УДК 004.7:519.872:519.23

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ И СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

О. В. Бондрова, Д. С. Крылова, Н. И. Головко, Т. А. Жук

Дальневосточный Федеральный Университет

Поступила в редакцию 02.06.2014 г.

Аннотация. В работе получены уравнения для моделей систем массового обслуживания (СМО), имеющие теоретическое и прикладное значение в современной науке.

Рассматриваются две модели СМО. На вход каждой СМО с бесконечным накопителем поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого является скачкообразным процессом с интервалами постоянства, распределенными по экспоненциальному закону. Первая модель СМО имеет один обслуживающий прибор, а вторая – два обслуживающих прибора, один из них резервный, который включается, если число заявок превышает пороговое значение.

Ключевые слова: система массового обслуживания, скачкообразная интенсивность входного потока, дважды стохастический пуассоновский поток, уравнения типа Такача, незавершенная работа, уравнения типа Колмогорова-Чепмена, распределение числа заявок.

THE DERIVATION OF THE EQUATIONS FOR QUEUEING SYSTEMS WITH INFINITE STORAGE AND AN INTERMITTENT INTENSITY OF THE INPUT STREAM

O. V. Bondrova, D. S. Krylova, N. I. Golovko, T. A. Zhuk

Abstract. In the work the equations for the queuing system models are received, having theoretical and applied value in modern science.

Two models of the queuing system are considered. On an entrance of the everyone queuing system with the infinite store the twice stochastic Poisson stream arrives which intensity is spasmodic process with the intervals of constancy are distributed on the exponential law. The first model of the queuing system has one serving device, and the second – two serving devices, one of them is reserve which joins if the number of demands exceeds threshold value.

Keywords: queuing system, spasmodic intensity of an entrance stream, twice stochastic Poisson stream, equations of Tacasc type, incomplete work, equations of Kolmogorov-Chapman type, distribution of the demands number.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории массового обслуживания в наше время требует глубоких исследований в данной области.

Системы обслуживания с зависящими от времени и случайными параметрами рассматривались в работах многих авторов. Начало изучения систем массового обслуживания с непостоянной интенсивностью было положено в статьях А. Кларка [9], [10] в 1953 году, а двумя годами позже Д. Кокс [11] предложил рассматривать потоки, интенсивность которых зависит от состояний некоторой марковской цепи. Такой поток позже был назван марковски-модулированным или процессом Кокса, а его обобщение — дважды стохастическим пуассоновским процессом. Среди дальнейших можно выделить работы Д. Харрисона и А. Лемуана [12], [13]. Также большой вклад внесли следующие авторы: Терпугов, Горцев, Назаров, Дудин, Каратаев, Катрахов и другие [1]–[7].

В силу специфики потока сообщений на узлах локальных и глобальных компьютерных сетей системы массового обслуживания (СМО) появилась необходимость дальнейшего изучения моделей СМО с дважды стохастическими (ДС) пуассоновскими потоками событий, которые более точно описывают поведение реальных систем. В последнее время вызывают большой интерес подобные модели СМО со случайной скачкообразной интенсивностью входного потока и бесконечным накопителем [1], [2]. В данной работе такие СМО для краткости будем называть ДС СМО.

ДС СМО широко применяются на практике в социальных системах, например, в информационных сетях. Например, в информационных сетях в качестве обслуживающих устройств используются коммутаторы, которые производят коммутацию входящих в его порты информационных потоков, направляя их в соответствующие выходные порты, обеспечивая эффективную работу всей системы. Таким образом, каждый сервер можно рассматривать как отдельную СМО. Разрабатываются модели для эксплуатации различных транспортных систем, в частности, для авиакомпаний, судоходных компаний и других, а также, для сферы услуг, в страховом деле.

Описание практического применения рассматриваемых в данной работе моделей СМО с дважды стохастическим потоком со скачкообразной интенсивностью приводится в работах [1], [3], в которых показывается, что эти модели могут быть использованы при проектировании и эксплуатации библиотечных серверов и серверов баз данных.

В данной работе для ДС СМО со скачкообразной интенсивностью входного потока, с одним обслуживающим прибором получены уравнения типа Такача относительно стационарных и нестационарных характеристик незавершенной работы в СМО (времени ожидания); а для модели с двумя приборами, один из которых резервный, получена система интегро-дифференциальных уравнений типа Колмогорова-Чепмена для числа заявок.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ТАКАЧА

Рассмотрим ДС СМО типа $M/G/1$ с одним прибором, бесконечным накопителем, с произвольным законом обслуживания $B_\eta(u)$, в которой время обслуживания η распределено по закону $B_\eta(u) = P\{\eta < u\}$. В частном случае для ДС СМО типа $M/M/1$ время обслуживания распределено по экспоненциальному закону с параметром μ.

На вход рассматриваемой ДС СМО типа $M/G/1$ поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой следующий скачкообразный процесс. Процесс $\lambda(t)$ в течение случайного интервала времени T сохраняет постоянное значение, затем меняет его на новое. Случайная величина T распределена по экспоненциальному закону с параметром α, $\alpha > 0$. Интенсивность $\lambda(t)$ изменяется на отрезке $[a, b]$ и имеет в точках разрыва справа плотность распределения $\varphi(x) = P\{x < \lambda(t_0 + 0) < x + dx\}/dx, \quad x \in [a, b]$, то есть в работе предполагается, что значения процесса $\lambda(t)$ в точках разрыва t_0 слева и справа являются независимыми случайными величинами.

В дальнейшем интенсивность входного потока в нестационарном режиме будем обозначать $\lambda(t)$, в стационарном — через λ.

Обозначим через $U(t)$ — незавершенную работу системы в момент времени t. В момент прихода очередной заявки незавершенная работа равна времени ожидания заявкой начала обслуживания.

Обозначим через $\mathbf{H}(\omega, t, x)$ — совместное нестационарное распределение незавершенной работы $U(t)$ и интенсивности входного потока $\lambda(t)$, причем $\mathbf{H}(\omega, t, x)$ — есть функция распределения по ω, плотность распределения по x:

$$\mathbf{H}(\omega, t, x) = P\{U(t) \leqslant \omega, x < \lambda(t) < x + dx\},$$

через $\mathbf{h}(\omega, x)$ — совместное стационарное распределение незавершенной работы U и интенсивности входного потока λ, причем $\mathbf{h}(\omega, x)$ – есть функция распределения по ω, плотность распределения по x:

$$\mathbf{h}(\omega, x) = P\{U \leqslant \omega,\ x < \lambda < x + dx\}/dx,$$

где через U обозначена незавершенная работа в стационарном режиме. В частности, в качестве $\mathbf{h}(\omega, x)$ можно рассматривать предел $\mathbf{h}(\omega, x) = \lim \mathbf{H}(\omega, t, x)$ при $t \to \infty$. При начальных условиях $P_k(0) = p_k$, $k \geqslant 0$, СМО сразу находится в стационарном режиме при $t \geqslant 0$.

Для краткости будем называть: $\mathbf{H}(\omega, t, x)$ совместной нестационарной функцией распределения незавершенной работы, $\mathbf{h}(\omega, x)$ — совместной стационарной функцией распределения незавершенной работы.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ТИПА ТАКАЧА

В данной работе для ДС СМО типа $M/G/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока с применением динамики Колмогорова-Чепмена (Δt метода) [8] получено интегро-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет нестационарная функция распределения $\mathbf{H}(\omega, t, x)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}(\omega, t, x) = -(\alpha + x)\mathbf{H}(\omega, t, x) + x\int\limits_0^\omega B(\omega - s)\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{H}(s, t, x)\,ds + \frac{\partial \mathbf{H}(\omega, t, x)}{\partial \omega} + \\ + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b \mathbf{H}(\omega, t, y)\,dy, \omega > 0. \quad (1)$$

с начальным условием: $\mathbf{H}(\omega, 0, x) = \xi(\omega, x)$, с односторонним краевым условием по ω: $\mathbf{H}(0^+, t, x) = Q_0(t, x)$, где $0^+ = \lim \omega$ при $\omega \to 0$, $\omega > 0$.

Заметим, что уравнение (1) отличается от классического интегро-дифференциального уравнения Такача наличием слагаемого с интегральным оператором $\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b \mathbf{H}(\omega, t, y)\,dy, \omega > 0$. Поэтому уравнение (1) будем называть уравнением типа Такача.

Рассмотрим вывод уравнения (1). Найдем связь функции $\mathbf{H}(\omega, t + \Delta t, x)$ с ее возможным значением в момент времени t.

Рассмотрим временной интервал $(t, t + \Delta t)$. Пусть в момент времени t выполняется: $x < \lambda(t) < x + dx$. Так как $\lambda(t)$ скачкообразный процесс, то в течение промежутка времени $(t, t + \Delta t)$ значение $\lambda(t)$ остается неизменным с вероятностью $1 - \alpha\Delta t + o(\Delta t)$, и лишь с вероятностью $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$ может претерпевать изменение. При этом считается, что вероятность более чем одного изменения $\lambda(t)$ есть величина $o(\Delta t)$.

С одной стороны состояние $\mathbf{H}(\omega, t + \Delta t, x)$ может возникнуть, если за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ интенсивность $\lambda(t)$ не изменила своего значения (это событие имеет вероятность $1 - \alpha\Delta t + o(\Delta t)$) и незавершенная работа в момент времени $t + \Delta t$ была не больше ω, то есть $U(t + \Delta t) \leqslant \omega$. Данное состояние может возникнуть, если за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$

интенсивность $\lambda(t)$ изменила свое значение с x на y (это событие имеет вероятность $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$) и незавершенная работа в момент времени $t+\Delta t$ не превышает ω, то есть $U(t+\Delta t)\quad \omega$.

Появление события

$$U(t+\Delta t) \quad \omega \tag{2}$$

возможно в двух случаях:

1. В систему за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ не поступало ни одного требования, то есть незавершенная работа не совершала скачка. Имеем $U(t+\Delta t) = U(t) - \Delta t$. Следовательно, вероятность события (2) и вероятность того, что не поступило ни одного требования $1 - x\Delta t$, равно произведению

$$P\{U(t+\Delta t) \quad \omega\}(1 - x\Delta t) = P\{U(t) - \Delta t \quad \omega\}(1 - x\Delta t) =$$
$$= P\{U(t) \quad \omega + \Delta t\}(1 - x\Delta t) = (1 - x\Delta t)\,\mathbf{H}(\omega + \Delta t, t, x).$$

2. В систему за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ поступила одна заявка, то есть незавершенная работа совершила скачок на случайную величину η. Имеем $U(t+\Delta t) = U(t) + \eta - \Delta t$. Следовательно,

$$P\{U(t+\Delta t) \quad \omega\} = P\{U(t) + \eta - \Delta t \quad \omega\} = P\{U(t) + \eta \quad \omega + \Delta t\}.$$

Функция распределения суммы двух независимых случайных величин $U(t)$ и η по определению равна

$$P\{U(t) + \eta \quad \omega + \Delta t\} = \int\limits_0^{\omega+\Delta t} B(\omega + \Delta t - s)\frac{\partial \mathbf{H}(s, t, x)}{\partial s}ds,$$

где $U(t) \approx s$, $U(t) \in (s, s + ds)$.

Значит, вероятность события (2) и вероятность того, что появилась одна заявка, равна следующему выражению

$$x\Delta t \int\limits_0^{\omega+\Delta t} B(\omega + \Delta t - s)\frac{\partial \mathbf{H}(s, t, x)}{\partial s}ds.$$

Таким образом, по формуле полной вероятности получаем

$$\mathbf{H}(\omega, t+\Delta t, x) = (1 - \alpha\Delta t)\Bigg\{(1 - x\Delta t)\,\mathbf{H}(\omega + \Delta t, t, x) +$$
$$+ x\Delta t \int\limits_0^{\omega+\Delta t} B(\omega + \Delta t - s)\frac{\partial \mathbf{H}(s, t, x)}{\partial s}ds\Bigg\} + \alpha\Delta t\varphi(x)\int\limits_a^b \Bigg\{(1 - y\Delta t)\,\mathbf{H}(\omega + \Delta t, t, y) +$$
$$+ y\Delta t \int\limits_0^{\omega+\Delta t} B(\omega + \Delta t - s)\frac{\partial \mathbf{H}(s, t, x)}{\partial s}ds\Bigg\}dy + o(\Delta t).$$

Применяя формулу Тейлора к функции $\mathbf{H}(\omega + \Delta t, t, x)$, получим

$$\mathbf{H}(\omega, t+\Delta t, x) = (1 - \alpha\Delta t)\Bigg\{(1 - x\Delta t)\left[\mathbf{H}(\omega, t, x) + \frac{\partial \mathbf{H}(\omega, t, x)}{\partial \omega}\Delta t\right] +$$
$$+x\Delta t \int\limits_0^{\omega+\Delta t} B(\omega + \Delta t - s)\frac{\partial \mathbf{H}(s, t, x)}{\partial s}ds\Bigg\} +$$

$$+\alpha\Delta t\varphi(x)\int\limits_a^b\left\{(1-y\Delta t)\left[\mathbf{H}(\omega,t,y)+\frac{\partial\mathbf{H}(\omega,t,y)}{\partial\omega}\Delta t\right]+\right.$$
$$\left.+y\Delta t\int\limits_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial\mathbf{H}(s,t,x)}{\partial s}ds\right\}dy+o(\Delta t).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\mathbf{H}(\omega,t+\Delta t,x)=\left(1-\alpha\Delta t-x\Delta t+\alpha x(\Delta t)^2\right)\left[\mathbf{H}(\omega,t,x)+\frac{\partial\mathbf{H}(\omega,t,x)}{\partial\omega}\Delta t\right]+$$
$$+x\Delta t\int\limits_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial\mathbf{H}(s,t,x)}{\partial s}ds-\alpha x(\Delta t)^2\int\limits_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial\mathbf{H}(s,t,x)}{\partial s}ds+$$
$$+\alpha\Delta t\varphi(x)\int\limits_a^b\left\{\mathbf{H}(\omega,t,y)+\frac{\partial\mathbf{H}(\omega,t,y)}{\partial\omega}\Delta t-y\Delta t\mathbf{H}(\omega,t,y)-y(\Delta t)^2\frac{\partial\mathbf{H}(\omega,t,y)}{\partial\omega}+\right.$$
$$\left.+y\Delta t\int\limits_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial\mathbf{H}(s,t,x)}{\partial s}ds\right\}dy+o(\Delta t).$$

Перенесем $\mathbf{H}(\omega,t,x)$ в левую часть, разделим обе части уравнения на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$, получим уравнение (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}(\omega,t,x)=-(\alpha+x)\mathbf{H}(\omega,t,x)+x\int\limits_0^{\omega}B(\omega-s)\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{H}(s,t,x)ds+\frac{\partial\mathbf{H}(\omega,t,x)}{\partial\omega}+$$
$$+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b\mathbf{H}(\omega,t,y)dy,\omega>0.\quad(1)$$

Для ДС СМО типа $M/G/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока стационарная функция распределения $\mathbf{h}(\omega,x)$ удовлетворяет интегро–дифференциальному уравнению типа Такача следующего вида

$$-(\alpha+x)\mathbf{h}(\omega,x)+x\int\limits_0^{\omega}B(\omega-s)\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{h}(s,x)ds+\frac{\partial}{\partial\omega}\mathbf{h}(\omega,x)+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b\mathbf{h}(\omega,y)dy=0,\omega>0,\quad(3)$$

с односторонним краевым условием $\mathbf{h}(0^+,x)=q_0(x)$.

Рассмотрим вывод уравнения (3).

Поскольку, по определению стационарного режима, в стационарном режиме характеристики не меняются с течением времени, т.е. выполняется $\mathbf{H}(\omega,t,x)=\mathbf{h}(\omega,x)$, то отсюда $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}(\omega,t,x)=0$. Следовательно, в стационарном режиме из уравнения (1) следует уравнение (3). В стационарном режиме условие $\mathbf{H}(0^+,t,x)=Q_0(t,x)$ превращается в условие $\mathbf{h}(0^+,x)=q_0(x)$.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СМО С РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ

Рассмотрим СМО с бесконечным накопителем, скачкообразной интенсивностью входного потока $\lambda(t)$, с основным и резервным прибором, с экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ_1 на основном приборе и μ_2 на резервном. Резервный прибор включается, если число заявок превысит или будет равняться ν. Интенсивность $\lambda(t)$ меняется на промежутке $[a, b]$, интервалы постоянства T имеют экспоненциальное распределение с параметром α. Значения процесса $\lambda(t)$ в точках разрыва справа не зависят от значений процесса в точках разрыва слева и имеют плотность распределения $\varphi(x)$, $x \in [a,\ b]$.

Введем обозначения: $Q_k(t, x) = P\{\xi(t) = k, x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$, где $\xi(t)$ — число заявок в СМО в момент t; $q_k(x) = P\{\xi = k, x < \lambda < x + dx\}/dx$, где ξ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $Q_k(t, x)$, $q_k(x)$ — характеристики числа заявок, $k \geqslant 0$; $f(t, x) = P\{x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$ — нестационарная плотность $\lambda(t)$; $f(x) = P\{x < \lambda < x + dx\}/dx$ — стационарная плотность λ, где λ — интенсивность входного потока в стационарном режиме, $x \in [a, b]$.

ВЫВОД СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СМО С РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ

Применяя динамику Колмогорова-Чепмена (Δt метод) [8], получим уравнения, связывающие между собой функции $Q_k(t, x)$, $k \geqslant 0$.

Рассмотрим временной интервал $(t, t + \Delta t)$. Пусть в момент времени t выполняется: $x < \lambda(t) < x + dx$. Так как $\lambda(t)$ скачкообразный процесс, то в течение промежутка времени $(t, t + \Delta t)$ значение $\lambda(t)$ остается неизменным с вероятностью $1 - \alpha\Delta t + o(\Delta t)$, и лишь с вероятностью $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$ может претерпевать изменение. При этом считается, что вероятность более чем одного изменения $\lambda(t)$ есть величина $o(\Delta t)$.

Введем обозначения:

1) вероятность того, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ не появилось ни одной заявки

$$\upsilon_0(\Delta t, x) = e^{-x\Delta t} = 1 - x\Delta t + o(\Delta t);$$

2) вероятность того, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ появилась одна заявка

$$\upsilon_1(\Delta t, x) = \frac{x\Delta t}{1!} e^{-x\Delta t} = x\Delta t + o(\Delta t);$$

3) вероятность того, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ появилось более одной заявки есть $o(\Delta t)$;

4) вероятность того, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ не обслужилось ни одной заявки

$$\omega_0(\Delta t) = 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t);$$

5) вероятность того, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ обслужилась одна заявка

$$\omega_1(\Delta t) = \mu\Delta t + o(\Delta t),$$

где $\mu = \mu_1$ или $\mu = \mu_1 + \mu_2$, в зависимости от того, включен один или два обслуживающих прибора;

6) вероятность того, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ обслужилось более чем одна заявка есть $o(\Delta t)$.

Определим переходные вероятности

$$p_{j,k}(t + \Delta t, x) = P\{\xi(t) = j,\ \ \nu(t + \Delta t) = k\}.$$

Рассмотрим теперь переходные вероятности с учетом того, что в момент времени t выполняется: $x < \lambda(t) < x + dx$:

$$p_{k-1,\,k}(t, \Delta t, x) = x\Delta t + o(\Delta t), \quad 1 < k < \nu;$$

$$p_{k\,,k}(t, \Delta t, x) = 1 - (x + \mu_1)\Delta t + o(\Delta t), \quad 1 < k < \nu;$$

$$p_{k+1,\,k}(t + \Delta t, x) = \mu_1 \Delta t + o(\Delta t), \quad 1 < k < \nu;$$

$$p_{j,\,k}(t + \Delta t, x) = o(\Delta t), \quad |j - k| > 1, \quad 1 < k < \nu.$$

С учетом полученных переходных вероятностей и формулы полной вероятности, учитывая то, что при отсутствии скачка $\lambda(t)$ на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ интенсивность входного потока $x < \lambda(t) < x + dx$, а при наличии скачка $\lambda(t)$ на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ интенсивность входного потока $y < \lambda(t) < y + dy$, получим (4):

$$Q_k(t + \Delta t, x)dx = \left\{ \sum_{j \geqslant 0} Q_j(t, x)dx \cdot p_{j,k}(\Delta t, x) \right\} \times \{1 - \alpha \Delta t + o(\Delta t)\} +$$
$$+ \int\limits_a^b \varphi(x, y)dx \sum_{j \geqslant 0} Q_j(t, y) \cdot p_{j,k}(\Delta t, y) \times \{\alpha \Delta t + o(\Delta t)\}\, dy, \quad 1 \quad k \quad \nu - 1, \quad (4)$$

Подставляя переходные вероятности $p_{j,k}(\Delta t, x)$, получим (5)

$$Q_k(t + \Delta t, x)dx = (x\Delta t Q_{k-1}(t, x)dx + [1 - (x + \mu_1)\Delta t]\, Q_k(t, x)dx +$$
$$+ \mu_1 \Delta t Q_{k+1}(t, x)dx)(1 - \alpha \Delta t) + \int\limits_a^b \alpha \Delta t \varphi(x, y)dx \times \{y \Delta t Q_{k-1}(t, y) \times$$
$$\times [1 - (y + \mu_1)\Delta t]\, Q_k(t, y) + \mu_1 \Delta t Q_{k+1}(t, y)\}dy + o(\Delta t), \quad 1 \quad k \quad \nu - 1. \quad (5)$$

Перенесем в уравнении (5) $Q_k(t, x)$ из левой части в правую и разделим равенство на Δt, получим (6):

$$\frac{Q_k(t, \Delta t, x) - Q_k(t, x)}{\Delta t} = xQ_{k-1}(t, x) - (x + \mu_1 + \alpha)Q_k(t, x) + \mu_1 Q_{k+1}(t, x) +$$
$$+ \alpha \varphi(x) \int\limits_a^b Q_k(t, y)dy + o(\Delta t), \quad 1 \quad k \quad \nu - 1. \quad (6)$$

Устремляя $\Delta t \to 0$, получаем следующее уравнение для $Q_k(t, x)$, $1 \quad k \quad \nu - 1$:

$$Q'_k(t, x) = xQ_{k-1}(t, x) - (x + \mu_1 + \alpha)Q_k(t, x) + \mu_1 Q_{k+1}(t, x) +$$
$$+ \alpha \varphi(x) \int\limits_a^b Q_k(t, y)dy, \quad 1 \quad k \quad \nu - 1. \quad (7)$$

Получим уравнение при $k = 0$. Переходные вероятности выглядят следующим образом

$$p_{0,0}(\Delta t, x) = 1 - x\Delta t + o(\Delta t);$$

$$p_{1,0}(\Delta t, x) = \mu_1 \Delta t + o(\Delta t).$$

Согласно формуле полной вероятности имеем

$$Q_0(t+\Delta t,x)dx = \{Q_0(t,x)dx\cdot p_{0,0}(t) + Q_1(t,x)dx\cdot p_{1,0}(t)\}\cdot\{1-\alpha\Delta t + o(\Delta t)\} + \\ + \int\limits_a^b \varphi(x,y)\,dx\;\{Q_0(t,y)\cdot p_{0,0}(t) + Q_1(t,y)\cdot p_{1,0}(t)\}\cdot\{\alpha\Delta t + o(\Delta t)\}\,dy, \quad k=0. \quad (8)$$

$$Q_0(t+\Delta t,x)dx = (1-(x+\alpha)\Delta t)\,Q_0(t,x)dx + \mu_1\Delta t Q_1(t,x)dx + \\ + \int\limits_a^b \alpha\Delta t\cdot\varphi(x,y)\,dx\,Q_0(t,y)dy + o(\Delta t), \quad k=0. \quad (9)$$

Перенося в последнем уравнении $Q_0(t,x)$ из левой части в правую, деля равенство на Δt и устремляя Δt к нулю, получим (10)

$$Q_0'(t,x) = -\,(x+\alpha+\mu_1)\,Q_0(t,x) + \mu_1 Q_1(t,x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b Q_0(t,y)dy, \quad k=0. \quad (10)$$

Теперь выведем уравнение для $k=\nu$. Переходные вероятности имеют вид:

$$p_{\nu-1,\nu}(\Delta t,x) = x\Delta t + o(\Delta t),$$
$$p_{\nu,\nu}(\Delta t,x) = 1 - x\Delta t - \mu_1\Delta t + o(\Delta t),$$
$$p_{\nu+1,\,\nu}(\Delta t,x) = \mu_2\Delta t + o(\Delta t),$$
$$p_{j,\,k}(\Delta t,x) = o(\Delta t), \quad |j-k|>1, \quad k=\nu.$$

С учетом указанных переходных вероятностей с помощью формулы полной вероятности получим (11), (12):

$$Q_\nu(t+\Delta t,x)dx = \left\{\sum_{j\geqslant 0} Q_j(t,x)dx\cdot p_{j,k}(\Delta t,x)\right\}\times\{1-\alpha\Delta t + o(\Delta t)\} + \\ + \int\limits_a^b \varphi(x,y)dx\sum_{j\geqslant 0} Q_j(t,y)\cdot p_{j,k}(\Delta t,y)\times\{\alpha\Delta t + o(\Delta t)\}\,dy, \quad k=\nu, \quad (11)$$

$$Q_\nu(t+\Delta t,x)dx = \{x\Delta t Q_{\nu-1}(t,x)dx + [1-(x+\mu_1)\Delta t]Q_\nu(t,x)dx + \mu_2\Delta t Q_{\nu+1}(t,x)dx\}\times \\ \times\{1-\alpha\Delta t + o(\Delta t)\} + \int\limits_a^b \alpha\Delta t\cdot\varphi(x,y)\cdot\{y\Delta t Q_{\nu-1}(t,y) + [1-(y+\mu_1)\Delta t]Q_\nu(t,y) + \\ + \mu_2\Delta t Q_{\nu+1}(t,y)\}dy + o(\Delta t), \quad k=\nu, \quad (12)$$

Раскрывая в уравнении скобки, перенесем $Q_\nu(t,x)$ влево, разделим на Δt. Устремляя Δt к нулю, получим (13):

$$Q_\nu'(t,x) = xQ_{\nu-1}(t,x) - (x+\mu_1+\alpha)Q_\nu(t,x) + \mu_2 Q_{\nu+1}(t,x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b Q_\nu(t,y)dy, \quad k=\nu. \quad (13)$$

Теперь выведем уравнение для $k \geqslant \nu+1$, учитывая, что обслуживание будет в этом случае производиться с интенсивностью μ_2:

$$
\begin{gathered}
p_{k-1,\,k}(\Delta t, x) = x\Delta t + o(\Delta t),\\
p_{k,\,k}(\Delta t, x) = 1 - x\Delta t - \mu_2\Delta t + o(\Delta t), \quad k \geqslant \nu+1,\\
p_{k+1,\,k}(\Delta t, x) = \mu_2\Delta t + o(\Delta t), \quad k \geqslant \nu+1,\\
p_{j,\,k}(\Delta t, x) = o(\Delta t), \qquad |j-k| > 1, \quad k \geqslant \nu+1.
\end{gathered}
$$

С учетом полученных переходных вероятностей и формулы полной вероятности получим (14):

$$
Q_k(t+\Delta t, x)dx = \left\{\sum_{j\geqslant 0} Q_j(t,x)dx \cdot p_{j,k}(\Delta t, x)\right\} \times \{1 - \alpha\Delta t + o(\Delta t)\} +
$$
$$
+ \int_a^b \varphi(x,y)dx \sum_{j\geqslant 0} Q_j(t,y)\cdot p_{j,k}(\Delta t, y) \times \{\alpha\Delta t + o(\Delta t)\}\, dy, \quad k \geqslant \nu+1. \quad (14)
$$

Выражая переходные вероятности, получим (15)

$$
Q_k(t+\Delta t, x) = (x\Delta t Q_{k-1}(t,x) + [1-(x+\mu_2)\Delta t]\, Q_k(t,x)dx +
$$
$$
+ \mu_2\Delta t Q_{k+1}(t,x))(1-\alpha\Delta t) + \int_a^b \alpha\Delta t\varphi(x,y)dx \times (y\Delta t Q_{k-1}(t,y) +
$$
$$
+ [1-(y+\mu_2)\Delta t]Q_k(t,y) + \mu_2\Delta t Q_{k+1}(t,y))dy + o(\Delta t), \quad k \geqslant \nu+1. \quad (15)
$$

Раскрывая в уравнении скобки, перенося $Q_k(t,x)$ влево, деля на Δt и устремляя $\Delta t \to 0$, получим уравнение (16)

$$
Q_k'(t,x) = xQ_{k-1}(t,x) - (x+\mu_2+\alpha)Q_k(t,x) + \mu_2 Q_{k+1}(t,x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b Q_k(t,y)dy,\ k \geqslant \nu+1. \quad (16)
$$

В результате получили следующую систему интегро-дифференциальных уравнений для СМО с резервным прибором:

$$
\begin{aligned}
&Q_0'(t,x) = -(x+\alpha)Q_0(t,x) + \mu_1 Q_1(t,x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b Q_0(t,y)dy, && k = 0,\\
&Q_k'(t,x) = xQ_{k-1}(t,x) - (x+\mu_1+\alpha)Q_k(t,x) + \mu_1 Q_{k+1}(t,x) + &&\\
&+ \alpha\varphi(x)\int_a^b Q_k(t,y)dy, && 1 \quad k \quad \nu-1,\\
&Q_\nu'(t,x) = xQ_{\nu-1}(t,x) - (x+\mu_1+\alpha)Q_\nu(t,x) + \mu_1 Q_{\nu+1}(t,x) + &&\\
&+ \alpha\varphi(x)\int_a^b Q_\nu(t,y)dy, && k = \nu,\\
&Q_k'(t,x) = xQ_{k-1}(t,x) - (x+\mu_2+\alpha)Q_k(t,x) + \mu_2 Q_{k+1}(t,x) + &&\\
&+ \alpha\varphi(x)\int_a^b Q_k(t,y)dy, && k \geqslant \nu+1.
\end{aligned}
$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано выше, работа имеет прикладное и теоретическое значение. Научная новизна работы для СМО со скачкообразной интенсивностью входного потока состоит в следующем: для СМО с одним прибором обслуживания получены уравнения типа Такача относительно характеристик незавершенной работы в СМО (времени ожидания), для СМО с основным и резервным прибором получена система интегро-дифференциальных уравнений типа Колмогорова-Чепмена относительно характеристик числа заявок в СМО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головко, Н. И. Применение моделей СМО в информационных системах / Н. И. Головко, В. В. Катрахов. — Владивосток: Изд-во ТГЭУ, 2008. — 272 с.

2. Головко, Н. И. СМО с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока / Н. И. Головко, В. О. Каретник, О. В. Пелешок // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 10. — С. 75–96.

3. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / Н. И. Головко, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2008. — Т. XI, № 2 (34). — С. 50–64.

4. Королюк, В. С. Стохастические модели систем / В. С. Королюк. — Киев: Наук. думка, 1989. — 207 с.

5. Горцев, А. М. Управление и адаптация в системах массового обслуживания / А. М. Горцев, А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1978. — 208 с.

6. Головко, Н. И. Система массового обслуживания со случайно изменяющейся интенсивностью входного потока / Н. И. Головко, И. А. Коротаев // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 7. — С. 80–85.

7. Дудин, А. Н. Об обслуживающей системе с переменным режимом работы / А. Н. Дудин // Автоматика и вычислительная техника. — 1985. — № 2. — С. 27–29.

8. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.

9. Clarke, A. B. The time-dependent waiting line problem / A. B. Clarke // Umv Michigan Rept M720-1RS9, 1953.

10. Clarke, A. B. On time-dependent waiting line processes / A. B. Clarke // Ann. Math. Stattst. — V. 24. — P. 491–492.

11. Cox, D. R. The analysis of non-Markovian stochastic processes / D. R. Cox // Free Gambr. PkA Soc. — 1955. — V. 61, N 3. — P. 433–441.

12. Harrison, I. M. Limit theorems for periodic queues / I. M. Harrison, A. J. Lemoine // J. Appl. Prob. — 1976. — V. 14. — P. 566–576.

13. Lemoine, A. J. On queues with periodic Poisson input / A. J. Lemoine // J. Appl. Prob. — 1981. — V. 18. — P. 889–900.

14. Захаров, А. В. Распределение величины абсолютного максимума разрывного стационарного случайного процесса с релеевской и гауссовской компонентами / А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 34–48.

15. Костылев, В. И. Энергетическое различение некоторых случайных векторов / В. И. Костылев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 212–218.

16. Захаров, А. В. Оценка времени прихода флуктуирующего радиоимпульса с неизвестной интенсивностью / А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 25–40.

17. Трифонов, А. П. Статистические свойства высоты и положения абсолютного максимума марковского случайного процесса типа Башелье / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин,

М. Б. Беспалова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 54-65.

REFERENCES

1. Golovko N. I., Katrakhov V. V. The application of models queuing systems in information networks. [Golovko N. I., Katrakhov V. V. Primenenie modelej SMO v informatcionnih sistemah]. Vladivostok: PSUE, 2008, 272 p.

2. Golovko N. I., Karetnik V. O., Peleshok O. V. Service systems with infinite storage and step-like arrival rate. [Golovko N. I., Karetnik V. O., Peleshok O. V. SMO s beskonechnym nakopitelem i skachkoobraznoj intensivnost'ju vhodnogo potoka]. *Avtomatika i telemehanika — Automation and remote control*, 2009, no. 10, pp. 75–96.

3. Golovko N. I., Karetnik V. O., Tanin V. E., Safonuyk I. I. Research of models of service systems in information networks. [Golovko N. I., Karetnik V. O., Tanin V. E., Safonuyk I. I. Issledovanie modelej sistem massovogo obsluzhivanija v informacionnyh setjah]. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki — Siberian journal of industrial mathematics*, 2008, vol. XI, no. 2 (34), pp. 50–64.

4. Koroljuk V. S. Stochastic models of systems. [Korolyuk V. S. Stoxasticheskie modeli sistem]. Kiev, 1989, 207 p.

5. Gorchev A. M., Nazarov A. A., Terpugov A. F. Management and adaptation in systems of mass service. [Gorcev A. M., Nazarov A. A., Terpugov A. F. Upravlenie i adaptaciya v sistemax massovogo obsluzhivaniya]. Tomsk, 1978, 208 p.

6. Golovko N. I., Korotaev I. A. A service system with randomly varying arrival rate. [Golovko N. I., Korotaev I. A. Sistema massovogo obsluzhivanija so sluchajno izmenjajushhejsja intensivnost'ju vhodnogo potoka]. *Avtomatika i telemehanika — Automation and remote control*, 1990, no. 7, pp. 80–85.

7. Dudin A. N. On the serving system with variable mode of operation. [Dudin A. N. Ob obsluzhivayushhej sisteme s peremennym rezhimom raboty]. *Avtomatika i vychislitel'naya texnika — Automatic Control and Computer Sciences*, 1985, no. 2, pp. 27–29.

8. Cleinrock L. Queuing theory. [Cleinrock L. Teorija massovogo obsluzhivanija]. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p.

9. Clarke A. B. The time-dependent waiting line problem, Umv Michigan Rept M720-1RS9, 1953.

10. Clarke A. B. On time-dependent waiting line processes, Ann. Math. Stattst, vol. 24, pp. 491–492.

11. Cox D. R. The analysis of non-Markovian stochastic processes, Free Gambr. PkA Soc., 1955, vol. 61, n. 3, pp. 433–441.

12. Harrison I. M., Lemoine A. J. Limit theorems for periodic queues. J. Appl. Prob., 1976, vol. 14, pp. 566–576.

13. Lemoine A. J. On queues with periodic Poisson input, J. Appl. Prob., 1981, vol. 18, pp. 889–900.

14. Zakharov A. V. Distribution of Absolute Maximum of Unregular Gomogeneous Random Process with Rayleigh and Gaussian Components. [Zaxarov A. V. Raspredelenie velichiny absolyutnogo maksimuma razryvnogo stacionarnogo sluchajnogo processa s releevskoj i gaussovskoj komponentami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 34–48.

15. Kostylev V. I. Energy Separation of Some Random Vectors. [Kostylev V. I. E'nergeticheskoe razlichenie nekotoryx sluchajnyx vektorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 212–218.

16. Zakharov A. V. Estimation of Time Delay of Fluctuated Radiopulse with Unknown Intensity. [Zaxarov A. V. Ocenka vremeni prixoda fluktuiruyushhego radioimpul'sa s neizvestnoj intensivnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 25–40.

17. Trifonov A. P., Korchagin Y. E., Bespalova M. B. Statistical Properties of Height and Provisions of Absolute Maximum Markov Processes Bachelier Type. [Trifonov A. P., Korchagin Yu. E., Bespalova M. B. Statisticheskie svojstva vysoty i polozheniya absolyutnogo maksimuma markovskogo sluchajnogo processa tipa Bashel'e]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 54–65.

Бондрова О. В., ассистент кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета, Владивосток, Россия
E-mail: ctol_08@mail.ru
Тел.: 89020512870

Bondrova O.V., assistant of the Department of algebra, geometry and analysis of the Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia
E-mail: ctol_08@mail.ru
Tel.: 89020512870

Крылова Д. С., старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета, Владивосток, Россия
E-mail: krylovadiana@mail.ru
Тел.: 89147064152

Krylova D. S., senior teacher of the Department of algebra, geometry and analysis of the Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia
E-mail: krylovadiana@mail.ru
Tel.: 89147064152

Головко Н. И., доктор технических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета, Владивосток, Россия
E-mail: ctol_08@mail.ru
Тел.: 89146768992

Golovko N. I., doctor of technical Sciences, Professor of the Department of algebra, geometry and analysis of the Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia
E-mail: ctol_08@mail.ru
Tel.: 89146768992

Жук Т. А., доцент кафедры высшей математики Дальневосточного государственного технического рыбохозяйственного университета, Владивосток, Россия
E-mail: ctol_08@mail.ru
Тел.: (4232)26–047–18

Zhuk T. A., associate Professor of the higher mathematics Department of the Far Eastern State Technical Fishery University, Vladivostok, Russia
E-mail: ctol_08@mail.ru
Tel.: (4232)26–047–18