УДК 517.9

# ФОРМА КЛЮЧЕВЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ ЦИКЛОВ С РЕЗОНАНСОМ 1:1:1

**Е. В. Бухонова, А. П. Карпова**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 02.06.2014 г.

**Аннотация**. Для класса динамических систем, включающего в себя уравнения колебаний упругой балки на упругом основании, автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы гидродинамического типа и др., изложен подход к приближенному вычислению амплитуд периодических решений, бифурцирующих из точек покоя при наличии сильных резонансов 1:1 и 1:1:1. Акцент сделан на построение теоретической основы для разработки алгоритмов отбора и приближенного вычисления ветвей бифурцирующих циклов. Использован операторный метод (трактовка исходной задачи в виде операторного уравнения), позволяющий свести рассмотренную задачу к численно-качественному анализу решений гладких $SO(2)$-эквивариантных фредгольмовых уравнений в банаховых пространствах. Конструктивную основу предложенной построений составляет конечномерная редукция в виде одной из версий метода Ляпунова-Шмидта, сводящего изучение фредгольмова уравнения к анализу (ключевого) уравнения в 6-мерном пространстве. Основной результат статьи — описание аналитической формы ключевого уравнения, редуцированного по круговой симметрии.

**Ключевые слова**: динамическая систем, бифуркация циклов, резонанс, конечномерная редукция, круговая симметрия, ключевое уравнение.

# FORM OF THE KEY EQUATIONS IN THE PROBLEM OF BIFURCATION OF CYCLES WITH THE RESONANCE 1:1:1

**E. V. Bukhonova, A. P. Karpova**

**Abstract**. An approach to the approximate computation of the amplitudes of periodical solutions, bifurcating from the stationary points in the presence of strong resonances 1:1 and 1:1:1 is described for a class of dynamic systems, including the vibration equation of the elastic beam on the elastic foundation, autonomous system of ordinary differential equations, system of hydrodynamic type, etc. Emphasis is placed on the construction of theoretical basis for the development of selection algorithm and approximate calculation of branches of bifurcating cycles. Operator method is used (interpretation of the original problem as an operator equation), allowing us to reduce the considered problem to the numerical and qualitative analysis of the solutions of smooth SO (2)-equivariant fredholm equations in banach spaces. Constructive basis of the proposed theoretical constructions is a finite-dimensional reduction in the form of Lyapunov-Schmidt's version of method. The main result is the description of the analytical form of the key equation reduced by circular symmetry.

**Keywords**: dynamic system, bifurcation cycles, resonance, finite-dimensional reduction, circular symmetry, key equation.

## ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то, что к настоящему времени произошло большое накопление разнообразных публикаций, посвященных разработке и практической апробации методов исследования периодических волн, вихревых структр и циклов динамических систем вблизи стационарных состояний (см., например, [1], [2] и литературу в этих источниках), проблемы анализа многомодового циклогенеза все еще остается актуальной [3]–[6]. Задачи многомодового циклогенеза появляются в радиофизике при исследовании автоколебаний в $RC$-генераторах, в реальных моделях экономики, популяционной динамики, химической кинетики и в др. разделах современного естествознания.

Зарождения циклов с сильными и 2-кратными резонансами изучены в [4]–[6] и, в частности, там же предложены алгоритмы приближенного построения многомодовых циклов и качественного анализа ветвления циклов в целом при наличии резонансов $p : q$ и $p : q : r$ с условием $p < q < r$. Случай $p = q = r$ остается мало исследованным.

Некоторые бифуркационные эффекты в случае резонанса $1 : 1$ изучены В. В. Стрыгиным и его учениками методами теории усреднений в задаче синхронизации пары динамических систем [3].

Данная статья посвящена вопросу приближенного вычисление амплитуд бифурцирующих циклов (при наличии указанных выше резонансов). Методологическую основу предложенной процедуры составляет версия метода Ляпунова-Шмидта, приспособленная для гладких $SO(2)$-эквивариантных фредгольмовых уравнений в банаховых пространствах [4]–[7]. В частности, для систем гидродинамического типа получено описание главной части ключевого уравнения (для резонансов 1:1 и 1:1:1).

Использованный операторный подход означает трактовку исходного уравнения динамики в виде операторного уравнения в тройке последовательно вложенных функциональных банаховых пространств. Привлечение тройки пространств позволяет, в частности, естественным образом использовать условие круговой симметрии уравнения при анализе спектрального строения линейной части уравнения (при выделении мод бифуркации).

Предложенная функционально-аналитическая схема достаточно проста и хорошо приспособлена к традиционным задачам нелинейной динамики. Сформулированные в статье условия и предположения имеют реализации в конкретных задачах динамики. Описанная схема дает основу для конструктивного бифуркационного анализа, она же позволяет решать задачу дискриминантного анализа параметрических семейств периодических решений.

Отметим статью [8], в которой изучена близкая задача, относящаяся к вариационному случаю. А именно, изучена задача о бифуркации критических орбит фредгольмова функционала $V(w)$ с круговой симметрией. Анализ задачи осуществлен посредством одной из модификаций вариационной версии метода Ляпунова-Шмидта, позволяющей свести анализ функционала к анализу ключевой функции

$$W(\xi, a) = \inf_{w:\ \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, a) = V\left(\sum_{i=1}^{6} \xi_i\, e_i + \Phi(\xi)\right)$$

от шести ключевых переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ ($e_1, e_2, \ldots, e_6$ — моды бифуркации).

## 1. ФРЕДГОЛЬМОВЫ УРАВНЕНИЯ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Описываемая ниже процедура прошла апробацию на задаче о периодических движений упругой балки, о периодических решениях нелинейного уравнения типа С. Л. Соболева, уравнений гидродинамического типа и систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предварительно опишем используемую нами общую функционально-аналитическую схему анализа операторного уравнения с круговой симметрией.

**1.1. Исходные элементы анализа фредгольмова уравнения с круговой симметрией.** Будем предполагать, что заданы банаховы пространства $E$, $F$ и гильбертово пространство $H$ такие, что $E$ непрерывно вложено в $F$, $F$ непрерывно вложено в $H$ и $E$ плотно в $H$. Пусть задано семейство фредгольмовых отображений нулевого индекса $f : E \times \mathbb{R}^m \longrightarrow F$, гладкое по совокупности переменных, представленное в виде

$$\mathcal{A}(\varepsilon)x + \mathcal{B}(x,x,\varepsilon) + \mathcal{C}(x,x,x,\varepsilon) + o(\|x\|_E^3),$$

где $\mathcal{A}(\varepsilon)$ — гладкое семейство линейных фредгольмовых операторов нулевого индекса, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ — квадратичный и кубический операторы.

Пусть, далее, зафиксирован слабо гладкий гомоморфизм $\mathcal{T} : SO(2) \longrightarrow O(H)$ — из группы $SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований некоторого гильбертова пространства $H$ (его непрерывность не предполагается)[1]. Гомоморфизм $\mathcal{T}$ задает ортогональное действие на пространстве $H$:

$$G \times H \longrightarrow H, \qquad (g,x) \longmapsto y = \mathcal{T}_g(x) \qquad \forall (g,x) \in G \times H.$$

Будем предполагать, что $E$ и $F$ инвариантны, а $f$ эквивариантно относительно данного действия:

$$\mathcal{T}_g(E) \subset E, \quad \mathcal{T}_g(F) \subset F, \quad f(\mathcal{T}_g(\cdot),\varepsilon) = \mathcal{T}_g(f(\cdot,\varepsilon)) \qquad \forall g \in SO(2),\ \varepsilon \in \mathbb{R}^m. \qquad (1)$$

Из эквивариантности $f$ следует эквивариантность его производной (в нуле) $\mathcal{A}(\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,\varepsilon)$ и инвариантность подпространства $N := Ker\,\mathcal{A}(0)$.

Всюду ниже предполагается, что выполняются сформулированные ниже два условия простоты и регулярности.

$(\mathcal{S})$ (*Условие простоты*):

$$E = N \oplus R_*, \qquad F = N \oplus R, \qquad dimN = 2n,$$

$$\mathcal{A}(\varepsilon)(N) \subset N, \qquad \mathcal{A}(\varepsilon)(R_*) \subset R,$$

и в $N$ существует такой базис $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$, не зависящий от $\varepsilon$, в котором матрица $A_{(2n)}(\varepsilon)$ оператора $\mathcal{A}_{(2n)}(\varepsilon) := \mathcal{A}(\varepsilon)\Big|_N$ имеет блочно-диагональный вид

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) & -\beta_1(\varepsilon) \\ \beta_1(\varepsilon) & \alpha_1(\varepsilon) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_n(\varepsilon) & -\beta_n(\varepsilon) \\ \beta_n(\varepsilon) & \alpha_n(\varepsilon) \end{pmatrix}\right).$$

Очевидно, что собственные значения матрицы $A_{(2n)}(\varepsilon)$ суть следующие комплексные числа:

$$\lambda_1 = \alpha_1(\varepsilon) \pm \imath\beta_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n = \alpha_n(\varepsilon) \pm \imath\beta_n(\varepsilon).$$

$(\mathcal{R})$ *Условие регулярности*: ранг матрицы Якоби отображения

$$\varepsilon \longmapsto \Big(\alpha_1(\varepsilon),\, \beta_1(\varepsilon),\, \dots,\, \alpha_n(\varepsilon),\, \beta_n(\varepsilon)\Big)^\top,$$

в нуле равен $2n$.

---

[1] Слабая гладкость означает, что индуцированное действие $SO(2)$ на любом конечномерном инвариантном подпространстве $N \subset H$ является гладким.

Если рассмотреть ортопроекторы $\mathcal{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{N}$, $\mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P}$ — (в $H$), то, следуя методу Ляпунова-Шмидта [7], разобьем исходное операторное уравнение $f(x, \varepsilon) = 0$ в систему двух уравнений

$$\left.\begin{array}{lcl} f_{(2n)}(u+v,\varepsilon) & = & 0, \\ f_{(\infty-2n)}(u+v,\varepsilon) & = & 0, \end{array}\right\}$$

где

$$u = \mathcal{P}x, \quad v = \mathcal{Q}x, \qquad f_{(2n)}(x,\varepsilon) := \mathcal{P}f(x,\varepsilon), \quad f_{(\infty-2n)}(x,\varepsilon) := \mathcal{Q}f(x,\varepsilon).$$

Из второго уравнения этой системы получаем, в силу теоремы о неявной функции, выражение $v = \widetilde{\Phi}(u,\varepsilon) = \Phi(\xi,\varepsilon)$, $\xi = \widehat{u}$ [2)]. Отображение $\Phi$ называется редуцирующим.

Нетрудно проверить, что $\Phi(\xi,\varepsilon) = o(\xi)$. Следовательно,

$$\Phi(\xi,\varepsilon) = \Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) + o(|\xi|^2), \tag{2}$$

где

$$\Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) = \sum_{|k|=2} \Phi_k \xi^k,$$

$$k = (k_1, k_2, \ldots, k_{2n}), \qquad \Phi_k \xi^k := \Phi_{k_1k_2k_3k_4} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \xi_3^{k_3} \xi_4^{k_4}, \quad |k| = k_1 + k_2 + k_3 + k_4, \quad k_j \in \mathbb{Z}_+.$$

При этом

$$\Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) = -\overline{\mathcal{A}}^{\,-1}\, \mathcal{B}_{(\infty-2n)}(u,u,\varepsilon), \qquad u := \sum_{j=1}^{4} \xi_j\, e_j, \quad \overline{\mathcal{A}} := \mathcal{A}_{\mathcal{N}^{\perp}}, \quad \mathcal{B}_{(\infty-4)} := \mathcal{Q}\mathcal{B}.$$

Перейдем к ключевому уравнению

$$\Theta(\xi,\varepsilon) := \Theta^{(1)}(\xi,\varepsilon) + \Theta^{(2)}(\xi,\varepsilon) + \Theta^{(3)}(\xi,\varepsilon) + o(|\xi|^3) = 0, \tag{3}$$

где

$$\Theta(\xi,\varepsilon) = f_{(2n)}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j + \Phi(\xi,\varepsilon), \varepsilon\right).$$

Так как

$$f_{(2n)}(x,\varepsilon) = \mathcal{A}_{(2n)}(\varepsilon)x + \mathcal{B}_{(2n)}(x,x,\varepsilon) + \mathcal{C}_{(2n)}(x,x,x,\varepsilon) + \ldots,$$
$$\mathcal{B}_{(2n)} := \mathcal{P}\mathcal{B}, \quad \mathcal{C}_{(2n)} := \mathcal{P}\mathcal{C},$$

то

$$\Theta(\xi,\varepsilon) = f_{(2n)}(u + \Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) + \ldots, \varepsilon) =$$
$$= \mathcal{A}_{(2n)}u + \mathcal{B}_{(2n)}(u,u,\varepsilon) + 2\mathcal{B}_{(2n)}(u, \Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon), \varepsilon)) + \mathcal{C}_{(2n)}(u,u,u,\varepsilon) + o(|\xi|)^3.$$

В частности,

$$\Theta^{(1)}(\xi,\varepsilon) = A_{(2n)}(\varepsilon)\widehat{u}.$$

И так как

$$\mathcal{A}_{(2n)}(\varepsilon)e_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2, \quad \mathcal{A}_{(2n)}(\varepsilon)e_2 = -\beta_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \ldots$$
$$\mathcal{A}_{(2n)}(\varepsilon)e_3 = \alpha_n e_{2n-1} + \beta_n e_{2n}, \quad \mathcal{A}_{(2n)}(\varepsilon)e_{2n} = -\beta_n e_{2n-1} + \alpha_n e_{2n},$$

то для линейной части ключевого уравнения получим представление

$$\Theta^{(1)}(\xi,\varepsilon) = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) & -\beta_1(\varepsilon) \\ \beta_1(\varepsilon) & \alpha_1(\varepsilon) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_n(\varepsilon) & -\beta_n(\varepsilon) \\ \beta_n(\varepsilon) & \alpha_n(\varepsilon) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{2n} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

[2)] Символом $\widehat{u}$ обозначается «снятие» координат вектора $u \in N$.

**1.2. Пример: система обыкновенных дифференциальных уравнений.**
Обратимся к системе

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + B(x,x,\varepsilon) + C(x,x,x,\varepsilon) + o(|x|^3), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^3, \tag{5}$$

при условии, что две пары комплексно сопряженных точек спектра матрицы $A(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ трансверсально пересекают мнимую ось с резонансом $m_1 : m_2$, а остальная часть спектра находится (при всех $\varepsilon$) внутри левой комплексной полуплоскости [2]. Здесь $B(x,x,\varepsilon)$ и $C(x,x,x,\varepsilon)$ — квадратичное и кубическое отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, гладко зависящие от $\varepsilon$ ($B(x,y,\varepsilon)$ и $C(x,y,z,\varepsilon)$ — симметричные билинейная и 3–линейная формы с векторными коэффициентами, гладко зависящими от $\varepsilon$).

Запишем уравнение (5) в виде операторного уравнения

$$f(x,\varepsilon) = 0, \tag{6}$$

в котором $x$ — функция $x(t)$, принадлежащая банахову пространству $\Pi^1_T$ ($T-$периодических непрерывно дифференцируемых функций со значениями в $\mathbb{R}^n$), а $f$ — фредгольмово отображение с квадратичной нелинейностью, действующее из пространства $\Pi^1_T$ в банахово пространство $\Pi^0_T$ (непрерывных $T-$периодических функций со значениями в $\mathbb{R}^n$), заданное соответствием

$$f(\cdot,\varepsilon):\ x(t) \ \longrightarrow\ y(t) \ :=\ \dot{x}(t) - \nu(A(\varepsilon)x + B(x,x,\varepsilon) + C(x,x,x,\varepsilon)) + \ \ldots\ .$$

$H$ — пространство периодических функций класса $L_2$ (со значениями в $\mathbb{R}^n$), $\langle x,y\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T (x(t),y(t))dt$. Параметр $\nu = 1+\varepsilon_4$ введен для «нормировки» периода, в дальнейшем можно положить $T = 2\pi$.[3)]

Гомоморфизм $\mathcal{T} : G \longrightarrow O(H)$ группы $G = SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства $H$, заданный соотношением

$$\mathcal{T}_g(w)(x) = w(x+\varphi)$$

($\varphi$ — каноническая координата элемента $g \in SO(2)$, $g = (g_{ij})$, $g_{11} = g_{22} = \cos(\varphi)$, $g_{21} = -g_{12} = \sin(\varphi)$), определяет слабо гладкое ортогональное действие

$$G \times H \longrightarrow H,\ (g,w) \longmapsto y = \mathcal{T}_g(w) \qquad \forall (g,w) \in G \times H.$$

Очевидно, что пространства $E, F$ инвариантны относительно данного действия. Очевидна также эквивариантность ключевого отображения относительно индуцированного полусвободного действия $SO(2)$ в пространстве ключевых параметров.

**1.3. Случай резонанса** $1:1$**.** Вернемся к общей операторной схеме. Потребовав выполнение условия 4-мерности вырождения, получим ключевое отображение $\Theta$ в форме (3). Это отображение эквивариантно относительно действия $SO(2)$ на $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{T} : \{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto \exp(i\varphi)z. \tag{7}$$

Рассмотрим образующие инварианты действия окружности (7):

$$\mathcal{I}_1 = |z_1|^2,\ \ \mathcal{I}_2 = |z_2|^2,\ \ \mathcal{I}_3 = \operatorname{Re} z_1\overline{z}_2,\ \ \mathcal{I}_4 = \operatorname{Im} z_1\overline{z}_2. \tag{8}$$

---

[3)] Если расширить трехмерный векторный параметр $\varepsilon$ до четырехмерного, потребовав выполнение условия трансверсальности пересечения мнимой оси точками спектра матрицы Якоби левой части, то вариации по параметру $\nu$ будут поглощаться вариациями векторного параметра $\varepsilon$. Следовательно, не потеряв остальные циклы, можно рассматривать лишь циклы фиксированного периода $2\pi$ (циклы другого периода превращаются в циклы периода $2\pi$ изменением значений параметра $\varepsilon$).

Условие (эквивариантности) (1) с обязательной необходимостью приводит к тому, что ключевое отображение допускает (см. условия ($\mathcal{S}$) и ($\mathcal{R}$)) следующее представление (в комплексной форме):

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\varepsilon) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{4} \mathcal{I}_k \begin{pmatrix} c_{1,1,k} & c_{1,2,k} \\ c_{2,1,k} & c_{2,2,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + o(|\xi|^4) + O(\varepsilon)O(|\xi|^3),$$

$z_1 = \xi_1 + i\xi_2$, $z_1 = \xi_1 + i\xi_2$; $I_1, I_2, I_3, I_4$ — образующие инварианты действия окружности, $\lambda_{p,q}(0) = 0$, $\{c_{p,q,k}\}$ — комплексные константы.

После введения в последнее уравнение полярных координат $z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1)$, $z_2 = r_2 \exp(i\varphi_2)$, и отбрасывания общих множителей получим систему уравнений в форме, удобной для проведения дискриминантного анализа.

## 2. СЛУЧАЙ РЕЗОНАНСА $1:1:1$

Рассмотрев в случае резонанса $1:1:1$ отрезок ряда Тейлора порядка 3 для ключевого отображения, получим алгебраическое отображение $\Theta : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$:

$$\Theta(\xi) = (\Theta_1(\xi), \Theta_2(\xi), \Theta_3(\xi), \Theta_4(\xi), \Theta_5(\xi), \Theta_6(\xi))^\top, \qquad \Theta_j(\xi) = \sum_{|k|\leqslant 4} \alpha_k^j \, \xi^k,$$

где

$$\xi^k = \xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\xi_3^{k_3}\xi_4^{k_4}\xi_5^{k_5}\xi_6^{k_6}, \quad k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_4, k_6)\,, \quad k_j \in \mathbb{Z}_+,$$

$|k| = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6$. Это отображение эквивариантно относительно стандартного действия окружности (группы $SO(2)$) на $\mathbb{R}^6$, соответствующего резонансу второго порядка: если отождествить вектор $\xi \in \mathbb{R}^6$ с комплексным вектором $z = (z_1, z_2, z_3)^\top \in \mathbb{C}^3$, $z_1 = \xi_1 + i\xi_2$, $z_2 = \xi_3 + i\xi_4$, $z_3 = \xi_5 + i\xi_6$, то действие окружности задается (в случае резонанса $1:1:1$) соответствием

$$\mathcal{T} : \{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto \exp(i\varphi)\, z. \tag{9}$$

Эквивариантность означает, как и ранее, выполнение соотношения

$$\Theta(\mathcal{T}_\varphi(\xi)) = \mathcal{T}_\varphi(\Theta(\xi)) \qquad \forall\{\xi,\, \varphi\}. \tag{10}$$

Пусть теперь

$$z_1 = \xi_1 + \imath\xi_2, \quad z_2 = \xi_3 + \imath\xi_4, \quad z_3 = \xi_5 + \imath\xi_6,$$

$$z_4 = \xi_1 - \imath\xi_2, \quad z_5 = \xi_3 - \imath\xi_4, \quad z_6 = \xi_5 + \imath\xi_6,$$

$$z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)^\top \;=\; (z', z'')^\top, \quad z' = (z_1, z_2, z_3)^\top, \quad z'' = (z_4, z_5, z_6)^\top,$$

$$\mathcal{T}_\varphi(z) = \left(e^{\imath\varphi} z', e^{-\imath\varphi} z''\right)^\top.$$

Положив $\Upsilon(z) := \Theta(\xi)$, мы можем записать (10) в виде

$$\mathcal{T}_\varphi \Upsilon(z) = \Upsilon(\mathcal{T}_\varphi z', \mathcal{T}_{-\varphi} z''). \tag{11}$$

Здесь

$$\Upsilon(z) = \sum_k \gamma_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4} z_5^{k_5} z_6^{k_6}, \qquad \gamma_k = \left(\gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^3, \gamma_k^4, \gamma_k^5, \gamma_k^6\right)^\top,$$

$$\overline{\gamma}_k^1 = \gamma_k^4\,,\ \overline{\gamma}_k^2 = \gamma_k^5\,,\ \overline{\gamma}_k^3 = \gamma_k^6\,.$$

Из эквивариантности $\Upsilon(z)$ и из принципа равенства коэффициентов у совпадающих многочленов следует, что квадратичная часть $\Upsilon(z)$ равна нулю, а линейная и кубическая части $\Upsilon(z)$ имеют следующие представления (в комплексной форме):

$$\Upsilon^1(z) = ((\Upsilon^1)'(z), (\Upsilon^1)''(z))^\top , \quad \Upsilon^3(z) = ((\Upsilon^3)'(z), (\Upsilon^3)''(z))^\top , \tag{12}$$

где

$$(\Upsilon^1)' = (\lambda_1 z_1 \, , \, \lambda_2 z_2 \, , \, \lambda_3 z_3)^\top , \quad \lambda_k \in \mathbb{C} \, , \quad (\Upsilon^1)'' = \overline{(\Upsilon^1)'}$$

(см. условие $(\mathcal{S})$),

$$(\Upsilon^3)' = \sum_{k=1}^{3} b_k(I) \, z_k \, , \quad (\Upsilon^3)'' = \overline{(\Upsilon^3)'} \, ,$$

$$\left.\begin{array}{l} b_k(I) = \sum\limits_{j=1}^{9} b_{k,j} I_j \, , \quad I_1 = |z_1|^2, \ I_2 = |z_2|^2, \ I_3 = |z_3|^2 \, , \\ I_4 = \mathrm{Re}\,(z_1\overline{z}_2) \, , \ I_5 = \mathrm{Re}\,(z_1\overline{z}_3) \, , \ I_6 = \mathrm{Re}\,(z_2\overline{z}_3) \, , \\ I_7 = \mathrm{Im}\,(z_1\overline{z}_2) \, , \ I_8 = \mathrm{Im}\,(z_1\overline{z}_3) \, , \ I_9 = \mathrm{Im}\,(z_2\overline{z}_3) \, , \end{array}\right\} \tag{13}$$

$$\lambda_k \in \mathbb{C} \, , \ b_{k,j} \in \mathbb{C}^3 \, , \quad k = 1, 2, 3 \, , \quad j = 1, 2, \, \ldots \, , 9 \, .$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Для первой компоненты* $\Upsilon'$ *отображения* $\Upsilon = (\Upsilon', \Upsilon'')$ *(см. (12)) имеет место следующее представление:*

$$\Upsilon' = \sum_{k=1}^{3} (a_k + b_k(I)) \, z_k \, , \tag{14}$$

*где*

$$a_1 = (\lambda_1 \, , \, 0 \, , \, 0)^\top \, , \ a_2 = (0 \, , \, \lambda_2 \, , \, 0)^\top \, , \ a_3 = (0 \, , \, 0 \, , \, \lambda_3)^\top \, ,$$

$b_k(I)$ *определяется соотношениями (13).*

Коэффициенты в представлении отображения $\Upsilon'$ явно выражаются через «операторные коэффициенты» $f(x, \varepsilon)$.

В случае переменных, выраженных в полярных координатах $z_k = r_k \exp(i\varphi_k)$, $k = 1, 2, 3$, для компоненты $(\Upsilon^1)'$ ключевого отображения получим представление:

$$(\Upsilon^1)'(r, \varphi)^\top = (\alpha_1 r_1 \exp i(\omega_1 + \varphi_1), \ \alpha_2 r_2 \exp i(\omega_2 + \varphi_2), \ \alpha_3 r_3 \exp i(\omega_3 + \varphi_3))^\top +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \beta_k(\varphi) r_k^3 + \sum_{k \neq j; \, k,j=1}^{3} \gamma_{j,k} \, r_j^2 r_k + \theta \, r_1 r_2 r_3 \, ,$$

$$\alpha_k = |\lambda_k| \, , \quad \omega_k = \arg(\lambda_k) \, , \quad r = (r_1, \ r_2, \ r_3) \, , \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \, ;$$

$\{\beta_k(\varphi)\}$ — $2\pi$-периодическе по $\varphi_j$ вектор-функции, $\gamma_k$, $\theta \in \mathbb{C}^3$ — комплексные константы, $\alpha_j = o(\varepsilon)$.

Угловые переменные можно исключить, положив $\mathrm{Im}\,(\Upsilon^1)' = 0$. Это соотношение заведомо выполняется при $\varphi_k = -\omega_k + \pi \, l + O(|r|^3 \, , \ l \in \mathbb{N}$, где $\omega_k$ — некоторые константы, определяемые нулями синусов. Подставив последнее выражение в ключевое уравнение, получим в итоге (вещественное) уравнение

$$\mathrm{Re}\,(\Upsilon^1)' := (\alpha_1 r_1, \ \alpha_2 r_2, \ \alpha_3 r_3)^\top + \sum_{j,\,k=1}^{3} a_{j,\,k} r_j^2 \, r_k + b \, r_1 r_2 r_3 + o(|r|^3) + O(\varepsilon) O(|r|^3) = 0 \, , \tag{15}$$

$\alpha_j = \alpha_j(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, $\alpha_j(0) = 0$, $a_{j,k}$, $b \in \mathbb{R}^3$, позволяющее определять асимптотические представления амплитуд (радиальных переменных) бифурцирующего цикла.

Так как кратность нуля для общего кубического полиномиального векторного поля в $\mathbb{R}^3$ равна 27, то из нуля рождается не более 26 ветвей ненулевых решений уравнения (15). Возможные расклады бифуркцирующих решений можно классифицировать, разбивая их на подгруппы решений с одинаковыми индексами неустойчивости (индекс неустойчивости равен количеству собственных значений матрицы Якоби левой части (15) с отрицательными вещественными слагаемыми в ветвящемся решении). Важнейший случай в анализе этого уравнения связан с условием $\alpha_j < 0 \ \forall j$. Масштабированием переменных этот случай сводится к соотношению $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\lambda \geqslant 0$. В результате получаем уравнение

$$g(r) := -\lambda\, r + \sum_{j,k=1}^{3} a_{j,k} r_j^2 r_k + b\, r_1 r_2 r_3 = 0\,, \qquad a_{j,k}\,, b \in \mathbb{R}^3\,,$$

представляющее собой задачу на собственный вектор кубического поля.

Пусть $l_k$ — количество решений уравнения $\mathcal{P}_r(g(r)) = 0$ на двумерной сфере $S^2 = \{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1\}$, где $\mathcal{P}_r$ — ортопроектор на касательное пространство: $\mathcal{P}_r(\eta) := \eta - (\eta, r)r$, с индексом неустойчивости $k$, 0 $k$ 2. Точки индекса 0 являются притягивающими, а точки индекса 2 — отталкивающими для динамической системы

$$\dot r = \widehat{g}(r)\,, \quad \widehat{g}(r) := \mathcal{P}_r(g(r))\,, \quad r \in S^2\,.$$

Формула Эйлера для касательного векторного поля $\widehat{g}$ дает (см. [9]) соотношение $l_0 - l_1 + l_2 = 2$. Если $l$ — общее количество решений: $l = l_0 + l_1 + l_2$, то получим $l_1 = \frac{l-2}{2}$, $l_0 + l_2 = \frac{l+2}{2}$. Из этих соотношений следует, что $l = 2m$ (четное число), 1 $m$ 13.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. — М.: Наука. 1984. — 432 с.

2. Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. — М.: Мир. 1985. — 280 с.

3. Стрыгин, В. В. Бифуркация малых синхронных автоколебаний двух динамических систем с близкими частотами / В. В. Стрыгин, Г. Ю. Северин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2006. — № 2. — С. 36–45.

4. Карпова, А. П. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов / А. П. Карпова, Ю. И. Сапронов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — вып. 3. — С. 12–22.

5. Карпова, А. П. Бифуркационный анализ фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и его приложения / А. П. Карпова, У. В. Ладыкина, Ю. И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. — 2008. — Т. 5, ч. 1. — С. 45–90.

6. Карпова, А. П. Резонансные бифуркации решений фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и нелинейная динамика / А. П. Карпова, Ю. И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 184–194.

7. Даринский, Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–134.

8. Дерунова, Е. В. Трехмодовые бифуркации экстремалей из точки минимума фредгольмова функционала в условиях круговой симметрии / Е. В. Дерунова, Ю. И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 64–77.

9. Введение в топологию / Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 416 с.

10. Колесникова, И. В. Максимальные расклады бифурцирующих экстремалей гладкого функционала из угловой точки минимума с омбилической особенностью / И. В. Колесникова, Ю. И. Сапронов, Н. С. Уварова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 205–211.

11. Баев, А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

12. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

## REFERENCES

1. Rabinovich M. I., Troubetzkoy D. I Introduction to the theory of waves and vibrations. [Rabinovich M. I., Trubeckov D. I. Vvedenie v teoriyu kolebanij i voln]. Moscow: Science, 1984, 432 p.

2. Hessard B., Kazarinov N., Ven I. Theory and Applications of circle bifurcation. [Xe'ssard B., Kazarinov N., Ve'n I. Teoriya i prilozheniya bifurkacii rozhdeniya cikla]. Moscow: Mir, 1985, 280 p.

3. Strygin V. V., Severin G. Yu. Bifurcation of self-oscillations of small synchronous two dynamical systems with similar frequencies. [Strygin V. V., Severin G. Yu. Bifurkaciya malyx sinxronnyx avtokolebanij dvux dinamicheskix sistem s blizkimi chastotami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye texnologii — Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems analysis and information technologies*, 2006, no. 2, pp. 36–45.

4. Karpova A. P., Sapronov Yu. I. Approximate calculation of amplitudes of cycles in the presence of strong resonances. [Karpova A. P., Sapronov Yu. I. Priblizhennoe vychislenie amplitud ciklov, bifurciruyushhix pri nalichii rezonansov]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mexanika. Komp'yuternye nauki — Vestnik Udmurt University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2008, iss. 3, pp. 12–22.

5. Karpova A. P., Ladikina U. V., Sapronov Yu. I. Bifurkation analysis of solutions of Fredholm equations and its applications. [Karpova A. P., Ladykina U. V., Sapronov Yu. I. Bifurkacionnyj analiz fredgol'movyx uravnenij s krugovoj simmetriej i ego prilozheniya]. *Matematicheskie modeli i operatornye uravneniya — Mathematical models and operator equations*, 2008, vol. 5, part 1, pp. 45–90.

6. Karpova A. P., Sapronov Yu. I. Resonance bifurkation of solutions of Fredholm equations in terms of circular symmetric and nonlinear dinamic. [Karpova A. P., Sapronov Yu. I. Rezonansnye bifurkacii reshenij fredgol'movyx uravnenijs krugovoj simmetriej i nelinejnaya dinamika]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, 184–194.

7. Darinskiy B. M., Sapronov Yu. I., Zarev S. L. Bifurcation of extremals of Fredholm functionals. [Darinskij B. M., Sapronov Yu. I., Carev S. L. Bifurkacii e'kstremalej fredgol'movyx funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 12, pp. 3–140.

8. Derunova E. V., Sapronov Yu. I. Three-mode extremals' bifurcations from the minimum point of Fredholm functional in terms of circular symmetric. [Derunova E. V., Sapronov Yu. I. Trexmodovye bifurkacii e'kstremalej iz tochki minimuma fredgol'mova funkcionala v usloviyax

krugovoj simmetrii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 64–77.

9. Borisovich Yu. G., Bliznaykov N. M., Izrelevich Ya. A., Fomenko T. N. Introduction to Topology. [Borisovich Yu. G., Bliznyakov N. M., Izrailevich Ya. A., Fomenko T. N. Vvedenie v topologiyu]. Moscow, 1995, 416 p.

10. Kolesnikova I. V., Sapronov Yu. I., Sapronov Yu. I. Maximum spectrum of the smooth functional of bifurcating extremals from the angular minimum point with umbilical feature. [Kolesnikova I. V., Sapronov Yu. I., Uvarova N. S. Maksimal'nye rasklady bifurciruyushhix e'kstremalej gladkogo funkcionala iz uglovoj tochki minimuma s ombilicheskoj osobennost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 205–211.

11. Baev A. D., Kobylinskii P. A., Davidova M. B. On the Properties of Switching a Class of Degenerate Pseudo-Differential Operators with the Operators Of Differentiation. [Baev A. D., Kobylinskij P. A., Davydova M. B. o svojstvax kommutacii odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov s operatorami differencirovaniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 102–108.

12. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

*Бухонова Екатерина Владимировна, аспирант, кафедра математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: ekaterina.vladimirova@atos.net*

*Bukhonova E.V., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: ekaterina.vladimirova@atos.net*

*Карпова Антонина Петровна, кандидат физико.-математических наук, ассистент кафедры математического моделирования, ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: karpovaantonina@mail.ru*

*Karpova A.P., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: karpovaantonina@mail.ru*