УДК 517.954.988.8

РАЗРЕШИМОСТЬ ВАРИАЦИОННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

А. С. Бондарев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 09.02.2015 г.

Аннотация. В гильбертовом пространстве абстрактное линейное параболическое уравнение с периодическим условием на решение решается приближенно методом Галеркина. Установлены априорные оценки приближенных решений, с помощью которых доказаны слабая, гладкая и обобщенная разрешимость исходного уравнения. Обобщенная разрешимость доказана для случая симметричного оператора, в качестве такого оператора может быть использован равномерно эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с краевым условием Дирихле или граничным условием Неймана.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, периодическое условие, метод Галеркина, гладкая разрешимость, обобщенная разрешимость, равномерно эллиптический дифференциальный оператор второго порядка.

THE SOLVABILITY OF THE VARIATIONAL PARABOLIC EQUATION WITH A PERIODIC CONDITION ON THE SOLUTION

A. S. Bondarev

Abstract. An abstract linear parabolic equation with a periodic condition on the solution solved approximately by the Galerkin's method in the Hilber space. Weak, smooth and generalized solvability of original equation are proved using a priori estimates of approximate solutions. Generalized solvability is proved in the case of symmetrical operator, for example, uniformly elliptical second order differential operator with the Dirichlet or Neumann boundary condition.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, periodic conditions, Galerkin's method, smooth solv- ability, generalized solvability, uniformly elliptical second order differential operator.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть даны сепарабельные гильбертовы пространства $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u, v \in V$ форму $a(t,u,v)$, измеримую по $t \in [0,T]$. Пусть для $u, v \in V$ и почти всех $t \in [0,T]$

$$|a(t,u,v)| \leqslant \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(t,u,u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t) : V \to V'$, такой, что $(A(t)u, v) = a(t,u,v)$, где выражение типа (z,v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z,v) — скалярное произведение в H [1].

Рассмотрим в V' на $[0, T]$ параболическую задачу:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \tag{2}$$

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщенном смысле. Уравнение в (2) можно записать в следующем виде [2]: для всякого $v \in V$

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(t, u(t), v) = (f(t), v).$$

Теорема 1. *Для заданного $f \in L_2(0, T; V')$ существует (и притом единственное) решение $u \in L_2(0, T; V) \bigcap C([0, T], H)$ задачи (2), называемое слабым решением, причем $u' \in L_2(0, T; V')$* [2].

Отметим [3] оценку решения задачи (2)

$$\max_{0 \quad t \quad T} \|u(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\right) dt \qquad C \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \, dt. \tag{3}$$

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Воспользовавшись методом Галеркина, проведем новое доказательство теоремы 1, в котором установим априорные оценки, необходимые в дальнейшем для доказательства существования более гладкого решения задачи (2). Будем предполагать далее, что вложение $V \subset H$ компактно. Отметим, что в приложениях это условие, как правило, выполнено.

Доказательство теоремы 1. Выберем в пространстве V полную линейно независимую систему элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Заметим, что система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ также полна в пространствах H и V'. Определим конечномерное подпространство $V_m \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$. Введем пространство V_m', задав на $u_m \in V_m$ двойственную норму

$$\|u_m\|_{V_m'} = \sup_{\substack{v_m \in V_m \\ \|v_m\|_V = 1}} |(u_m, v_m)|.$$

Через P_m обозначим ортопроектор в пространстве H на V_m. Как замечено в [4], оператор P_m допускает расширение по непрерывности до $\overline{P_m} : V' \to V_m'$, причем для $u \in V'$ справедливо $\|\overline{P_m}u\|_{V_m'} \quad \|u\|_{V'}$ и $\|\overline{P_m}u\|_{V'} \quad \|P_m\|_{V \to V}\|u\|_{V'}$. Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ соотношение $(\overline{P_m}u, v) = (u, P_m v)$.

Определенную на $[0, T]$ функцию $u_m(t) \in V_m$ назовем приближенным решением задачи (2), найденным по методу Галеркина, если

$$u_m'(t) + \overline{P_m}A(t)u_m(t) = \overline{P_m}f(t), \qquad u_m(0) = u_m(T). \tag{4}$$

Задача (4) сводится к задаче Коши для конечной линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$(u_m'(t), \varphi_i) + a(t, u_m(t), \varphi_i) = (f(t), \varphi_i), \quad u_m(0) = u_m(T). \quad (i = \overline{1, m})$$

Докажем существование решения задачи (4). Всякое решение уравнения (4) представимо в виде

$$u_m(t) = U_m(t, 0)u_m(0) + \int\limits_0^t U_m(t, s)\overline{P_m}f(s)\, ds, \qquad u_m(0) = u_m(T),$$

где $U_m(t, s)$ – разрешающий оператор задачи (4).

Найдем значение $u_m(0)$. Используя периодическое условие, запишем равенство:

$$u_m(T) = U_m(T, 0)u_m(0) + \int_0^T U_m(T, s)\overline{P_m} f(s)\, ds = u_m(0)$$

или

$$(I - U_m(T, 0))u_m(0) = \int_0^T U_m(T, s)\overline{P_m} f(s)\, ds.$$

Покажем, что оператор $I - U_m(T, 0)$ непрерывно обратим. Для этого достаточно установить, что $\|U_m(T, 0)\|_{V_m \to V_m} < 1$.

Рассмотрим однородную задачу Коши

$$v_m'(t) + \overline{P_m} A(t)v_m(t) = 0, \qquad v_m(0) = v_m^0 \in V_m. \tag{5}$$

Решение этой задачи можно записать в виде $v_m(t) = U_m(t, 0)v_m^0$. Умножим обе части уравнения в (5) скалярно на $v_m(t)$:

$$(v_m'(t), v_m(t)) + (\overline{P_m} A(t)v_m(t), v_m(t)) = 0. \tag{6}$$

Отметим, что, по свойству оператора $\overline{P_m}$,

$$(\overline{P_m} A(t)v_m(t), v_m(t)) = a(t, v_m(t), v_m(t)).$$

Тогда, взяв две действительные части в равенстве (6) и воспользовавшись неравенством из (1), получим:

$$\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|_H^2 + 2\alpha\|v_m(t)\|_V^2 \quad 0.$$

Из непрерывности вложения $V \subset H$ получим, что $\|u\|_H \quad \beta\|u\|_V$ для всех $u \in V$. Тогда:

$$\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|_H^2 + \frac{2\alpha}{\beta^2}\|v_m(t)\|_H^2 \quad 0.$$

Из последнего дифференциального неравенства получим:

$$\|v_m(t)\|_H^2 \quad e^{-2\lambda t}\|v_m(0)\|_H^2,$$

где $\lambda = 2\alpha/\beta^2$. Тогда, поскольку $v_m(t) = U_m(t, 0)v_m^0$, то $\|U_m(t, 0)v_m^0\|_H \quad e^{-\lambda t}\|v_m^0\|_H$. Значит, $\|U_m(T, 0)\|_{V_m \to V_m} \quad e^{-\lambda T} < 1$, где элементы из V_m рассматриваются в норме пространства H. Следовательно, задача (4) имеет единственное решение.

Для решения задачи (4) справедливо равенство:

$$(u_m'(t), u_m(t)) + a(t, u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)).$$

Отсюда, с учетом (1), следует

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \alpha\|u_m(t)\|_V^2 \quad \frac{1}{\alpha}\|f(t)\|_{V'}^2.$$

Последнее неравенство проинтегрируем от 0 до T. Получим

$$\|u_m(T)\|_H^2 - \|u_m(0)\|_H^2 + \alpha\int_0^T \|u_m(t)\|_V^2\, dt \quad \frac{1}{\alpha}\int_0^T \|f(s)\|_{V'}^2\, ds.$$

Поскольку $u_m(0) = u_m(T)$, то

$$\int\limits_0^T \|u_m(t)\|_V^2\, dt \quad \frac{1}{\alpha^2}\int\limits_0^T \|f(s)\|_{V'}^2\, ds. \tag{7}$$

Из оценки (7) следует, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;V)$. Значит, существует подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}$, слабо сходящаяся в пространстве $L_2(0,T;V)$ к некоторой функции $u(t)$ из этого пространства. Покажем, что эта функция является решением задачи (2).

Для $j = \overline{1,\mu}$ получим

$$(u'_\mu(t), \varphi_j) + a(t, u_\mu(t), \varphi_j) = (f(t), \varphi_j).$$

Умножим последнее равенство на скалярную функцию $\psi \in C_0^\infty(0,T)$ и проинтегрируем полученное выражение:

$$\int\limits_0^T (u'_\mu(t), \varphi_j)\psi(t)\, dt + \int\limits_0^T a(t, u_\mu(t), \varphi_j)\psi(t)\, dt = \int\limits_0^T (f(t), \varphi_j)\psi(t)\, dt.$$

После интегрирования по частям получим:

$$-\int\limits_0^T (u_\mu(t), \varphi_j)\psi'(t)\, dt + \int\limits_0^T a(t, u_\mu(t), \varphi_j)\psi(t)\, dt = \int\limits_0^T (f(t), \varphi_j)\psi(t)\, dt.$$

Заметим, что $\psi'(t)\varphi_j, \psi(t)\varphi_j \in L_2(0,T;V)$, то есть интегралы в последнем равенстве определены. При стремлении $\mu \to \infty$ для всех $j \in \mathbb{N}$ получим, в силу непрерывности функционалов $F_1(z) = \int_0^T (z(t), \psi'(t)\varphi_j)\, dt$ и $F_2(z) = \int_0^T a(t, z(t), \psi'(t)\varphi_j)\, dt$ по $z \in L_2(0,T;V)$:

$$-\int\limits_0^T (u(t), \psi'(t)\varphi_j)\, dt + \int\limits_0^T a(t, u(t), \psi(t)\varphi_j)\, dt = \int\limits_0^T (f(t), \psi(t)\varphi_j)\, dt. \tag{8}$$

Ввиду полноты системы $\{\varphi_j\}$ в пространстве V предельным переходом из (8) следует равенство:

$$-\int\limits_0^T (u(t), v)\psi'(t)\, dt + \int\limits_0^T a(t, u(t), v)\psi(t)\, dt = \int\limits_0^T (f(t), v)\psi(t)\, dt$$

для всех $v \in V$. Последнее равенство означает, что в смысле обобщенных функций выполнено следующее:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(t, u(t), v) = (f(t), v).$$

Таким образом, функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению в (2).

Теперь покажем, что для $u(t)$ справедливо равенство $u(0) = u(T)$. Отметим, что из равенства $u_m(0) = u_m(T)$ для приближенного решения следует, что $\int_0^T u'_m(t)\, dt = 0$. Тогда для любого $\varphi_i \in V_m$ выполнено

$$\left(\int\limits_0^T u'_m(t)\, dt, \varphi_i\right) = 0 \quad (i = \overline{1,m}). \tag{9}$$

Далее рассмотрим гильбертово пространство [2] $W(0,T) = \{u : u \in L_2(0,T;V), u' \in L_2(0,T;V')\}$. Как следует из (4), свойств оператора $\overline{P_m}$, неравенств (1) и (7), для $\{u'_m(t)\}$ справедливо:

$$\int_0^T \|u'_m(t)\|^2_{V'}\,dt = \int_0^T \|\overline{P_m}f(t) - \overline{P_m}A(t)u_m(t)\|^2_{V'}\,dt$$

$$2\|P_m\|_{V\to V}\left(\int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\,dt + \int_0^T \|A(t)u_m(t)\|^2_{V'}\,dt\right)$$

$$2\|P_m\|_{V\to V}\left(\int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\,dt + \mu\int_0^T \|u_m(t)\|^2_{V}\,dt\right)$$

$$2\|P_m\|_{V\to V}\left(1 + \frac{\mu}{\alpha^2}\right)\int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\,dt.$$

Поскольку вложение $V \subset H$ компактно, то в пространстве V существует полная линейно независимая система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, такая, что $\|P_m\|_{V\to V}$ равномерно ограничены [5]. Будем считать, что выбранная ранее в доказательстве теоремы система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ обладает необходимым свойством. Тогда

$$\|u'_m\|_{L_2(0,T;V')} \quad C\|f\|_{L_2(0,T;V')}. \tag{10}$$

Неравенства (7) и (10) означают, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $W(0,T)$. Выделим из $\{u_m(t)\}$ слабо сходящуюся в $W(0,T)$ подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}$. Очевидно, что слабым пределом в $L_2(0,T;V)$ подпоследовательности $\{u_\mu(t)\}$ будет функция $u(t)$. Тогда $\{u'_\mu(t)\}$ слабо сходится в $L_2(0,T;V')$ к функции $u'(t)$. Произведя предельный переход при $\mu \to \infty$ в равенстве (9), получим, в силу непрерывности функционала $F(z) = \left(\int_0^T z(t)\,dt, \varphi_i\right)$ по $z \in L_2(0,T;V')$:

$$\left(\int_0^T u'(t)\,dt, \varphi_i\right) = 0 \quad (i = \overline{1,\mu}).$$

Тогда, в силу полноты системы $\{\varphi_i\}$ в пространстве V, для любого $v \in V$

$$\left(\int_0^T u'(t)\,dt, v\right) = 0.$$

Значит, $\int_0^T u'(t)\,dt = 0$ или $u(0) = u(T)$. $\square$

ГЛАДКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Для получения более гладких, чем раньше, решений, сделаем дополнительные предположения об исходных данных задачи (2). Считаем, что функция $t \to a(t,u,v)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и для формы $a_1(t,u,v) = \partial a(t,u,v)/\partial t$ справедлива оценка

$$|a_1(t,u,v)| \quad \mu_1\|u\|_V\|v\|_V \qquad (u,v \in V). \tag{11}$$

Тогда для $u \in V$ функция $t \to A(t)u \in V'$ слабо дифференцируема на $[0, T]$ и $a_1(t, u, v) = (A'(t)u, v)$. Кроме того, для $u \in V$ функция $t \to A'(t)u \in V'$ измерима и справедлива оценка $\|A'(t)u\|_{V'} \quad \mu_1 \|u\|_V$.

Теорема 2. *Пусть вложение $V \subset H$ компактно, а форма $a(t, u, v)$ удовлетворяет требованиям (1) и (11) и $a(0, u, v) = a(T, u, v)$ для всех $u, v \in V$. Пусть функция $t \to f(t) \in V'$ дифференцируема, $f' \in L_2(0, T; V')$, и выполняется равенство $f(0) = f(T)$. Тогда слабое решение задачи (2) будет таким, что $u' \in L_2(0, T; V) \bigcap C([0, T], H)$, $u'' \in L_2(0, T; V')$, причем справедлива оценка*

$$\max_{0 \quad t \quad T} \|u'(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2 \, dt + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 \, dt \quad C \left(\int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2 \, dt + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \, dt \right). \tag{12}$$

Доказательство. Установим для решения задачи (4) $u_m(t)$ новые априорные оценки. Продифференцируем уравнение (13) по t. Для любого $v_m \in V_m$ получим соотношение

$$(u_m''(t), v_m) + a(t, u_m'(t), v_m) = (f'(t), v_m) - a_1(t, u_m(t), v_m). \tag{13}$$

В (13) положим $v_m = u_m'(t)$, возьмем удвоенную вещественную часть и проинтегрируем от 0 до T. Левую часть полученного выражения оценим снизу. Заметим, что $u_m'(0) = \overline{P_m} f(0) - \overline{P_m} A(0) u_m(0) = \overline{P_m} f(T) - \overline{P_m} A(T) u_m(T) = u_m'(T)$.

$$2 \operatorname{Re} \int_0^T (u_m''(t), u_m'(t)) \, dt + 2 \int_0^T \operatorname{Re} a(t, u_m'(t), u_m'(t)) \, dt \geqslant$$

$$\|u_m'(T)\|_H^2 - \|u_m'(0)\|_H^2 + 2\alpha \int_0^T \|u_m'(t)\|_V^2 \, dt = 2\alpha \int_0^T \|u_m'(t)\|_V^2 \, dt.$$

Правую часть (13) оценим сверху.

$$2 \operatorname{Re} \int_0^T (f'(t), u_m'(t)) \, dt - 2 \operatorname{Re} \int_0^T a_1(t, u_m(t), u_m'(t)) \, dt$$

$$2 \int_0^T \|f'(t)\|_{V'} \|u_m'(t)\|_V \, dt + 2M_1 \int_0^T \|u_m(t)\|_V \|u_m'(t)\|_V \, dt$$

$$2\alpha^{-1} \int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2 \, dt + \alpha \int_0^T \|u_m'(t)\|_V^2 \, dt + 2M_1^2 \alpha^{-1} \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 \, dt.$$

Таким образом,

$$\int_0^T \|u_m'(t)\|_V^2 \, dt \quad 2\alpha^{-2} \int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2 \, dt + 2M_1^2 \alpha^{-2} \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 \, dt.$$

Учитывая (7), получим

$$\int_0^T \|u_m'(t)\|_V^2 \, dt \quad C \left(\int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2 \, dt + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \, dt \right). \tag{14}$$

Из ограниченности последовательностей $\{u_m(t)\}$ и $\{u'_m(t)\}$ в пространстве $L_2(0,T;V)$ следует, что существует подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}$ последовательности $\{u_m(t)\}$, слабо сходящаяся в $L_2(0,T;V)$ к решению $u(t)$ уравнения (2), причем последовательность $\{u'_\mu(t)\}$ слабо сходится в пространстве $L_2(0,T;V)$ к некоторой функции $z(t)$. Покажем, что $z(t) = u'(t)$.

Возьмем скалярную функцию $C_0^\infty(0,T)$. Тогда для фиксированного i и $\mu > i$, интегрируя по частям, получим:

$$-\int\limits_0^T (u'_\mu(t),\varphi_i)\psi(t)\,dt = \int\limits_0^T (u_\mu(t),\varphi_i)\psi'(t)\,dt.$$

При $\mu \to \infty$ ввиду непрерывности функционалов $\Psi_1(\eta) = \int_0^T (\eta(t),\varphi_i)\psi(t)\,dt$, $\Psi_2(\eta) = \int_0^T (\eta(t),\varphi_i)\psi'(t)\,dt$ по $\eta \in L_2(0,T;V)$

$$-\int\limits_0^T (z(t),\varphi_i)\psi(t)\,dt = \int\limits_0^T (u(t),\varphi_i)\psi'(t)\,dt.$$

Ввиду полноты системы $\{\varphi_i\}$ в пространстве V' и непрерывности функционалов $\Phi_1(\eta) = \int_0^T (z(t),\eta(t))\psi(t)\,dt$ и $\Phi_2(\eta) = \int_0^T (u(t),\eta(t))\psi'(t)\,dt$ по $\eta \in V'$ предельным переходом из последнего равенства получим

$$-\int\limits_0^T (z(t),v)\psi(t)\,dt = \int\limits_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt,$$

где v – произвольный элемент из V'. Последнее равенство означает, что в смысле обобщенных функций выполнено

$$(z(t),v) = \frac{d(u(t),v)}{dt}.$$

Отсюда следует, что $z(t) = u'(t)$.

Поскольку слабым пределом последовательности $\{u'_\mu(t)\}$, для которой справедлива оценка (14), является функция $u' \in L_2(0,T;V)$, то

$$\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt \quad C\left(\int\limits_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2\,dt + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\right). \tag{15}$$

Из уравнения (2) получаем $u'(t) = f(t) - A(t)u(t) \in V'$. Отсюда следует существование

$$u''(t) = f'(t) - A(t)u'(t) - A'(t)u(t) \in V'.$$

Нетрудно установить оценку

$$\int\limits_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2\,dt \quad C\left(\int\limits_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2\,dt + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt + \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt\right).$$

Учитывая (3) и (15), получим оценку (12) для $u''(t)$.

Установили, что $u' \in L_2(0,T;V)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$. Отсюда получим [2], что $u' \in C([0,T],H)$ и справедлива оценка

$$\max_{0\ \ t\ \ T} \|u'(t)\|_H^2 \quad C\int\limits_0^T \left(\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2\right)\,dt,$$

из которой (12) следует и для $\|u'(t)\|_H^2$. $\square$

ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Продолжим изучение задачи (2) в пространстве V'. Укажем для нее условия так называемой обобщенной разрешимости.

Будем предполагать, что форма $a(t,u,v)$ является симметричной, то есть

$$a(t,u,v) = \overline{a(t,v,u)}, \qquad (t \in [0,T], u,v \in V) \tag{16}$$

где черта над комплексным числом означает переход к сопряженному числу.

Теорема 3. *Пусть вложение $V \subset H$ компактно и пусть в задаче (2) форма $a(t,u,v)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и условию (16). Пусть функция $t \to f(t) \in H$ такая, что $f \in L_2(0,T;H)$. Тогда слабое решение $u(t)$ задачи (2) будет таким, что $u', Au \in L_2(0,T;H)$, и справедлива оценка*

$$\int\limits_0^T \left(\|u'(t)\|_H^2 + \|A(t)u(t)\|_H^2\right) dt \quad C \int\limits_0^T \|f(t)\|_H^2 \, dt. \tag{17}$$

Доказательство. Для решения задачи (4) $u_m(t)$ справедливо равенство:

$$\|u_m'(t)\|_H^2 + a(t,u_m(t),u_m'(t)) = (f(t),u_m'(t)). \tag{18}$$

Рассмотрим

$$\frac{d}{dt}a(t,u_m(t),u_m(t)) = \frac{\partial}{\partial t}a(t,u_m(t),u_m(t)) + a(t,u_m'(t),u_m(t)) +$$

$$a(t,u_m(t),u_m'(t)) = a_1(t,u_m(t),u_m(t)) + 2\operatorname{Re} a(t,u_m(t),u_m'(t)).$$

Взяв две вещественные части от обеих частей равенства (18) и учитывая последнее тождество, получим:

$$2\|u_m'(t)\|_H^2 + \frac{d}{dt}a(t,u_m(t),u_m(t)) = a_1(t,u_m(t),u_m(t)) + 2\operatorname{Re}(f(t),u_m'(t)).$$

Проинтегрируем последнее равенство от 0 до T:

$$2\int\limits_0^T \|u_m'(t)\|_H^2 \, dt + a(T,u_m(T),u_m(T)) - a(0,u_m(0),u_m(0)) =$$

$$\int\limits_0^T a_1(t,u_m(t),u_m(t)) \, dt + 2\operatorname{Re}\int\limits_0^T (f(t),u_m'(t)) \, dt.$$

Учитывая периодичность формы и периодическое условие в задаче (4), из предыдущего равенства получим:

$$2\int\limits_0^T \|u_m'(t)\|_H^2 \, dt = \int\limits_0^T a_1(t,u_m(t),u_m(t)) \, ds + 2\operatorname{Re}\int\limits_0^T (f(t),u_m'(t)) \, dt.$$

Проведем в последнем равенстве соответствующие оценки:

$$2\int\limits_0^T \|u_m'(t)\|_H^2\,dt \quad \mu_1\int\limits_0^T \|u_m(t)\|_V^2\,dt + \int\limits_0^T \|f(t)\|_H^2\,dt + \int\limits_0^T \|u_m'(t)\|_H^2\,dt.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_0^T \|u_m'(t)\|_H^2\,dt \quad \mu_1\int\limits_0^T \|u_m(t)\|_V^2\,dt + \int\limits_0^T \|f(t)\|_H^2\,dt.$$

Воспользуемся оценкой (7). Тогда, учитывая непрерывность вложения $H \subset V'$, получим:

$$\int\limits_0^T \|u_m'(t)\|_H^2\,dt \quad M\int\limits_0^T \|f(t)\|_H^2\,dt. \tag{19}$$

Из (7) следует, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;V)$, а из (19) — что последовательность $\{u_m'(t)\}$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;H)$.

Было показано, что существует подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}$ последовательности $\{u_m(t)\}$, которая слабо сходится в $L_2(0,T;V)$ к функции $u \in L_2(0,T;V)$, слабому решению задачи (2). Можно считать, что $\{u_\mu'(t)\}$ одновременно слабо сходится в $L_2(0,T;H)$ к некоторой функции $y \in L_2(0,T;H)$, то есть при $\mu \to \infty$ для любого $v \in L_2(0,T;H)$

$$\int\limits_0^T \big(u_\mu'(t) - y(t), v(t)\big)\,dt \to 0.$$

Как и ранее, отсюда следует, что $u'(t) = y(t)$. Тогда $u' = y \in L_2(0,T;H)$ и оценка (17) выполняется для $\int_0^T \|u'(t)\|_H^2\,dt$.

Из уравнения (2) тогда видно, что $Au \in L_2(0,T;H)$ и

$$\int\limits_0^T \|A(t)u(t)\|_H^2\,dt \quad C\left(\int\limits_0^T \|u'(t)\|_H^2\,dt + \int\limits_0^T \|f(t)\|_H^2\,dt\right).$$

Таким образом, оценка (17) выполнена и для $\int_0^T \|A(t)u(t)\|_H^2\,dt$. □

Положим

$$D[A(t)] = \{v \in V : A(t)v \in H\}.$$

Пусть существует сепарабельное гильбертово пространство E, такое, что $D[A(t)] \subset E \subset H$ и $V = [E,H]_{1/2}$, где $[E,H]_{1/2}$ — интерполяционное пространство между E и H [2]. Пусть для всех $t \in [0,T]$ выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$\|u\|_E \quad \delta\|A(t)u\|_H \qquad (u \in D[A(t)]), \tag{20}$$

где $\delta > 0$. Например, если параболическое уравнение в области Ω определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то рассматриваем пространства: $H = L_2(\Omega), V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), V' = W_2^{-1}(\Omega), E = W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задается условие Неймана, то пространства следующие: $H = L_2(\Omega), V = W_2^1(\Omega), E = W_2^2(\Omega)$.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 3, а также условие (20). Тогда решение* $u(t)$ *задачи (2) дополнительно к утверждению теоремы 3 такое, что* $u \in L_2(0,T;E) \bigcap C([0,T],V)$ *и справедлива оценка*

$$\max_{0 \quad t \quad T} \|u(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2\right) dt \qquad C \int\limits_0^T \|f(t)\|_H^2 \, dt. \tag{21}$$

Доказательство. Установим измеримость функции $t \to u(t) \in E$. В силу сепарабельности пространства E достаточно установить измеримость функции $t \to (v, u(t))$ для любых $v \in E'$, где E' — двойственное к E пространство, причем $E \subset H \subset E'$. Поскольку вложение $H \subset E'$ плотно и непрерывно, то для всякого $v \in E'$ найдется последовательность $\{v_n\} \in H$, что $\|v_n - v\|_{E'} \to 0$ при $n \to \infty$. Функции $t \to (v_n, u(t))$ непрерывны на $[0,T]$ как скалярное произведение элементов из H, значит, и измеримы.

Из (17) и (20) следует конечность почти всюду функции $t \to \|u\|_E$, поэтому и функция $t \to (v, u(t))$ конечна почти всюду. Кроме того, почти всюду на $[0,T]$ при $n \to \infty$

$$|(v_n, u(t)) - (v, u(t))| \qquad \|v_n - v\|_{E'} \|u\|_E \to 0.$$

Таким образом, функция $t \to u(t)$ измерима.

Из (17) и (20) следует, что функция $u \in L_2(0,T;E)$ и для $\int_0^T \|u(t)\|_E^2 \, dt$ выполнено (21). Так как $u \in L_2(0,T;E), u' \in L_2(0,T;H)$ и $V = [E,H]_{1/2}$, то [2] $u \in C([0,T],V)$ и справедлива оценка

$$\max_{0 \quad t \quad T} \|u(t)\|_V^2 \qquad M \int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2\right) dt,$$

откуда с учетом (17) следует оценка (21) в полном объеме. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

2. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

3. Смагин, В. В. Сходимость метода Галеркина приближенного решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / В. В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 222–231.

4. Вайникко, Г. М. О сходимости и быстроте сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269–1277.

5. Смагин, В. В. О слабой разрешимости нелинейной вариационной задачи параболического типа / В. В. Смагин, М. В. Тужикова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2004. — № 1. — С. 153–156.

6. Бондарев, А. С. Сходимость проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев, В. В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 81–94.

7. Петрова, А. А. Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием / А. А. Петрова, В. В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 160–169.

REFERENCES

1. Aubin J.-P. Approximate solution of the elliptic boundary problems. [Obe'n Zh.-P. Priblizhennoe reshenie e'llipticheskih kraevih zadach]. Moscow: Mir, 1977, 384 p.

2. Lions J.-L., Magenes E. Inhomogeneous boundary problems and its applications. [Lions Zh.-L., Magenes E. Neodnorodnie granichnye zadachi i ih prilozheniya]. Moscow: Mir, 1971, 372 p.

3. Smagin V. V. Convergence of the Galerkin's method of solution of the parabolic equation with a periodic condition on the solution. [Smagin V. V. Shodimost' metoda galerkina priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim usloveiem na reshenie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 222–231.

4. Vaynikko G. M., Oya P. E. About the convergence and the velocity of convergence of the Galerkin's method for abstract evolutionary equations. [Vajnikko G. M., Oya P. E. O shodimosti i bystrote shodimosti metoda Galerkins dlya abstractnih e'volutsionnyh uravneniy]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1975, vol. 11, no. 7, pp. 1269–1277.

5. Smagin V. V., Tuzhikova M. V. About the weak solvability of the non-linear variational problem of the parabolic type. [Smagin V. V., Tuzhikova M. V. O slaboy razreshimosti nelineynoy variatsionnoy zadachi parabolicheskogo tipa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2004, no. 1, pp. 153–156.

6. Bondarev A. S., Smagin V. V. The convergence of projection-difference method of approximate solution of parabolic equation with a periodic condition on the solution. [Bondarev A. S., Smagin V. V. Sxodimost' proekcionno-raznostnogo metoda priblizhyonnogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim usloviem na reshenie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 81–94.

7. Petrova A. A., Smagin V. V. Solvability of the Variational Problem of Parabolic Type with a Weighted Integral Condition. [Petrova A. A., Smagin V. V. Razreshimost' variacionnoj zadachi parabolicheskogo tipa s vesovym integral'nym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 160–169.

Бондарев Андрей Сергеевич, магистрант кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, бакалавр математики, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: obliskuratsiya@bk.ru

Bondarev Andrei Sergeevich, graduate student of the department of Functional analysis and operation equations of the Maths faculty of the Voronezh State University, bachelor of mathematics, Voronezh, Russian Federation
E-mail: obliskuratsiya@bk.ru