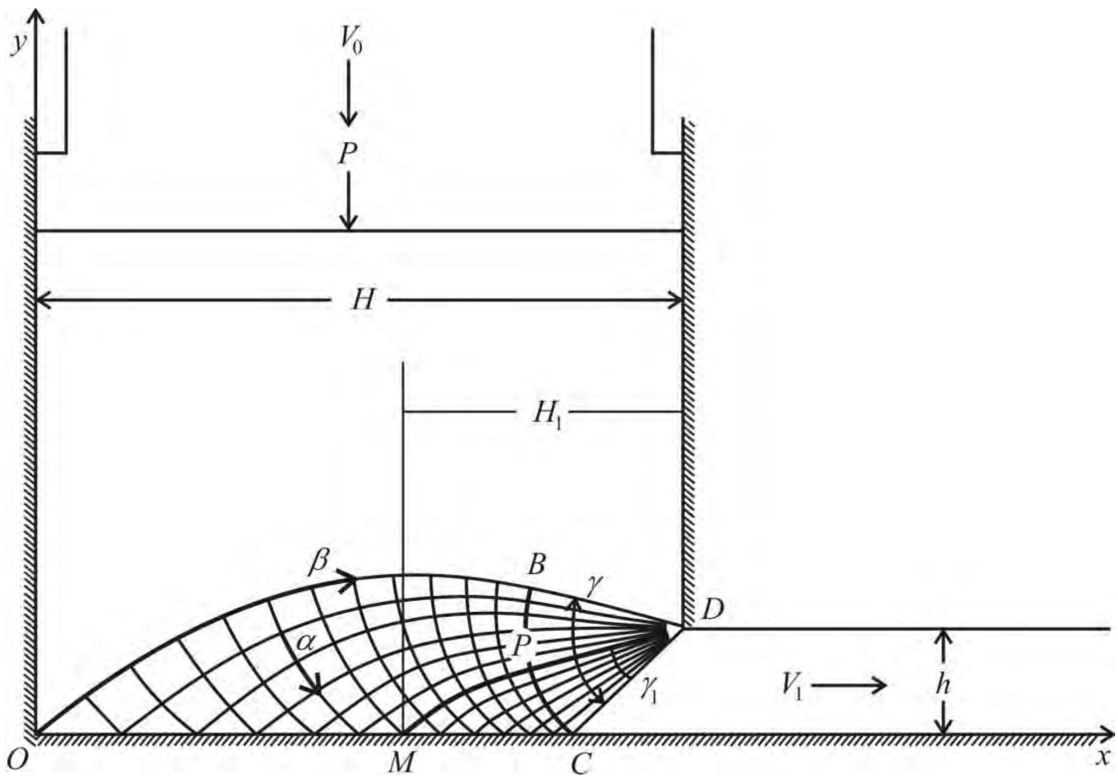

Рис. 3. *Схема определения напряжений и предельного давления на штамп*

В дальнейшем воспользуемся соотношениями Генки и заменой Леви [1]–[3]:

$$\begin{cases} \sigma - 2k\varphi = const \text{ вдоль } \alpha - \text{линии}, \\ \sigma + 2k\varphi = const \text{ вдоль } \beta - \text{линии}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma - k\sin 2\varphi, \\ \sigma_y = \sigma + k\sin 2\varphi, \\ \tau_{xy} = k\cos 2\varphi. \end{cases} \tag{9}$$

В результате получим:

$$\sigma_C - 2k\varphi_C = \sigma_p - 2k\varphi_p; \;\; \sigma_p + 2k\varphi_p = \sigma_M + 2k\varphi_M. \tag{10}$$

Так как $\varphi_C = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi_P = -\frac{\pi}{4} - \gamma$, $\varphi_M = -\frac{\pi}{4}$, то из соотношений (10) найдем гидростатическое давление σ в точке M:

$$\sigma_M = -k(1 + 4\gamma_1). \tag{11}$$

Нормальное напряжение σ_y в точке M определяется из соотношений (9), (11):

$$\sigma_y = \sigma_M + k\sin 2\varphi_M = -2k(1 + 2\gamma_1). \tag{12}$$

Силу давления на штамп получим в результате интегрирования σ_y вдоль OCD

$$P = -\int\limits_h^H \sigma_y dH_1 - 2kh = 2k\int\limits_h^H (1 + 2\gamma_1)dH_1 + 2kh, \tag{13}$$

где функция $\gamma_1 = \gamma_1\left(\frac{H_1}{h}\right)$ представлена графически на рис. 2.

Заметим, что предложенное решение является кинематически допустимым и справедливо при $0 \quad \gamma \quad \frac{\pi}{2}$. При $\frac{h}{H} = \varepsilon << 1$, по–видимому, можно искать решение в виде двухмасштабных разложений в асимптотические ряды [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. — М.: Гостехтеориздат, 1956. — 407 с.

2. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. — М., Л.: Из-во АН СССР, 1946. — 308 с.

3. Ивлев, Д. Д. Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. — М.: Физматлит, 2001. — 445 с.

4. Давыдов, Д. В. О внедрении тел в жесткопластическую среду / Д. В. Давыдов, Ю. М. Мяснянкин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 1. — С. 94–100.

5. Давыдов, Д. В. О сжатии тонкого анизотропного упрочняющегося слоя криволинейными шероховатыми плитами / Д. В. Давыдов, Ю. М. Мяснянкин, Е. Д. Чуфринова // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2010. — № 8. — С. 138–145.

6. Калашникова, М. А. О сдавливании пластического слоя в осесимметричной конической матрице / М. А. Калашникова, Ю. М. Мяснянкин, А. И. Шашкин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 199–204.

REFERENCES

1. Hill R. Mathematical theory of plasticity. [Hill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti]. M.: Gostehteorizdat, 1956, 407 p.

2. Sokolowskiy V. V. Theory of plasticity. [Sokolowskiy V. V. Teoriya plastichnosti]. M., L.: AN SSSR, 1946, 308 p.

3. Ivlev D. D. Mechanics plastic environment. [Ivlev D. D. Mechanica plasticheskih sred]. M.: Fizmatlit, 2001, 445 p.

4. Davydov D. V., Myasnyankin Y. M. About the indentation of bodies in rigidly plastic environment. [Davydov D. V., Myasnyankin Y. M. O vnedrenii tel v zhestkoplasticheskuy sredu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 1, pp. 94–100.

5. Davydov D. V., Myasnyankin Y. M., Ctufrinova E. D. About compression of a thin layer of the anisotropic reinforcing curved rough plates. [Davydov D. V., Myasnyankin Y. M., Ctufrinova E. D. O szhatii tonkogo anizotropnogo uprochnyauschegosya sloya krivolineinymy cherohovatymy plytamy]. *Proceedings of GPU b. I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics limit state — Vestnik ChGPU im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mexanika predel'nogo sostoyaniya*, 2010, no. 8, pp. 138–145.

6. Kalashnikova M. A., Myasnyankin Y. M., Shashkin A. I. About squeezing the plastic layer in an axially symmetric cone matrix. [Kalashnikova M. A., Myasnyankin Y. M., Shashkin A. I. O sdavlivanii plastizheskogo sloya v osesimmetrichnoi konicheskoy matrize]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 199–204.

Желнов Иван Николаевич, студент 5-го курса факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Zhelnov Ivan Nikolaeviz, 5th year student of the Faculty of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Мяснянкин Юрий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия
Тел.: +7(473)246–53–87

Myasnyankin Yury Mihailoviz, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
Tel.: +7(473)246–53–87

Шашкин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия
E-mail: dean@amm.vsu.ru

Shashkin Alexander Ivanoviz, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematics and Applied Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: dean@amm.vsu.ru