УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ С ПАМЯТЬЮ*

А. С. Болдырев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 03.02.2015 г.

Аннотация. Статья посвящена исследованию слабой разрешимости начально-краевой задачи для одного класса вязкоупругих жидкостей с памятью. Тип рассматриваемой жидкости определяется соотношением, которое в литературе называется уравнением состояния или реологическим соотношением. В данной работе уравнение состояния содержит ограниченную измеримую функцию, характеризующую память частиц жидкости. Основным результатом данной работы является доказательство теоремы о существовании слабого решения рассматриваемой начально-краевой задачи. Для доказательства данной теоремы используется аппроксимационно-топологический метод, предложенный В. Г. Звягиным и развитый в его работах и работах его учеников.

Ключевые слова: начально-краевая задача, слабое решение, теорема существования, аппроксимационная задача, вязкоупругая жидкость.

THE STUDY OF ONE CLASS OF VISCOELASTIC FLUIDS WITH MEMORY

A. S. Boldyrev

Abstract. The article is devoted to the study of the weak solvability of the initial-boundary value problem for one class of viscoelastic fluids with memory. The type of the considered fluid is determined by a relation that is called the constitutive or rheological law. In this article, the constitutive law contains bounded measurable function what characterizes memory of particles of fluid. The main result of this work is the proof of the existence theorem of the weak solution of this initial-boundary value problem. For the proof of this theorem it is used approximating-topological method. This method was introduced by V. G. Zvyagin and was developed in his papers.

Keywords: initial-boundary value problem, weak solution, existence theorem, approximative problem, viscoelastic fluid.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (проект 1.1539.2014/K) (результаты Th 2.1), РФФИ (14-01-31228-мол_а) (результаты Th 3.1), Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете) (результаты Th 4.2).

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что движение несжимаемой жидкости описывается системой уравнений в форме Коши

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)+\operatorname{grad}p=\operatorname{Div}\sigma+\rho\varphi,$$

$$\operatorname{div}v=0,$$

где ρ — плотность жидкости, $v=(v_1,...,v_n)$ — скорость, p — давление жидкости, σ — девиатор тензора напряжений, φ — плотность внешних сил. Тип рассматриваемой жидкости определяется выбором соотношения между σ и тензором скоростей деформаций $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{ij}=\mathcal{E}_{ij}(v)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$. Это соотношение в литературе называется определяющим соотношением или уравнением состояния.

В настоящей работе рассматривается регуляризованное уравнение состояния вида

$$\sigma(t,x)=\mu_0\mathcal{E}(t,x)+\mu_1\int\limits_0^t\mathcal{L}(t,s)\mathcal{E}(v)(s,Z_\delta(v)(s;t,x))\,ds,$$

где $\mathcal{L}(t,s)$ — ограниченная измеримая функция ($0<s<t<T$), характеризующая память частицы жидкости, а $Z_\delta(v)(s;t,x)$ — регуляризованная траектория движения точки среды из начального состояния в конечную точку x. Подробнее см. в следующем пункте. Результаты с уравнением состояния в случае конкретной функции $\mathcal{L}(t,s)=\exp\left(\frac{t-s}{\lambda}\right)$ изложены в работах В. Г. Звягина и В. Т. Дмитриенко (см. [1] и [2]).

В работе устанавливается существование слабого решения начально-краевой задачи для данного уравнения состояния в случае произвольной ограниченной измеримой функции $\mathcal{L}(t,s)$.

1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим движение жидкости, заполняющей область Ω в $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, на промежутке времени $(0,T)$, $T>0$. Будем предполагать, что Ω — ограниченная область с локально-липшицевой границей Γ.

Пусть $v(t,x)$ — вектор скорости частицы в точке x области Ω в момент времени t, $0<t<T$, и $v_1,...,v_n$ — компоненты v. Уравнение движения в форме Коши

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)=-\operatorname{grad}p+\operatorname{Div}\sigma+\rho\varphi,\quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega \tag{1}$$

содержит ρ — плотность жидкости (далее рассматривается однородная жидкость, т.е. $\rho=const$), $p=p(t,x)$ — давление жидкости в точке x в момент времени t, σ — девиатор тензора напряжений, φ — плотность внешних сил, действующих на жидкость. Знак Div обозначает дивергенцию матрицы-функции. Таким образом, $\operatorname{Div}\sigma$ — это вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы σ. Здесь и далее мы используем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Траектории движения частиц жидкости определяются полем скоростей v как решение интегрального уравнения

$$z(\tau;t,x)=x+\int\limits_t^\tau v(s,z(\tau;t,x))\,ds. \tag{2}$$

Через $z(\tau;t,x)$ обозначим решение этого уравнения. Функция $z(\tau;t,x)$ показывает положение в момент времени τ занимаемое частицей, находящейся в момент времени t в точке $x \in \Omega$.

Рассмотрим уравнение состояния вида

$$\sigma(t,x) = \mu_0\,\mathcal{E}(t,x) + \mu_1 \int\limits_0^t \mathcal{L}(t,s)\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds, \tag{3}$$

в предположении, что $\sigma(0,x) = \mu_0\,\mathcal{E}(0,x)$ для $x \in \Omega$. Здесь $\mu_0 = 2\varkappa/\lambda$, $\mu_1 = 2\nu/\lambda - 2\varkappa/\lambda^2$, λ — время релаксации, $\varkappa$ — время запаздывания, ν — вязкость жидкости, $\mathcal{L}(t,s)$ — ограниченная измеримая функция $(0 < s < t < T)$. Будем считать, что $|\mathcal{L}(t,s)| \leqslant C_L$ для п.в. $s,t \in (0,T)$, где C_L — некоторая положительная константа.

Введем множество $CG = C([0,T]\times[0,T], C^1D(\overline{\Omega}))$. Можно заметить, что $CG \subset C([0,T]\times[0,T], C^1(\overline{\Omega})^n)$, поэтому везде далее CG рассматривается как метрическое пространство с метрикой, определяемой нормой пространства $C([0,T]\times[0,T], C(\overline{\Omega})^n)$.

Для того, чтобы траектории однозначно определялись полем скоростей $v(t,x)$, выберем оператор регуляризации $S_\delta : H \to C^1(\overline{\Omega})^n \cap V$ для $\delta > 0$ такой, что $S_\delta(v) \to v$ в H при $\delta \to 0$ и порождаемое им отображение $S_\delta : L_2(0,T;H) \to L_2(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$ непрерывно. Конструкция такого оператора приведена в [3].

Заменим уравнение (2) на уравнение

$$z(\tau;t,x) = x + \int\limits_t^\tau S_\delta v(s,z(s;t,x))\,ds, \qquad \tau,t \in (0,T), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Для каждого $v \in L_2(0,T;V)$ это уравнение имеет единственное решение $Z_\delta(v)$ в классе CG, т.е. $z(\tau;t,x) = Z_\delta(v)(\tau;t,x)$. Подставим $Z_\delta(v)$ вместо z в уравнение (3), а после σ из уравнения (3) в уравнение (1). Тогда замкнутая система уравнений, описывающих движение жидкости, имеет вид

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \mu_1 \mathrm{Div}\int\limits_0^t \mathcal{L}(t,s)\mathcal{E}(v)(s,Z_\delta(v)(s;t,x))\,ds -$$

$$- \mu_0 \mathrm{Div}\,\mathcal{E}(v) = -\mathrm{grad}\,p + \rho\varphi, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{5}$$

$$\mathrm{div}\,v = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{6}$$

$$v\,|_{(0,T)\times\Gamma} = 0, \tag{7}$$

$$v(0,x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$\int\limits_\Omega p\,dx = 0. \tag{9}$$

Введем необходимые функциональные пространства.

Мы будем использовать стандартные обозначения $L_2(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$, $C(\Omega)$, $C^1(\Omega)$ для функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ и обозначения $L_2(\Omega)^n$, $L_p(\Omega)^n$, $W_2^1(\Omega)^n$, $C(\Omega)^n$, $C^1(\Omega)^n$ для функций со значениями в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $(u,v)_{L_2(\Omega)^n}$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)^n$ для функций $u,v \in L_2(\Omega)^n$.

Пусть $V = \{v \in W_2^1(\Omega)^n : \ v\,|_\Gamma = 0, \ \ \mathrm{div}\,v = 0\}$. Пространство V гильбертово со скалярным произведением $(v,u)_V = \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij}(u)\cdot\mathcal{E}_{ij}(v)\,dx$ и соответствующей нормой $\|v\|$. Эта норма в пространстве V эквивалентна норме, индуцированной из пространства $W_2^1(\Omega)^n$.

Пусть H — замыкание V в норме пространства $L_2(\Omega)^n$. V^* — пространство, сопряженное к V. Обозначим через (f, v) действие функционала f из V^* на функцию v из V.

Множество $C^1D(\overline{\Omega})$ состоит из взаимно однозначных отображений $z : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$, совпадающих с тождественным отображением на Γ и имеющих непрерывные частные производные первого порядка такие, что $det\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 1$ в каждой точке области $\overline{\Omega}$. Будем предполагать, что в этом множестве используется норма пространства непрерывных функций $C(\overline{\Omega})^n$.

Также используем стандартные обозначения банаховых пространств $L_p(a, b; E)$, $L_\infty(a, b; E)$, $C([a, b], E)$ для функций $v : [a, b] \to E$ со значениями в банаховом пространстве E. Будем считать, что в $L_p(a, b; E)$ введена норма

$$\|v\|_{L_p(a,b;E)} = \left(\int\limits_a^b \|v(t)\|_E^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Известно, что сопряженным к пространству $L_p(a, b; E)$, $p > 1$, является пространство $L_q(a, b; E^*)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим задачу о слабых решениях регуляризованной задачи (5)–(9). Далее будем использовать следующие обозначения функциональных пространств:

$$E = L_2(0, T; V) \quad \text{с нормой } \|v\|_E = \|v\|_{L_2(0,T;V)} \quad \text{для } v \in E;$$

$$E^* = L_2(0, T; V^*) \quad \text{с нормой } \|f\|_{E^*} = \|f\|_{L_2(0,T;V^*)} \quad \text{для } f \in E^*;$$

$$E_1^* = L_1(0, T; V^*) \quad \text{с нормой } \|f\|_{E_1^*} = \|f\|_{L_1(0,T;V^*)} \quad \text{для } f \in E_1^*.$$

Обозначим через $\langle f, v\rangle$ действие функционала f из E^* на функцию v из E.

Используя слагаемые равенства равенства (5) введем:

1) функционал на V и, следовательно, отображение
$A : V \to V^*$, $(A(u), h) = \mu(\mathcal{E}(u), \mathcal{E}(h))_{L_2(\Omega)^{n^2}}$, $u, h \in V$;

2) $K : V \to V^*$, $(K(u), h) = \rho\left(u_i u_j, \frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}$, $u, h \in V$;

3) функционал f на V, $f \in V^*$, $\quad (f, h) = (\rho\varphi, h)_{L_2(\Omega)^n}$, $h \in V$;

4) для $v \in E$ и $z \in CG$ функционал на V при каждом фиксированном $t \in (0, T)$

$$(C(v, z)(t), h) = \mu_1 \left(\int\limits_0^t \mathcal{L}(t, s)\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))\, ds, \mathcal{E}(h)\right)_{L_2(\Omega)^{n^2}}.$$

Позже мы покажем, что $C : E \times CG \to E^*$.

Определение 1. Слабым решением регуляризованной задачи (5)–(9) для заданных $f \in L_1(0, T; V^*)$, $v^0 \in H$ называется функция $v \in L_2(0, T; V)$, имеющая производную $v' \in L_1(0, T; V^*)$ и удовлетворяющая равенствам

$$\rho v' + A(v) - K(v) + C(v, Z_\delta(v)) = f, \tag{10}$$

$$v(0) = v^0. \tag{11}$$

Слабое решение v принадлежит пространству $W_1 = \{v: \ v \in E, \ v' \in E_1^*\}$ с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_E + \|v'\|_{E_1^*}$. Известно [4, лемма III.1.1], что $W_1 \subset C([0,T], V^*)$, поэтому условие (11) имеет смысл.

Разрешимость начальной задачи (10)–(11) будет устанавливаться в предположении, что $f \in L_1(0,T;H^*) + L_2(0,T;V^*)$, т.е. $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in L_1(0,T;H^*)$ и $f_2 \in L_2(0,T;V^*)$.

Теорема 2. *Для каждой функции $f \in L_1(0,T;H^*) + L_2(0,T;V^*)$ и $v^0 \in H$ задача (10), (11) имеет хотя бы одно решение в W_1.*

Используемый далее аппроксимационно-топологический метод, предложенный и развитый В. Г. Звягиным и В. Т. Дмитриенко в работах [5], [6], основан на аппроксимации исходной задачи в каком-то смысле более простыми задачами с более хорошими свойствами и использовании теории топологической степени отображений бесконечномерных пространств. В качестве примеров таких задач можно рассмотреть работы [7], [8], [9].

3. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Построим аппроксимационные уравнения. Для этого внесем изменения в уравнение (10), так чтобы все составляющие его члены принадлежали $L_2(0,T;V^*)$. Введем оператор

$$K_\varepsilon : V \to V^*, \ (K_\varepsilon(u), h) = \rho\left(\frac{u_i u_j}{1+\varepsilon|u|^2}, \frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)},$$

и аппроксимируем функцию f_1 из $L_1(0,T;H^*)$ функцией $f_{1,\varepsilon}$ из $L_2(0,T;H^*)$ так, чтобы

$$f_{1,\varepsilon} \to f_1 \ \text{ в } \ L_1(0,T;H^*) \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0. \tag{12}$$

Обозначим через f_ε функцию $f_\varepsilon = f_{1,\varepsilon} + f_2$.

Рассмотрим следующую начальную задачу

$$\rho v' + A(v) - K_\varepsilon(v) + C(v, Z_\delta(v)) = f_\varepsilon, \tag{13}$$

$$v(0) = v^0, \tag{14}$$

в пространстве $W = \{v: \ v \in E, \ v' \in E^*\}$. Будем считать, что в W введена норма $\|v\|_W = \|v\|_E + \|v'\|_{E^*}$ для $v \in W$. Пространство W банахово, и известно [10, теорема 1.17, стр. 177], что $W \subset C([0,T], H)$, таким образом (14) имеет смысл.

Введем отображения $L, G, K_\varepsilon : W \to E^* \times H$ с помощью следующих равенств $L(v) = (\rho v' + A(v), v|_{t=0})$, $G(v) = (C(v, Z_\delta(v)), 0)$, $K_\varepsilon = (K_\varepsilon, 0)$.
Тогда задача (13)–(14) эквивалентна операторному уравнению

$$L(v) = K_\varepsilon - G(v) + (f_\varepsilon, v^0). \tag{15}$$

В данной работе устанавливаются следующие результаты о существовании слабых решений:

Теорема 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ и произвольных $f_\varepsilon \in E^*$, $v^0 \in H$ уравнение (15), а следовательно, задача (13), (14) имеет, по крайней мере, одно решение $v \in W$.*

Доказательство теорем 2 и 3 составляет содержание следующих разделов.

4. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

Исследуем свойства операторов, составляющих уравнения (13), (15).

Лемма 1. *Пусть $n = 2, 3$. Тогда*
1) для $v \in E$ выполнено $A(v) \in E^*$, отображение $A : E \to E^*$ непрерывно и справедлива оценка

$$\|A(v)\|_{E^*} \quad C_0(1 + \|v\|_E), \tag{16}$$

2) для $v \in E$ выполнено $K(v) \in L_1(0,T;V^*)$ и $K_\varepsilon(v) \in L_\infty(0,T;V^*)$, отображения $K : E \to L_1(0,T;V^*)$, $\;K_\varepsilon : E \to E^*$ непрерывны и справедливы оценки

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{E^*} \quad \frac{C_1}{\varepsilon}, \quad \|K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \quad C_1\|v\|_E^2, \tag{17}$$

с константами C_0, C_1, не зависящими от v, причем вторая оценка справедлива и при $\varepsilon = 0$, т.е. для $K_0 = K$.

Отображение $K_\varepsilon : W \to E^*$ вполне непрерывно для $\varepsilon > 0$.

Приведенные факты содержатся в [5, лемма 2.1 и теорема 2.2]

Как отмечалось выше, $W \subset E \cap C([0,T],H)$. Для функций $v \in E \cap C([0,T],H)$ введем норму

$$\|v\|_{EC} = \max_{0 \ t \ T} \|v(t)\|_H + \|v\|_E$$

и эквивалентные нормы $\|v\|_{k,EC} = \|\bar{v}\|_{EC}$, где $\bar{v}(t) = \exp(-kt) \cdot v(t)$, $k \geqslant 0$. Аналогично определим эквивалентные нормы $\|\cdot\|_{k,E}$, $\|\cdot\|_{k,E^*\times H}$, $\|\cdot\|_{k,L_2(Q_T)}$ в пространствах E, $E^* \times H$, $L_2(Q_T)$.

Теорема 4. *Отображение $L : W \to E^* \times H$ обратимо и для любых функций $u, v \in W$ справедлива оценка*

$$\|v - u\|_{k,EC} \quad C_2\|L(v) - L(u)\|_{k,E^*\times H} \tag{18}$$

для любых $k \geqslant 0$ с константой C_2, не зависящей от u, v и выбора k.

Приведенное утверждение — частный случай теоремы 2.1 [5].

Лемма 2. *Для любых $v \in E$, $z \in CG$ выполнено $C(v,z) \in E^*$ и отображение*

$$C \colon E \times CG \to E^*$$

непрерывно и ограничено.

Доказательство. По определению отображения C для $v \in E$, $z \in CG$, $h \in E$ и $t \in (0,T)$:

$$(C(v(t), z(\cdot;t,\cdot)), h(t)) = \mu_1 \left(\int_0^t \mathcal{L}(t,s)\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(h(t)) \right)_{L_2(\Omega)^{n^2}}$$

достаточно установить действие, непрерывность и ограниченность отображения

$$B : (v,z) \mapsto \int_0^t \mathcal{L}(t,s)\mathcal{E}(s, z(s;t,x))\,ds,$$

из пространства $E \times CG$ в пространство $L_2([0,T] \times [0,T], L_2(\Omega)^{n^2})$.

Данное отображение представляет собой суперпозицию интегрального оператора и отображения

$$\Phi : (v, z) \mapsto \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \tag{19}$$

из пространства $E \times CG$ в пространство $L_2([0,T] \times [0,T], L_2(\Omega)^{n^2})$.

При любом фиксированном $z \in CG$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \|\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x)) - \mathcal{E}(u)(s, z(s;t,x))\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}}\, ds\, dt = \\ = \int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \mathcal{E}^2(v-u)(s, z(s;t,x))\, dx\, ds\, dt = \\ = T\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \mathcal{E}^2(v-u)(s,z)\, dz\, ds = T\int\limits_0^T \|\mathcal{E}(v-u)(s,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}}\, ds = T\|v-u\|^2_E.\end{gathered} \tag{20}$$

Заметим, что замена переменной x на $z = z(s;t,x)$ при фиксированных s, t не изменяет норму, так как $det\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 1$ для всех $(s;t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \overline{\Omega}$. Поэтому отображение Φ непрерывно по переменной v равномерно относительно переменной z.

Достаточно теперь установить непрерывность отображения Φ по переменной z при фиксированном значении v.

Пусть z_l — произвольная последовательность из CG, сходящаяся к $z_0 \in CG$ в норме пространства $C([0,T] \times [0,T], C(\overline{\Omega})^n)$, и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Так как множество непрерывных функций $C(Q_T)^{n^2}$ плотно в $L_2(Q_T)^{n^2}$, то существует ξ — непрерывная $\varepsilon/(3\sqrt{T})$-аппроксимация функции $\mathcal{E}(v)$, т.е.

$$\|\mathcal{E}(v) - \xi\|_{L_2(Q_T)^{n^2}} < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{T}}.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\|\mathcal{E}(v)(s, z_l(s;t,x)) - \mathcal{E}(v)(s, z_0(s;t,x))\|_{L_2([0,T]\times[0,T], L_2(\Omega)^{n^2})} \\ \|\mathcal{E}(v)(s, z_l(s;t,x)) - \xi(s, z_l(s;t,x))\|_{L_2([0,T]\times[0,T], L_2(\Omega)^{n^2})} + \\ + \|\xi(s, z_l(s;t,x)) - \xi(s, z_0(s;t,x))\|_{L_2([0,T]\times[0,T], L_2(\Omega)^{n^2})} + \\ + \|\mathcal{E}(v)(s, z_0(s;t,x)) - \xi(s, z_0(s;t,x))\|_{L_2([0,T]\times[0,T], L_2(\Omega)^{n^2})}.\end{gathered}$$

В силу выбора ξ первое и последнее слагаемое меньше $\varepsilon/3$. Функция ξ равномерно непрерывна на Q_T, поэтому оператор суперпозиции $z \mapsto \xi(\cdot, z)$, действующий из CG в $C([0,T] \times [0,T], C(\Omega)^{n^2})$ непрерывен, и следовательно,

$$\|\xi(s, z_l(s;t,x)) - \xi(s, z_0(s;t,x))\|_{C([0,T]\times[0,T], C(\Omega)^{n^2})} \to 0 \;\text{ при }\; l \to \infty.$$

Выбирая l достаточно большим, $l > l_0$, получим

$$\|\xi(s, z_l(s;t,x)) - \xi(s, z_0(s;t,x))\|_{L_2([0,T]\times[0,T], L_2(\Omega)^{n^2})} < \varepsilon/3$$

и, следовательно,

$$\|\mathcal{E}(v)(s, z_l(s;t,x)) - \mathcal{E}(v)(s, z_0(s;t,x))\|_{L_2([0,T]\times[0,T], L_2(\Omega)^{n^2})} < \varepsilon.$$

Итак, непрерывность отображения Φ по переменной z установлена.

Оценка (20) при $u = 0$ и ограниченность интегрального оператора обеспечивают действие и ограниченность отображения B, а следовательно, непрерывность и ограниченность отображения C.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Отображение $Z_\delta : W_1 \to CG$ непрерывно и для каждой слабо сходящейся последовательности $\{v_l\}$, $v_l \in W_1$, $v_l \rightharpoonup v_0$, найдется подпоследовательность $\{v_{l_k}\}$, такая что*

$$Z_\delta(v_{l_k}) \to Z_\delta(v_0) \ \ \text{в норме пространства} \ \ C([0,T]\times[0,T], C(\overline{\Omega})^n).$$

Доказательство см. в [1].

Лемма 4. *Для любой фиксированной функции $z \in CG$ и произвольных $u, v \in E$ справедлива оценка*

$$\|C(v,z) - C(u,z)\|_{k,E^*} \quad \mu_1\, C_L \sqrt{T/(2k)}\, \|u - v\|_{k,E}. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $\overline{v}(t) = e^{-kt}v(t)$, $\overline{u}(t) = e^{-kt}u(t)$. По определению для $h \in E$ имеем

$$\langle e^{-kt}C(v(t), z(\cdot;t,\cdot)) - e^{-kt}C(u(t), z(\cdot;t,\cdot)), h(t)\rangle =$$
$$= \mu_1 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \int\limits_0^t \mathcal{L}(t,s)e^{-k(t-s)}\mathcal{E}_{ij}(\overline{v} - \overline{u})(s; z(s;t,x))\, ds\, \mathcal{E}_{ij}(h)(t,x)\, dx\, dt.$$

Тогда с помощью неравенства Гельдера получим

$$\left|\langle e^{-kt}C(v(t), z(\cdot;t,\cdot)) - e^{-kt}C(u(t), z(\cdot;t,\cdot)), h(t)\rangle\right| \quad \mu_1 \int\limits_0^T\int\limits_0^t \mathcal{L}(t,s)e^{-k(t-s)}\cdot$$
$$\cdot\left(\int\limits_\Omega \mathcal{E}^2(\overline{v} - \overline{u})(s; z(s;t,x))\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega \mathcal{E}^2(h)(t,x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} ds\, dt =$$
$$= \mu_1 \int\limits_0^T\int\limits_0^t \mathcal{L}(t,s)e^{-k(t-s)} \left(\int\limits_\Omega \mathcal{E}^2(\overline{v} - \overline{u})(s; z)\, dz\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|h(t,\cdot)\|_V\, ds\, dt =$$
$$= \mu_1 \int\limits_0^T\int\limits_0^t \mathcal{L}(t,s)e^{-k(t-s)}\|(\overline{v} - \overline{u})(s;\cdot))\|_V \cdot \|h(t,\cdot)\|_V\, ds\, dt$$
$$\mu_1 \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^t \mathcal{L}^2(t,s)e^{-2k(t-s)}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^t \|(\overline{v} - \overline{u})(s;\cdot))\|_V^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|h(t,\cdot)\|_V\, dt$$
$$\mu_1 \|\overline{v} - \overline{u}\|_E \cdot \|h\|_E \cdot \left(\int\limits_0^T\int\limits_0^t \mathcal{L}^2(t,s)e^{-2k(t-s)}\, ds\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценим оставшийся интеграл, воспользовавшись ограниченностью $\mathcal{L}$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^t \mathcal{L}^2(t,s)e^{-2k(t-s)}\, ds\, dt \quad \frac{C_L^2}{2k}\int\limits_0^T (1 - e^{-2kt})\, dt \quad \frac{C_L^2}{2k}\int\limits_0^T dt = \frac{C_L^2 T}{2k}.$$

Отсюда и следует требуемая оценка

$$\|C(v,z) - C(u,z)\|_{k,E^*} = \|e^{-kt}(C(v,z) - C(u,z))\|_{E^*} \quad \mu_1\, C_L \sqrt{T/(2k)}\, \|v - u\|_{k,E}.$$

Лемма доказана.

Приведенные утверждения позволяют исследовать свойства отображения G.

Теорема 5. *Отображение $G : W \to E^* \times H$ является L-уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k для k достаточно больших.*

(Здесь γ_k — мера некомпактности Куратовского в пространстве E^* с нормой $\|\cdot\|_{k,E^*}$.)

Доказательство. Пусть $M \subset W$ произвольное ограниченное множество. В силу леммы 3 множество $Z_\delta(M)$ относительно компактно. Тогда множество $C(v, Z_\delta(M))$ относительно компактно для любого фиксированного $v \in W$. Кроме того, для любых $z \in Z_\delta(M)$ отображение $C(\cdot, z)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\mu_1\, C_L\, \sqrt{T/(2k)}$ в нормах $\|\cdot\|_{k,E}$ и $\|\cdot\|_{k,E^*}$. Тогда по теореме 1.5.7 [11] отображение $C(v, Z_\delta(v))$, а значит и отображение G, являются $\mu_1\, C_L\, \sqrt{T/(2k)}$-ограниченными относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ_k, т.е.

$$\chi_k(G(M)) \quad \mu_1\, C_L\, \sqrt{T/(2k)}\, \chi_k(M).$$

Известно [11, теорема 1.1.7], что меры некомпактности Хаусдофа и Куратовского удовлетворяют следующим неравенствам

$$\chi_k(M) \quad \gamma_k(M) \quad 2\chi_k(M).$$

Поэтому

$$\gamma_k(G(M)) \quad 2\chi_k(G(M)) \quad 2\,\mu_1\, C_L\, \sqrt{T/(2k)}\, \gamma_k(M). \tag{22}$$

Из оценки (18) и определения меры некомпактности Куратовского получаем

$$\gamma_k(M) \quad C_2\, \gamma_k(L(M)), \tag{23}$$

где C_2 — константа из оценки (18).

Оценки (22) и (23) приводят к оценке

$$\gamma_k(G(M)) \quad 2\, C_2\, \mu_1\, C_L\, \sqrt{T/(2k)}\, \gamma_k(L(M)).$$

Выбирая k так, чтобы $2\, C_2\, \mu_1\, C_L\, \sqrt{T/(2k)} < 1$, получаем утверждение теоремы.

5. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ И РАЗРЕШИМОСТЬ АППРОКСИМАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Разрешимость аппроксимационного уравнения устанавливается с помощью теории степени отображений (см., например, [12]). Введем вспомогательное семейство операторных уравнений, включающее аппроксимационное уравнение (13),

$$\rho v' + A(v) - \lambda K_\varepsilon(v) + \lambda C(v, Z_\delta(v)) = f_\varepsilon, \quad \lambda \in [0,1]. \tag{24}$$

При $\lambda = 1$ уравнение семейства совпадает с (13).

Установим априорные оценки решений этого семейства.

Теорема 6. *Для любого решения $v \in W$ начальной задачи* (24), (14), $\lambda \in [0,1]$, *справедливы оценки*

$$\|v\|_{EC} \quad C\,(1 + \|f_\varepsilon\|_{E^*} + \|v^0\|_H), \tag{25}$$

$$\|v'\|_{E^*} \quad C\,(1 + \|f_\varepsilon\|_{E^*} + \|v^0\|_H), \tag{26}$$

с константой C, зависящей от ε, но не зависящей от v и $\lambda \in [0,1]$.

Доказательство. Пусть $v \in W$ произвольное решение начальной задачи (24), (14) для некоторого $\lambda \in [0,1]$. Тогда

$$L(v) = \lambda K_\varepsilon - \lambda G(v) + (f_\varepsilon, v^0). \tag{27}$$

Так как $L(0) = 0$, то из оценки (18) следует

$$\|v\|_{k,EC} \quad C_2 \|L(v)\|_{k,E^*\times H}. \tag{28}$$

Аналогично, $C(0, Z_\delta(v)) = 0$ и оценка (21) приводит к следующему неравенству

$$\|C(v, Z_\delta(v))\|_{k,E^*} = \|C(v, Z_\delta(v)) - C(0, Z_\delta(v))\|_{k,E^*} \quad \mu_1\, C_L\, \sqrt{T/(2k)}\, \|v\|_{k,E}. \tag{29}$$

Учитывая оценку (17), из равенства (27) и оценок (28), (29) получаем

$$\|v\|_{k,EC} \quad C(1/\varepsilon + \mu_1\, C_L\, \sqrt{T/(2k)}\, \|v\|_{k,E} + \|f_\varepsilon\|_{k,E^*} + \|v^0\|_H).$$

Для k достаточно больших, таких что $C\mu_1 C_L \sqrt{T/(2k)} < \frac{1}{2}$ и так как $\|v\|_{k,E} \quad \|v\|_{k,EC}$, получаем

$$\|v\|_{k,EC} \quad 2C\,(1/\varepsilon + \|f_\varepsilon\|_{k,E^*} + \|v^0\|_H).$$

Отсюда, учитывая эквивалентность норм $\|\cdot\|_{k,EC}$ и $\|\cdot\|_{EC}$, $\|\cdot\|_{k,E^*}$ и $\|\cdot\|_{E^*}$, приходим к оценке (25).

Чтобы получить оценку (26), выразим v' из уравнения (24):

$$v' = -\frac{1}{\rho}(A(v) - \lambda K_\varepsilon(v) + \lambda C(v, Z_\delta(v)) - f_\varepsilon).$$

Оценка (26) следует из оценки (25) и ограниченности отображений A, K_ε, C в E.

Теорема доказана.

Доказательство Теоремы 3. Утверждение о разрешимости начальной задачи (13), (14) устанавливается с помощью теории степени для класса A-уплотняющих возмущений обратимых отображений (см. [13], [14]).

Исследование задачи (13), (14) заменим исследованием эквивалентного операторного уравнения (15):

$$L(v) - K_\varepsilon(v) + G(v) = (f_\varepsilon, v^0).$$

Рассмотрим вспомогательное семейство задач (24), (14) и семейство эквивалентных операторных уравнений

$$L(v) - \lambda(K_\varepsilon(v) - G(v)) = (f_\varepsilon, v^0). \tag{30}$$

В силу теоремы 5 и леммы 1 отображение $\lambda(K_\varepsilon - G)$ из $W \times [0,1]$ в E^* является L-уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k. Кроме того, из априорных оценок (25), (26) следует, что ни одно из уравнений семейства не имеет решений на границе шара $B_R \subset W$ достаточно большого радиуса R с центром в нуле. Следовательно, для каждого $\lambda \in [0,1]$ определена степень отображения (см.[13], [14])

$$deg_2(L - \lambda(K_\varepsilon - G), \overline{B}_R, (f_\varepsilon, v^0)).$$

Так как степень отображения сохраняется при изменении λ, то

$$deg_2(L - K_\varepsilon + G, \overline{B}_R, (f_\varepsilon, v^0)) = deg_2(L, \overline{B}_R, (f_\varepsilon, v^0)).$$

Отображение L обратимо, поэтому уравнение $L(v) = (f, v^0)$ имеет единственное решение u_0 в W, и u_0 удовлетворяет априорным оценкам (25), (26). Тогда $u_0 \in B_R$ и $deg_2(L, \overline{B}_R, (f_\varepsilon, v^0)) = 1$. Поэтому

$$deg_2(L - K_\varepsilon + G, \overline{B}_R, (f_\varepsilon, v^0)) = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование решения операторного уравнения (30) при $\lambda = 1$ или (15), а, следовательно, существование решения задачи (27) при $\lambda = 1$ или (13), (14).

Теорема доказана.

6. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы покажем, что решения аппроксимационных задач (13), (14) сходятся при $\varepsilon \to 0$ к решению задачи (10), (11) в смысле обобщенной сходимости.

В силу [4, лемма III.1.1 и лемма III.1.4] функции из W_1 слабо непрерывны на $[0,T]$ со значениями в H, поэтому $W_1 \subset E \cap L_\infty(0,T;H)$. Для функций $v \in E \cap L_\infty(0,T;H)$ введем норму

$$\|v\|_{EL} = \|v(t)\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|v\|_E$$

и эквивалентные нормы $\|v\|_{k,EL} = \|\bar{v}\|_{EL}$, где $\bar{v}(t) = e^{-kt}v(t)$, $k \geqslant 0$.

Теорема 7. *Для любого решения $v \in W$ задачи (13), (14) с $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|v\|_{EL} \quad C\,(\|f_{1,\varepsilon}\|_{L_1(0,T;H^*)} + \|f_2\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v^0\|_H), \tag{31}$$

$$\|v'\|_{L_1(0,T;V^*)} \quad C\,(1 + \|f_{1,\varepsilon}\|_{L_1(0,T;H^*)} + \|f_2\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_0\|_H)^2, \tag{32}$$

с константой C, не зависящей от ε.

Доказательство. Пусть $v \in W$ решение задачи (13), (14) для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\rho v' + A(v) - K_\varepsilon(v) + C(v, Z_\delta(v)) = f_{1,\varepsilon} + f_2.$$

Выполним замену $v(t) = e^{kt}\overline{v}(t)$ и умножим уравнение на e^{-kt}, получим

$$\rho\overline{v}' + \rho k\overline{v} + A(\overline{v}) - \overline{K}_\varepsilon(\overline{v}) + \overline{C}(\overline{v}, Z_\delta(e^{kt}\overline{v})) = \overline{f}_{1,\varepsilon} + \overline{f}_2, \tag{33}$$

обозначив $\overline{K}_\varepsilon(\overline{v}) = e^{-kt}K_\varepsilon(e^{kt}\overline{v})$, $\overline{C}(\overline{v}, Z_\delta(e^{kt}\overline{v})) = e^{-kt}C(e^{kt}\overline{v}, Z_\delta(e^{kt}\overline{v}))$, $\overline{f}_{1,\varepsilon} = e^{-kt}f_{1,\varepsilon}$, $\overline{f}_2 = e^{-kt}f_2$. Оператор $\rho k\overline{v}$ определяется равенством $(\rho k\overline{v}, h) = \rho k(\overline{v}, h)_{L_2(\Omega)}$ для $h \in V$.

Рассмотрим действие функционалов, стоящих в левой и правой части равенства (33) на функцию $\overline{v}$:

$$\frac{1}{2}\,\rho\,\frac{d}{dt}\|\overline{v}(t)\|_H^2 + \rho k\|\overline{v}(t)\|_H^2 + (A(\overline{v}(t)), \overline{v}(t)) - (\overline{K}_\varepsilon(\overline{v}(t)), \overline{v}(t)) =$$
$$= -(\overline{C}(\overline{v}, Z_\delta(e^{kt}\overline{v}))(t), \overline{v}(t)) + (\overline{f}_{1,\varepsilon}, \overline{v}(t)) + (\overline{f}_2, \overline{v}(t)).$$

Известно, что $(\overline{K}_\varepsilon(\overline{v}(t)), \overline{v}(t)) = 0$ для всех $t \in [0,T]$ (см. [5]). Поэтому, интегрируя обе части равенства по переменной t на отрезке $[0,t]$, получим

$$\frac{1}{2}\,\rho\,\|\overline{v}(t)\|_H^2 + \rho k\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;H)} + \mu_0\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V)} = \frac{1}{2}\,\rho\,\|\overline{v}^0\|_H^2 -$$
$$- \int_0^t (\overline{C}(\overline{v}, Z_\delta(e^{k\tau}\overline{v}))(\tau), \overline{v}(\tau))\,d\tau + \int_0^t (\overline{f}_{1,\varepsilon}(\tau), \overline{v}(\tau))\,d\tau + \int_0^t (\overline{f}_2(\tau), \overline{v}(\tau))\,d\tau.$$

Отсюда и из оценки (21) для $u = 0$ с помощью неравенства Коши приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\,\rho\,\|\overline{v}(t)\|_H^2 + \rho k\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;H)} + \mu_0\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V)} \quad \frac{1}{2}\,\rho\,\|\overline{v}^0\|_H^2 -$$
$$- \mu_1\,C_L\,\sqrt{T/(2k)}\|\overline{v}\|_E^2 + \|\overline{f}_{1,\varepsilon}\|_{L_1(0,T;H^*)}\cdot\|\overline{v}\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|\overline{f}_2\|_{L_2(0,T;V^*)}\cdot\|\overline{v}\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Считая k достаточно большим, так что $\mu_1 C_L\sqrt{T/(2k)} < \mu_0/2$, и используя неравенство Коши, приходим к оценке

$$\rho\,\|\overline{v}\|^2_{L_\infty(0,T;H)} + 2\,\rho k\|\overline{v}\|^2_{L_2(Q_T)} + \mu_0\|\overline{v}\|^2_E$$
$$\quad \rho\,\|v^0\|^2_H + \frac{1}{2}\,\rho\,\|\overline{v}\|^2_{L_\infty(0,T;H)} + \frac{1}{2}\,\mu_0\,\|\overline{v}\|^2_E + \frac{2}{\rho}\|\overline{f}_{1,\varepsilon}\|^2_{L_1(0,T;H^*)} + \frac{2}{\mu_0}\|\overline{f}_2\|^2_{L_2(0,T;V^*)}.$$

и далее

$$\frac{1}{2}\,\rho\,\|\overline{v}\|^2_{L_\infty(0,T;H)} + 2\,\rho k\|\overline{v}\|^2_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{2}\,\mu_0\|\overline{v}\|^2_E$$
$$\quad \rho\,\|\overline{v}^0\|^2_H + \frac{2}{\rho}\|\overline{f}_{1,\varepsilon}\|^2_{L_1(0,T;H^*)} + \frac{2}{\mu_0}\|\overline{f}_2\|^2_{L_2(0,T;V^*)}.$$

Эта оценка эквивалентна требуемой оценке (31).

Выразим v' из равенства (13) $v' = -\frac{1}{\rho}(A(v) - K_\varepsilon(v) + C(v, Z_\delta(v)) - f_\varepsilon)$. Отсюда

$$\|v'\|_{L_1(0,T;V^*)} \quad C\,(\|A(v)\|_{E^*} + \|K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} + \\ + \|C(v, Z_\delta(v))\|_{E^*} + \|f_{1,\varepsilon}\|_{L_1(0,T;H^*)} + \|f_2\|_{L_2(0,T;V^*)}) \qquad (34)$$

Оценим $\|K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,T;V^*)}$ как и в [5]. Для $n \quad 4$ вложение $V \subset L_4(\Omega)^n$ непрерывно. Тогда для $u \in V$ по определению K имеем

$$\|K_\varepsilon(u)\|_{V^*} \quad \rho \max_{i,j}\|\frac{u_i u_j}{1+\varepsilon|u|^2}\|_{L_2(\Omega)} \quad \rho\max_{i,j}\|u_i u_j\|_{L_2(\Omega)} \quad C\|u\|^2_{L_4(\Omega)^n}.$$

Следовательно, $\|K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \quad C\,\|v\|^2_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)}$. Так как вложение $V \subset L_4(\Omega)^n$ непрерывно для, то и вложение $E = L_2(0,T;V) \subset L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$ также непрерывно. Тогда $\|v\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)} \quad C\|v\|_E$ и $\|K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \quad C\|v\|^2_E$. Эта оценка, ограниченность отображений A и C на E и имеющаяся оценка (31) позволяют получить требуемую оценку из неравенства (34). Теорема доказана.

Доказательство Теоремы 2. Выберем произвольную последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_l\}$, сходящуюся к нулю. Для каждого числа ε_l соответствующая задача (13), (14) имеет, по крайней мере, одно решение $v_l \in W$. По предположению (12)

$$f_{1,\varepsilon_l} \to f_1 \text{ в } L_1(0,T;H^*) \text{ при } l \to \infty.$$

Следовательно, $\|f_{1,\varepsilon_l}\|_{L_1(0,T;H^*)}$ ограничены в совокупности. В силу оценки (31) последовательность $\{v_l\}$ ограничена по норме $\|\cdot\|_{EL}$. Из оценки (32) следует, что последовательность производных $\{v'_l\}$ ограничена по норме пространства $L_1(0,T;V^*)$. Тогда, не уменьшая общности рассуждений, будем предполагать, что $v_l \rightharpoonup v^*$ слабо в E; $v_l \rightharpoonup v^*$ $*$-слабо в $L_\infty(0,T;H)$; $v_l \to v^*$ сильно в $L_2(Q_T)^n$; $v'_l \rightharpoonup v'^*$ в смысле распределений.

Так как линейный оператор слабо непрерывен, то, кроме того, будем предполагать, что $A(v_l) \rightharpoonup A(v^*)$ слабо в E^* и $\mathcal{E}(v_l)(s,x) \rightharpoonup \mathcal{E}(v^*)(s,x)$ слабо в $L_2(Q_T)^{n^2}$.

Покажем, что

$$C(v_l, Z_\delta(v_l)) \rightharpoonup C(v^*, Z_\delta(v^*)) \text{ слабо в } E^* \qquad (35)$$

Используя лемму 3, без уменьшения общности будем считать, что

$$Z_\delta(v_l) \to Z_\delta(v^*) \text{ в норме пространства } C([0,T]\times[0,T], C(\overline{\Omega})^n). \qquad (36)$$

Пусть $h \in E$ произвольная функция. Рассмотрим

$$\langle C(v_l, Z_\delta(v_l)) - C(v^*, Z_\delta(v^*)), h\rangle =$$
$$= \langle C(v_l, Z_\delta(v_l)) - C(v^*, Z_\delta(v_l)), h\rangle + \langle C(v^*, Z_\delta(v_l)) - C(v^*, Z_\delta(v^*)), h\rangle.$$

Второе слагаемое сходится к нулю в силу предположения (36) и непрерывности отображения C по переменной z. В первом слагаемом выполним замену переменной $z = Z_\delta(v_l)(s;t,x)$. При этом обратная замена имеет вид $x = Z_\delta(v_l)(t;s,z)$.

$$\langle C(v_l, Z_\delta(v_l)) - C(v^*, Z_\delta(v_l)), h\rangle =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \int\limits_0^t \mathcal{L}(t,s)[\mathcal{E}(v_l)(s, Z_\delta(v_l)(s;t,x)) - \mathcal{E}(v^*)(s, Z_\delta(v_l)(s;t,x))]\, ds \cdot \mathcal{E}(h)(t,x)\, dx\, dt =$$
$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \int\limits_0^t \mathcal{L}(t,s)[\mathcal{E}(v_l)(s,z) - \mathcal{E}(v^*)(s,z)]\, ds \cdot \mathcal{E}(h)(t, Z_\delta(v_l)(t;s,z))\, dz\, dt.$$

По предположению первая скобка сходится к нулю слабо в $L_2(Q_T)^{n^2}$. Используя непрерывность отображения Φ, заданного равенством (19), из доказательства леммы 2 и предположения (36), получим, что второй сомножитель сходится сильно в $L_2([0,T]\times[0,T], L_2(\Omega)^{n^2})$. Тогда и все выражение сходится к нулю при $l\to\infty$. Это и завершает доказательство (35).

Для завершения доказательства теоремы осталось напомнить, что в силу леммы 2 из [5] $K_{\varepsilon_l}(v_l) \rightharpoonup K(v^*)$ в смысле распределений, и перейти к пределу в смысле распределений при $l\to\infty$ в равенстве

$$\rho v_l' + A(v_l) - K_\varepsilon(v_l) + C(v_l, Z_\delta(v_l)) = f_{1,\varepsilon_l} + f_2.$$

Получим равенство (10) для функции v^*. Следовательно, v^* — решение уравнения (10). Заметим, что так как $v^*\in E$, то из равенства (10) следует, что $v^{*'}\in E_1^*$, и следовательно, $v^*\in W_1$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Звягин, В. Г. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, №12. — С. 1633–1645.

2. Звягин, В. Г. О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Доклады Академии Наук. — 2001. — Т. 380, № 3. — С. 308–311.

3. Дмитриенко, В. Т. Конструкции оператора регуляризации в моделях движения вязкоупругих сред / В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2004. — № 2. — С. 148–153.

4. Темам, Р. Уравнение Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М.: Мир, 1981. — 409 с.

5. Dmitrienko, V. T. Topological Degree Method in the Equations of the Navier-Stokes Type / V. T. Dmitrienko, V. G. Zvyagin // Abstract and Applied Analysis. — 1997. — V. 1, № 2. — P. 1–45.

6. Zvyagin, V. G. On weak slutions for some model of motion of nonlinear viscous-elastic fluid / V. G. Zvyagin, V. T. Dmitrienko // Topological Metods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Centre. — 1999. — V. 14, № 2. — P. 295–325.

7. Звягин, В. Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. — Москва: КРАСАНД, 2012. — 416 с.

8. Звягин, А. В. Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 245–249.

9. Звягин, А. В. Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 147–156.

10. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

11. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров [и др]. — Новосибирск: Наука, 1986. — 266 с.

12. Звягин, В. Г. Введение в топологические методы нелинейного анализа / В. Г. Звягин. — Воронеж, 2014. — 293 с.

13. Дмитриенко, В. Т. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений / В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин // Математические заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 801–812.

14. Zvyagin, V. G. On the theory of generalized condensing perturbations of continuous mappings / V. G. Zvyagin // Lecture Notes in Mathematics. — 1984. — V. 1108. — P. 173–193.

15. Баев, А. Д. о свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

16. Звягин, В. Г. Обзор аттракторов для модели движения слабых водных растворов полимеров / В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 3. — С. 100–120.

17. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

18. Звягин, В. Г. Некоторые результаты о существовании и единственности для связанных задач термомеханики / В. Г. Звягин, В. П. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 120–141.

19. Турбин, М. В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли / М. В. Турбин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 246–257.

20. Звягин, А. В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А. В. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 118–121.

REFERENCES

1. Zvyagin V. G., Dmitrienko V. T. On weak solutions of a regularized model of a viscoelastic fluid. [Zvyagin V. G., Dmitrienko V. T. O slabyx resheniyax regulyarizovannoj modeli vyazkouprugoj zhidkosti]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 12, pp. 1633–1645.

2. Zvyagin V. G., Dmitrienko V. T. On weak solutions of the initial-boundary value problem of equations of motion of viscoelastic fluid. [Zvyagin V. G., Dmitrienko V. T. O slabyx resheniyax nachal'no-kraevoj zadachi dlya uravnenij dvizheniya vyazkouprugoj zhidkosti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2001, vol. 380, no. 3, pp. 308–311.

3. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. Designs of the operator of regularization of model of motion of viscoelastic fluid. [Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. Konstrukcii operatora regulyarizacii v modelyax dvizheniya vyazkouprugix sred]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2004, no. 2, pp. 148–153.

4. Temam R. Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis. [Temam R. Uravnenie Nav'e-Stoksa. Teoriya i chislennyj analiz]. Moscow: Mir, 1981, 409 p.

5. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. Topological Degree Method in the Equations of the Navier-Stokes Type. Abstract and Applied Analysis, 1997, vol. 1, no. 2, pp. 1–45.

6. Zvyagin V.G., Dmitrienko V.T. On weak slutions for some model of motion of nonlinear viscous-elastic fluid. Topological Metods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Centre, 1999, vol. 14, no. 2, pp. 295–325.

7. Zvyagin V. G., Turbin M. V. Mathematical issues of mechanics of viscoelastic media. [Zvyagin V. G., Turbin M. V. Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkouprugix sred]. Moscow: Krasand, 2012, 412 p.

8. Zvyagin A. V. An optimum control problem for stationary model of low concentrated aquas polymers solutions. [Zvyagin A. V. Zadacha optimalnogo upravleniya dlya stacionarnoj modeli slabo koncentrirovannyx vodnyx rastvorov polimerov]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 245–249.

9. Zvyagin A. V. Investigation resolvability of stationary model of motion of low concentrated aquas polymers. [Zvyagin A. V. Issledovanie razreshimosti stacionarnoj modeli dvizheniya slabyx vodnyx rastvorov polimerov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 1, pp. 147–156.

10. Gajewski H., Gryoger K., Zacharias K. Nonlinear operator equations and operator differential equations. [Gajewski H., Gryoger K., Zacharias K. Nelinejnye operatornye uravneniya i operatornye differencialnye uravneniya]. Moscow: Mir, 1978, 336 p.

11. Ahmerov R. [etc.] Measures of incompactness and the condensing operators. [Ahmerov R. [i dr.] Mery nekompaktnosti i uplotnyayushhie operatory]. Novosibirsk: Nauka, 1986, 266 p.

12. Zvyagin V. G. Introduction to topological methods of the nonlinear analysis. [Zvyagin V. G. Vvedenie v topologicheskie metody nelinejnogo analiza]. Voronezh, 2014, 293 p.

13. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. Homotopy classification of a class of continuous mappings. [Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. Gomotopicheskaya klassifikaciya odnogo klassa nepreryvnyx otobrazhenij]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1982, vol. 31, no. 5, pp. 801–812.

14. Zvyagin V. G. On the theory of generalized condensing perturbations of continuous mappings. Lecture Notes in Mathematics, 1984, vol. 1108, pp. 173–193.

15. Baev A. D., Kobylinskii P. A., Davidova M. B. On the Properties of Switching a Class of Degenerate Pseudo-Differential Operators with the Operators Of Differentiation. [Baev A. D., Kobylinskij P. A., Davydova M. B. o svojstvax kommutacii odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov s operatorami differencirovaniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 102–108.

16. Zvyagin V. G., Kondratyev S. K. Review of attractors for a model of motion of weak aqueous polymer solutions. [Zvyagin V. G., Kondrat'ev S. K. Obzor attraktorov dlya modeli dvizheniya slabyx vodnyx rastvorov polimerov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 100–120.

17. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

18. Zvyagin V. G., Orlov V. P. Existence and uniqueness results for a coupled problem in continuum thermomechanics. [Zvyagin V. G., Orlov V. P. Nekotorye rezul'taty o sushhestvovanii i edinstvennosti dlya svyazannyx zadach termomexaniki]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 120–141.

19. Turbin M. V. Investigation of initial-boundary valye problem for the Herschel-Bulkley

mathematical fluid model. [Turbin M. V. Issledovanie nachal'no-kraevoj zadachi dlya modeli dvizheniya zhidkosti Gershel'-Balkli]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 246–257.

20. Zvyagin A. V. Investigation of the solvability of one stationary model non-newtonian fluid motion in unbounded domain. [Zvyagin A. V. Issledovanie razreshimosti odnoj stacionarnoj modeli dvizheniya nen'yutonovoj zhidkosti v neogranichennoj oblasti]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 118–121.

Болдырев Александр Сергеевич, младший научный сотрудник НИИМ Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: al_boldyrev@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–57

Boldyrev Alexander S., junior researcher of the Research Institute of Mathematics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: al_boldyrev@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–57