

ХАРАКТЕРИСТКИ КВАЗИПРАВДОПОДОБНОЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ МОМЕНТАМИ ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ*

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 24.06.2015 г.

Аннотация. Выполнены синтез и анализ квазиправдоподобного алгоритма оценки регулярного параметра сигнала произвольной формы с неизвестными моментами появления и исчезновения, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Исследовано влияние априорного незнания моментов появления и исчезновения на точность квазиправдоподобной оценки регулярного параметра. В качестве примера рассмотрены квазиправдоподобные оценки амплитуды и начальной фазы прямоугольного радиосигнала. Найден проигрыш в точности оценки вследствие незнания моментов появления и исчезновения.

Ключевые слова: моменты появления и исчезновения, квазиправдоподобная оценка, смещение, дисперсия, отношение сигнал-шум, амплитуда, начальная фаза.

CHARACTERISTICS OF THE PARAMETER ESTIMATION OF THE SIGNAL WITH UNKNOWN MOMENTS APPEARANCE AND DISAPPEARANCE

A. P. Trifonov, Yu. E. Korchagin

Abstract. There are synthesized the quasi-likelihood algorithms for the estimation of the continuous parameter of the signal of the unknown form and with the unknown appearance and disappearance moments, observed against the additive Gaussian white noise. We have also investigated the impact of a prior ignorance about the appearance and disappearance moments upon the accuracy of the continuous parameter estimations. As an example, we consider the quasi-likelihood estimations of the amplitude and the initial phase of the rectangular radio signal. The loss in accuracy of the estimate, due to the ignorance about the appearance and disappearance moments is determined.

Keywords: appearance and disappearance moments, quasi likelihood estimation, bias, variance, signal/noise ratio, amplitude, initial phase.

В работах [1]–[4] и др. рассмотрена задача приёма сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения. В частности, в [4] исследованы оценки максимального правдоподобия параметров такого сигнала. Однако, реализация алгоритма оценки максимального правдоподобия нескольких параметров сигнала (в рассматриваемом случае — не менее трёх) требует построения сложных, многоканальных по каждому из оцениваемых параметров, измерителей. Существенно упростить структуру измерителей можно, применяя квазиправдоподобные оценки [5]. При этом априори неизвестные моменты появления и исчезновения сигнала

* Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №15-11-10022)
© Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э., 2015

заменяются на некоторые их ожидаемые значения, что позволяет существенно упростить реализацию измерителя. В связи с чем рассмотрим задачу оценки параметра сигнала известной формы с неизвестными моментами появления κ и исчезновения χ , который запишем в виде

$$s(t, \kappa, \chi, \theta) = \begin{cases} f(t, \theta), & \kappa \leq t \leq \chi, \\ 0, & t < \kappa, \quad t > \chi, \end{cases} \quad (1)$$

где $f(t, \theta)$ — функция, описывающая форму сигнала, θ — неизвестный параметр, подлежащий оценке,

$$\kappa \in [\kappa_{\min}, \kappa_{\max}], \quad \chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}], \quad \kappa_{\max} \leq \chi_{\min}. \quad (2)$$

Пусть сигнал принимается на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Тогда на входе приёмного устройства в течение времени $[0, T]$ наблюдается реализация

$$x(t) = s(t, \kappa_0, \chi_0, \theta_0) + n(t) \quad (3)$$

аддитивной смеси сигнала $s(t, \kappa_0, \chi_0, \theta_0)$ и шума $n(t)$. Здесь $\kappa_0, \chi_0, \theta_0$ — истинные значения неизвестных параметров.

Для синтеза алгоритма оценки информативного параметра θ используем метод максимального правдоподобия [6]. Будем считать, что интервал наблюдения удовлетворяет условию $0 \leq \kappa_{\min} < \chi_{\max} \leq T$, так что сигнал (1) полностью размещается внутри этого интервала, а также $f(\kappa_0, \theta) \neq 0, f(\chi_0, \theta) \neq 0$.

Если моменты появления и исчезновения априори известны, то логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) запишется как [6]

$$L_0(\theta) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t, \kappa_0, \chi_0, \theta)dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t, \kappa_0, \chi_0, \theta)dt. \quad (4)$$

Приёмник должен формировать логарифм ФОП (4) и находить положение его абсолютного максимума в априорной области значений параметра θ , то есть, оценка максимального правдоподобия (ОМП) определяется выражением

$$\theta_m = \arg \sup L_0(\theta) \quad (5)$$

Выражения (4), (5) определяют структуру приёмного устройства. Подставляя (3) в (4), логарифм ФОП можно записать как $L_0(\theta) = S_0(\theta) + N_0(\theta)$, где

$$S_0(\theta) = S_0(\theta, \theta_0) - Q_0(\theta)/2, \quad (6)$$

$$S_0(\theta, \theta_0) = \frac{2}{N_0} \int_{\kappa_0}^{\chi_0} f(t, \theta)f(t, \theta_0)dt, \quad (7)$$

$$Q_0(\theta) = \frac{2}{N_0} \int_{\kappa_0}^{\chi_0} f^2(t, \theta)dt, \quad N_0(\theta) = \frac{2}{N_0} \int_{\kappa_0}^{\chi_0} n(t)f(t, \theta)dt. \quad (8)$$

Шумовая составляющая $N_0(\theta)$ представляет собой гауссовский случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $K(\theta_1, \theta_2) = \langle N_0(\theta_1)N_0(\theta_2) \rangle = S_0(\theta_1, \theta_2)$, совпадающей с (7). Считая, что отношение сигнал-шум (ОСШ) $z_0^2 = Q_0(\theta_0)$ достаточно велико, перейдём

к нормированному логарифму ФОП $L_z(\theta) = L_0(\theta)/z_0^2$ и, применяя, аналогично [6], метод малого параметра, найдём условные смещение и дисперсию ОМП (5)

$$b_0(\theta_m | \theta_0) = \langle \theta_m - \theta_0 \rangle = 0, \quad (9)$$

$$D_0(\theta_m | \theta_0) = \langle (\theta_m - \theta_0)^2 \rangle = - \left[\frac{d^2 S_0(\theta)}{d\theta^2} \Big|_{\theta_0} \right]^{-1} = F^{-1}(\kappa_0, \chi_0), \quad (10)$$

где

$$F(\alpha, \beta) = \frac{2}{N_0} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{df(t, \theta)}{d\theta} \right]_{\theta_0}^2 dt \quad (11)$$

Пусть теперь моменты появления и исчезновения сигнала (1) априори неизвестны и в их оценке нет необходимости, то есть κ и χ являются неинформативными параметрами. Согласно [6], один из путей преодоления априорной параметрической неопределенности заключается в нахождении ОМП неинформативных параметров κ_m , χ_m и использовании их вместо неизвестных κ_0 и χ_0 в выражении (4). Тогда приёмник должен формировать оценку как

$$\theta_m = \arg \sup L_m(\theta), \quad (12)$$

где

$$L_m(\theta) = L(\theta, \kappa_m, \chi_m) = \sup_{\kappa, \chi} L(\theta, \kappa, \chi), \quad (13)$$

$$L(\theta, \kappa, \chi) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t, \kappa, \chi, \theta)dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t, \kappa, \chi, \theta)dt. \quad (14)$$

Выражение (14) определяет структуру приёмного устройства, а характеристики ОМП (12) в предположении достаточно больших ОСШ совпадают, согласно [4], с характеристиками оценки при априори известных моментах появления и исчезновения (9), (10). Однако в этом случае необходимо формировать трёхмерное случайное поле (14) во всей области априорных значений параметров κ , χ , θ . Кроме того, большинство параметров θ требуют использования многоканального приёмника. Необходимость оценивания ещё двух неинформативных параметров приводит к значительному увеличению числа каналов, а, следовательно, к существенным трудностям в технической реализации приёмника.

Частично избежать этих трудностей можно, если использовать квазиравдоподобный алгоритм оценивания [5], согласно которому, приёмник формирует логарифм ФОП (14) для некоторых ожидаемых моментов появления κ^* и исчезновения χ^* из области априорных значений (2), а именно

$$L_d(\theta) = L(\theta, \kappa^*, \chi^*) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t, \kappa^*, \chi^*, \theta)dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t, \kappa^*, \chi^*, \theta)dt, \quad (15)$$

и ищет положение его абсолютного максимума.

Найдём характеристики квазиравдоподобной оценки (КПО). Подставляя (3) в (15), получим $L_d(\theta) = S_d(\theta) + N_d(\theta)$, где

$$S_d(\theta) = S_d(\theta, \theta_0) - Q_d(\theta)/2, \quad (16)$$

$$S_d(\theta, \theta_0) = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\kappa_0, \kappa^*)}^{\min(\chi_0, \chi^*)} f(t, \theta)f(t, \theta_0)dt, \quad (17)$$

$$Q_d(\theta) = \frac{2}{N_0} \int_{\kappa^*}^{\chi^*} f^2(t, \theta) dt, \quad (18)$$

$$N_d(\theta) = \frac{2}{N_0} \int_{\kappa^*}^{\chi^*} n(t) f(t, \theta) dt. \quad (19)$$

Функция $S_d(\theta)$ — детерминированная составляющая на выходе приёмника. Случайная составляющая $N_d(\theta)$ представляет собой, согласно (19), гауссовский случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией

$$K_d(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\kappa^*}^{\chi^*} f(t, \theta_1) f(t, \theta_2) dt. \quad (20)$$

Абсолютный максимум функции (16) достигается в некоторой точке θ^* , то есть

$$\theta^* = \arg \sup S_d(\theta). \quad (21)$$

Считая, что отношение сигнал-шум на выходе приёмника достаточно велико, так что

$$z = \frac{S_d^2(\theta^*)}{K_d(\theta^*, \theta^*)}^{1/2} \gg 1$$

можем ввести малый параметр $\varepsilon = 1/z$ и перейти к нормированному логарифму ФОП $L(\theta) = L_d(\theta)/S_d(\theta^*)$. Тогда $L(\theta) = S(\theta) + \varepsilon N(\theta)$, где $S(\theta) = S_d(\theta)/S_d(\theta^*)$, $N(\theta) = N_d(\theta)/\sqrt{K_d(\theta^*, \theta^*)}$ — нормированные сигнальная и шумовая составляющие. Уравнение для нахождения КПО θ_m запишется как

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta} + \varepsilon \frac{dN(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_m} = 0. \quad (22)$$

Решение (22) будем искать в виде ряда по степеням ε : $\theta_m = \theta^* + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots$. Подставляя последнее выражение в (22), разлагая функцию в квадратных скобках в ряд Тейлора в окрестности θ^* и, ограничившись первым приближением, находим

$$\theta_m = \theta^* - \varepsilon \frac{dN(\theta)/d\theta}{d^2S(\theta)/d\theta^2} \Big|_{\theta^*}$$

Отсюда получим условные смещение и дисперсию КПО

$$b(\theta_m | \theta_0) = \theta^* - \theta_0, \quad (23)$$

$$D(\theta_m | \theta_0) = \frac{[d^2K(\theta_1, \theta_2)/d\theta_1 d\theta_2]}{z^2 [d^2S(\theta)/d\theta^2]^2} \Big|_{\theta_1=\theta_2=\theta=\theta^*} \quad (24)$$

где $K(\theta_1, \theta_2) = K_d(\theta_1, \theta_2)/K_d(\theta^*, \theta^*)$ — корреляционная функция нормированной шумовой составляющей.

Конкретизируем (23) и (24) для некоторых частных случаев. Пусть κ^* и χ^* удовлетворяют условиям

$$\kappa^* > \kappa_0, \quad \chi^* < \chi_0 \quad (25)$$

соответственно, тогда принятый сигнал оказывается длиннее ожидаемого. Пределы интегрирования в (17) будут $\max(\kappa_0, \kappa^*) = \kappa^*$, $\min(\chi_0, \chi^*) = \chi^*$. Используя (17), из (21) имеем $\theta^* = \theta_0$.

Таким образом, согласно (23), КПО оказывается несмещенной. Далее, подставляя (20) и (16) в (24), получаем дисперсию КПО в виде

$$D(\theta_m | \theta_0) = F^{-1}(\kappa^*, \chi^*), \quad (26)$$

где функция $F(\alpha, \beta)$ определена в (11). Используя (10) и (26), будем характеризовать проигрыш в эффективности оценки вследствие незнания моментов появления и исчезновения отношением

$$\rho = \frac{V(\theta_m | \theta_0)}{D_0(\theta_m | \theta_0)} = \frac{F(\kappa_0, \chi_0)}{F(\kappa^*, \chi^*)}, \quad (27)$$

где $V(\theta_m | \theta_0)$ — условное рассеяние КПО, которое при выполнении условий (25) совпадает с её дисперсией.

Пусть теперь параметр θ неэнергетический [6], то есть

$$\frac{d}{d\theta} \int_{\kappa^*}^{\chi^*} f^2(t, \theta) dt = 0. \quad (28)$$

Учитывая (28), из (21) получим $\theta^* = \theta_0$. Таким образом, положение максимума сигнальной составляющей (16) совпадает с истинным значением θ_0 , а КПО несмещенная. Далее, подставляя (20) и (16) в (24), учитывая (28), находим условную дисперсию КПО

$$D(\theta_m | \theta_0) = F(\kappa^*, \chi^*) F^{-2} [\max(\kappa^*, \kappa_0), \min(\chi^*, \chi_0)]. \quad (29)$$

Проигрыш в точности КПО (21) по сравнению с ОМП (13), аналогично (27), будет равен

$$\rho = \frac{F(\kappa_0, \chi_0) F(\kappa^*, \chi^*)}{F^2 [\min(\kappa^*, \kappa_0), \max(\chi^*, \chi_0)]}. \quad (30)$$

В качестве примера рассмотрим оценку амплитуды радиоимпульса с прямоугольной огибающей, когда функция $f(t, \theta) = f(t, a)$ в (1) принимает вид

$$f(t, a) = a \cos(\omega t - \varphi). \quad (31)$$

Используя (31), из (9) и (10), получаем, что ОМП амплитуды при известных моментах появления и исчезновения несмещенная и обладает дисперсией

$$D_0(a_m | a_0) = \frac{N_0}{\chi_0 - \kappa_0}. \quad (32)$$

Подставляя (31) в (17), а затем (17) в (16),

(16) в (21), (23) и (24), находим смещение и дисперсию КПО

$$b(a_m | a_0) = a_0 \frac{\min(0, \delta\kappa) - \max(0, \delta\chi)}{1 - \delta\kappa + \delta\chi}, \quad (33)$$

$$D(a_m | a_0) = \frac{N_0}{\chi_0 - \kappa_0} \cdot \frac{1}{1 - \delta\kappa + \delta\chi},$$

где $\delta\kappa = (\kappa^* - \kappa_0)/(\chi_0 - \kappa_0)$, $\delta\chi = (\chi^* - \chi_0)/(\chi_0 - \kappa_0)$. Проигрыш в точности КПО амплитуды по сравнению с точностью её ОМП запишем как

$$\rho = \frac{1}{1 - \delta\kappa + \delta\chi} + z^2 \frac{\min(0, \delta\kappa) - \max(0, \delta\chi)}{1 - \delta\kappa + \delta\chi}^2. \quad (34)$$

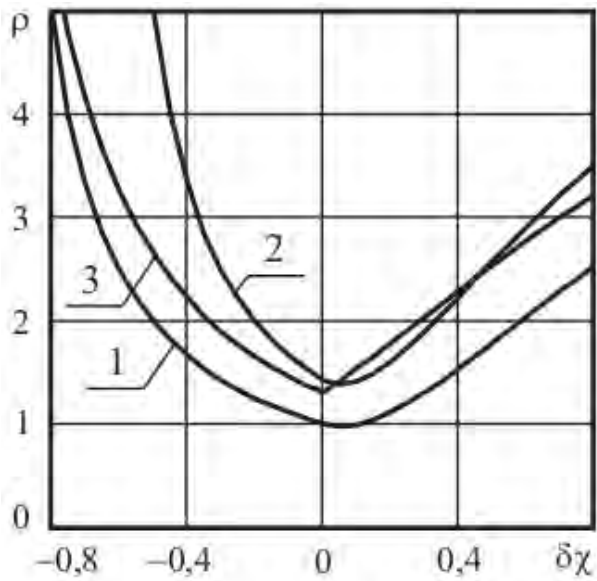


Рис. 1

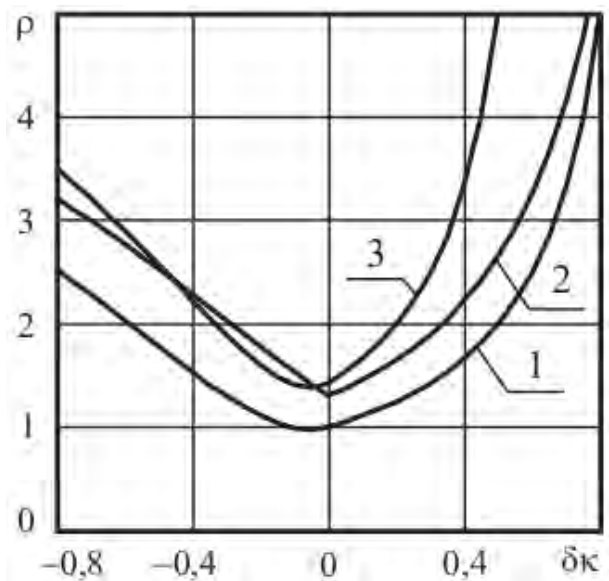


Рис. 2

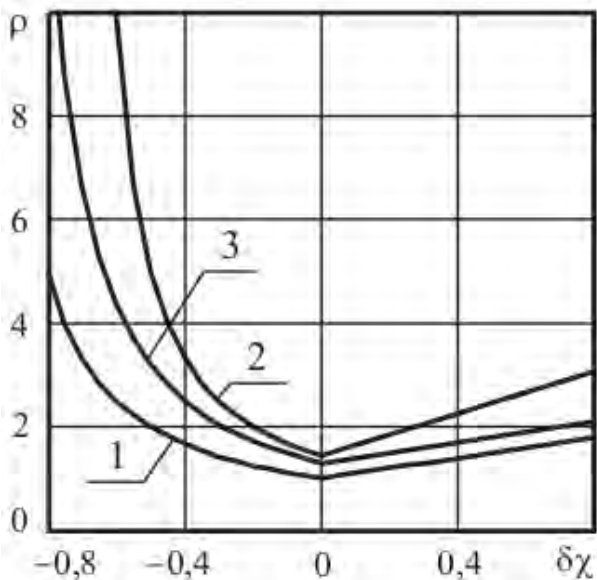


Рис. 3

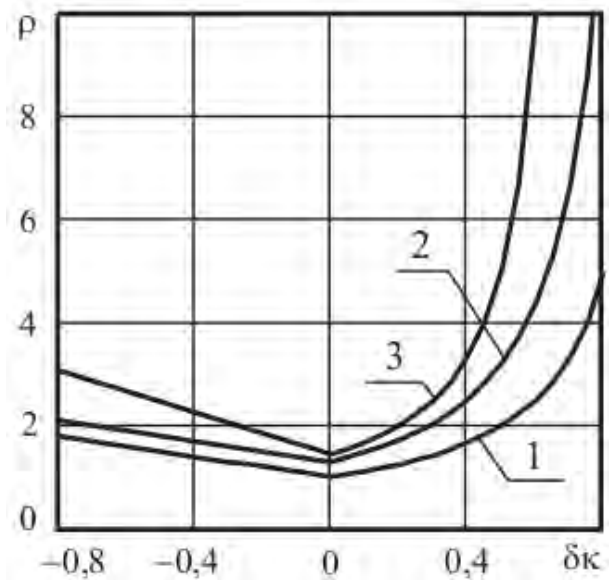


Рис. 4

На рисунке 1 представлены зависимости проигрыша ρ от относительной расстройки по моменту исчезновения $\delta\chi$ при фиксированном $\delta\kappa$ и ОСШ $z = 10$. Кривая 1 соответствует $\delta\kappa = 0$, то есть момент появления сигнала совпадает с ожидаемым $\kappa_0 = \kappa^*$.

При $\kappa_0 = \kappa^*$ проигрыш КПО увеличивается: $\delta\kappa = 0,3$ (кривая 2), $\delta\kappa = -0,3$ (кривая 3). Как видно, более неблагоприятные условия приёма наступают при $\delta\kappa > 0$ и $\delta\chi < 0$, что равносильно выполнению (25) — сигнал появляется раньше, а исчезает позже ожидаемого. На рисунке 2 изображены зависимости проигрыша КПО амплитуды от относительной расстройки по моменту появления $\delta\kappa$ при различных $\delta\chi$: $\delta\chi = 0$ (кривая 1), $\delta\chi = 0,3$ (кривая 2), $\delta\chi = -0,3$ (кривая 3), из которых также следует, что большие потери реализуются при выполнении неравенств (25).

Теперь пусть оцениваемый параметр — начальная фаза прямоугольного радиоимпульса (31). Используя (9), (10), (28), получаем, что КПО и ОМП начальной фазы несмещенные и

имеют условные дисперсии

$$D(\varphi_m | \varphi_0) = \frac{N_0}{a_0^2(\chi_0 - \kappa_0)} \cdot \frac{1 + \delta\chi - \delta\kappa}{[1 + \min(0, \delta\chi) - \max(0, \delta\kappa)]^2}, \quad (35)$$

$$D_0(\varphi_m | \varphi_0) = \frac{N_0}{a_0^2(\chi_0 - \kappa_0)}$$

соответственно. Отсюда потери в эффективности оценки

$$\rho = \frac{1 + \delta\chi - \delta\kappa}{[1 + \min(0, \delta\chi) - \max(0, \delta\kappa)]^2}, \quad (36)$$

На рисунках 3, 4 представлены графики зависимости проигрыша (36) от относительных расстроек по моменту исчезновения $\delta\chi$ и по моменту появления $\delta\kappa$ соответственно. Кривая 1 на рис. 3 соответствует $\delta\kappa = 0$, кривая 2 — $\delta\kappa = 0,3$, кривая 3 — $\delta\kappa = -0,3$. Кривая 1 на рис. 4 соответствует $\delta\chi = 0$, кривая 2 — $\delta\chi = 0,3$, кривая 3 — $\delta\chi = -0,3$.

Как видно из рассмотренных примеров, потери в эффективности при использовании КПО (27), (30), (34), (36) могут оказаться довольно велики. Это говорит о том, что незнание моментов появления и исчезновения сигнала может привести к существенному снижению качества оценки информативного параметра. Одним из способов преодоления указанного недостатка КПО является применение совместных ОМП всех параметров: информативных и неинформативных (13), (14) [4]. Приведённые результаты позволяют сделать обоснованный выбор алгоритма оценивания в зависимости от требований, предъявляемых к качеству оценки и простоте технической реализации приёмника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов, А. П. Точные формулы для расчёта характеристик приёма сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин // Проблемы передачи информации. — 2009. — Т. 45, вып. 2. — С. 91–100.
2. Захаров, А. В. Оценка параметров скачкообразного случайного возмущения с неизвестным моментом появления / А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 17–28.
3. Трифонов, А. П. Анализ скрытности передачи при использовании сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 1. — С. 35–43.
4. Трифонов, А. П. Совместная оценка параметров сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин // Изв. Вузов. Радиоэлектроника. — 2000. — Т. 43, № 5. — С. 34–43.
5. Мудров, В. И. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки / В. И. Мудров, В. Л. Кушко. — М.: Радио и связь, 1983. — 304 с.
6. Куликов, Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.

REFERENCES

1. Trifonov A. P., Korchagin Yu. E. Exact formulas for calculation of the characteristics of signal reception with unknown appearance and disappearance. [Trifonov A. P., Korchagin Yu. E. Tochnye formuly dlia raschyota harakteristik priyoma signala s neizvestnyimi momentami poiavleniia i ischeznoeniia]. *Problemy peredachi informacii — Problems of Information Transmission*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 91–100.
2. Zacharov A. V. Estimation of parameters of abrupted random disturbance with unknown moment of appearance. [Zacharov A. V. Ocenka parametrov skachkoobraznogo sluchainogo

vozmushcheniia s neizvestnym momentom poiavleniia]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, pp. 17–28.

3. Trifonov A. P., Korchagin Yu. E. Analysis of transmission stealth of the use signals with unknown appearance and disappearance. [Analiz skrytnosti peredachi pri ispolzovanii signalov s neizvestnymi momentami poiavleniia i ischeznoveniia]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 1, pp. 35–43.

4. Trifonov A. P., Korchagin Yu. E. Joint parameter estimations of signal with unknown Moments of Appearance and Disappearance. [Trifonov A. P., Korchagin Yu. E. Sovmestnaia ocenka parametrov signala s neizvestnymi momentami poiavleniia i ischeznoveniia]. *Izvestiya vysshix uchebnykh zavedenij. Radiofizika — Radiophysics and Quantum Electronics*, 2000, vol. 43, no. 5, pp. 34–43.

5. Mudrov V. I., Kushko V. L. Methods of measurement processing. Quasi likelihood estimations. [Mudrov V. I., Kushko V. L. Metody obrabotki izmerenii. Kvazipravdopodobnye ocenki]. Moscow: Radio and communications, 1983, 304 p.

6. Kulikov E. I., Trifonov A. P. Parameter estimation of signals in noise. [Kulikov E. I., Trifonov A. P. Ocenka parametrov signalov na fone pomekh]. Moscow: Sov. radio, 1978, 296 p.

*Трифонов Андрей Павлович, доктор техни-
ческих наук, профессор, Заслуженный дея-
тель науки РФ, зав. каф. радиофизики ВГУ,
г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru
Тел.: (473)–220–89–16*

*Trifonov Andrei Pavlovich, Doctor of technical
sciences, Professor, Honored Scientist of the
Russian Federation, Head of the Department
of Radiophysics of Voronezh State University,
Voronezh, Russian Federation
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru
Tel.: (473)–220–89–16*

*Корчагин Юрий Эдуардович, доктор
физико-математических наук, доцент, до-
цент каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж,
Российская Федерация
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Тел.: (473) 220–89–16*

*Korchagin Yurii Eduardovich, Doctor of
physicomathematical sciences, Associate
Professor of the Department of radiophysic
of Voronezh State University. Voronezh,
Russian Federation
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Tel.: (473) 220–89–16*