УДК 533.93; 524

ДИСПЕРСИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПЛАЗМЫ И ЗВЁЗДНЫХ СИСТЕМ

Э. И. Казанчян, Н. П. Стадная, А. Ф. Клинских

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 09.07.2015 г.

Аннотация. Рассматриваются дисперсионные соотношения для плазменных волн в бесстолкновительной плазме и для волн в гравитирующих системах. Соответствующие дисперсионные соотношения отличаются только знаком. Используется кинетическое уравнение Больцмана для бесстолкновительных систем. Особое внимание уделяется такому важному явлению в бесстолкновительной плазме, как затухание Ландау. Показывается, что оно математически является следствием соответствующего обхода полюса подынтегрального выражения в комплексной плоскости. Физически оно обусловлено резонансным взаимодействием между плазменной волной и электронами в плазме.

Ключевые слова: затухание Ландау, бесстолкновительная плазма, гравитирующие системы, кинетическое уравнение Больцмана, дисперсионное соотношение.

DISPERSION RELATIONS FOR PLASMA AND STELLAR SYSTEMS

E. I. Kazanchyan, N. P. Stadnaya, A. F. Klinskikh

Abstract. The dispersion relations for plasma waves in a collisionless plasma and waves in the gravitating systems are considered. The corresponding dispersion relations differ only in sign. The Boltzmann kinetic equation for collisionless systems is used. Particular attention is paid to such an important phenomenon in a collisionless plasma, as the Landau damping. It is showed, that it is a mathematical consequence of the corresponding bypass pole of the integrand in a complex plane. Physically, it is due to the resonant interaction between the plasma wave and the electrons in the plasma.

Keywords: the Landau damping, a collisionless plasma, gravitating systems, The Boltzmann kinetic equation, the dispersion relations.

ВВЕДЕНИЕ

Модели, создаваемые для описания одних явлений, зачастую используются и в других разделах и теориях. Яркий пример заимствования демонстрируют физика плазмы и физика гравитирующих систем. В данной работе речь пойдёт о дисперсионных соотношениях для плазменных волн в бесстолкновительной плазме и для волн в гравитирующих системах.

Дисперсионные соотношения являются следствиями уравнений динамики системы. Для нашего случая — это бесстолкновительное уравнение Больцмана. Соотношения для плазмы и звёздных систем имеют схожую структуру, в основе которой лежат свойства интеграла вероятности от комплексного аргумента. Эта схожесть обусловлена тем, что потенциалы взаимодействия компонент системы и в том, и в другом случае удовлетворяют уравнению Пуассона.

Э. И. Казанчян, Н. П. Стадная, А. Ф. Клинских

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Дисперсионные соотношения представляют собой функциональные зависимости частоты волны ω от волнового числа $k = 2\pi/\lambda$. В том случае, когда частота (волновое число) являются действительными, получают известные соотношения для звуковых и электромагнитных волн в конденсированных средах.

Для плазмы соответствующие дисперсионные соотношения находят из уравнения Власова. Фундаментальным результатом является отличие от нуля мнимой части частоты, отражающее эффект затухания Ландау [1]:

$$\gamma = 0{,}22\sqrt{\pi}\left(\frac{\omega_p}{kv_t}\right)^3 \exp\left[-\frac{1}{k^2\lambda_0^2}\right], \tag{1}$$

где γ – декремент затухания, ω_{p} – плазменная частота, $v_t^2 = \frac{2\theta}{m}$ — тепловая скорость (Θ — температура электронной компоненты плазмы в энергетических единицах, m — масса электрона), λ_{D} — дебаевский радиус.

Однако зависимость действительной части от частоты и, собственно, удобное для анализа дисперсионное соотношение получают с использованием дисперсионной функции [2], [6]:

$$k^2\lambda_{\text{D}}^2 = \frac{1}{2}Z'\left(\frac{\omega}{v_1 k}\right), \tag{2}$$

где $Z'(\zeta) = 2i\exp\left(-\zeta^2\right)\int\limits_{-\infty}^{i\zeta}\exp(-x^2)\,dx$ — дисперсионная функция [6]. Комплексную частоту ω можно записать в виде $\omega = \omega' + i\omega''$.

Детальный анализ формулы (2) при различных значениях параметров, характеризующих плазму, представляет интерес и является целью данной работы. Следует отметить, что такое же выражение, с точностью до знака, встречается в динамике звёздных систем, которое следует из анализа кинетического бесстолкновительного уравнения Больцмана.

МЕТОД ЛАНДАУ

Вычисление мнимой части частоты в (2) для плазмы с максвелловским распределением скоростей в пределе бесконечно малого затухания Ландау применил метод интегрирования в комплексной плоскости [2]. В этом случае рассмотрение адиабатически возрастающего поля даёт путь обхода полюса подынтегрального выражения в комплексной плоскости v снизу (рис. 1) [2].

СЛУЧАЙ КОНЕЧНЫХ ЗАТУХАНИЙ

В случае конечных затуханий необходимо использовать точное выражение (2). Интерес при этом представляют частотные зависимости действительной и мнимой частей функции Z'.

Используя уравнение Власова совместно с уравнением Пуассона в пределе малости возмущения можно получить дисперсионное соотношение следующего вида:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0(v_x)}{\partial v_x}\frac{dv_x}{v_x - \omega/k}, \tag{3}$$

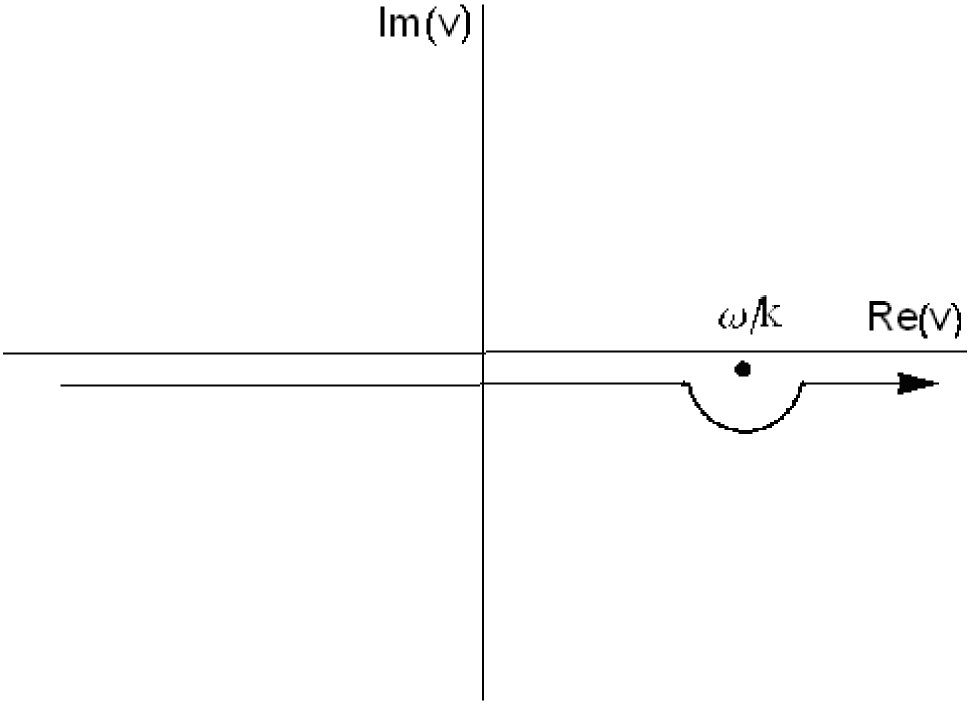


Рис. 1. *Обход полюса подынтегрального выражения в плоскости комплексной переменной* v

где ω_p — плазменная частота, k — волновое число, v_x — проекция скорости электронов в направлении оси Ox (рассматривается одномерный случай), $f_0(v_x)$ — функция распределения по скоростям для невозмущённой системы. Выражение (1) даёт в неявном виде зависимость частоты от волнового числа, т.е. закон дисперсии. Он имеет вид $f(\omega, k; \omega_p, \lambda_p, \lambda_D, v_t) = 0$, где ω_p — плазменная частота, λ_D — дебаевский радиус, v_τ — тепловая скорость электронов, являются параметрами плазмы, а ω и k — переменные.

Подробный вывод соотношения (2) дан в [6].

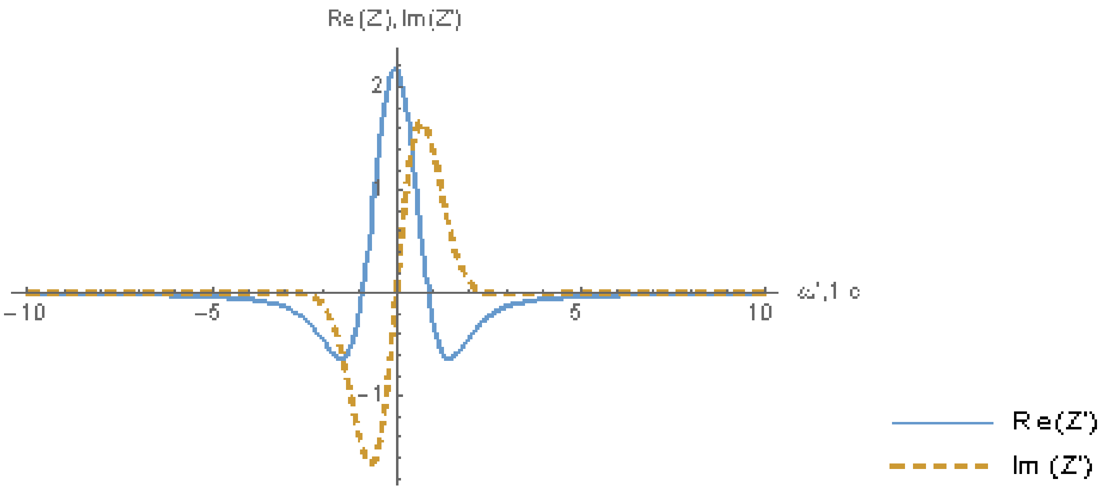
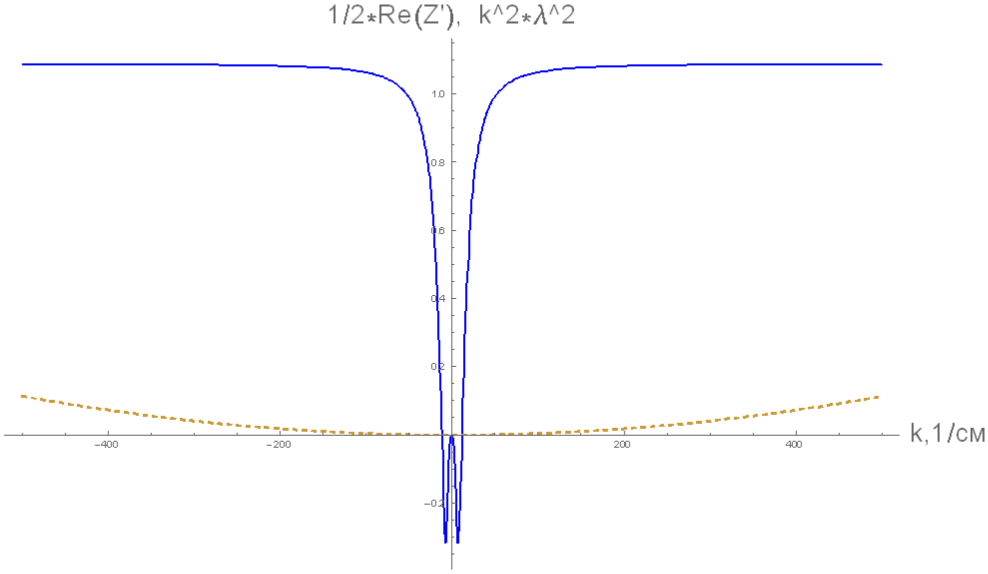
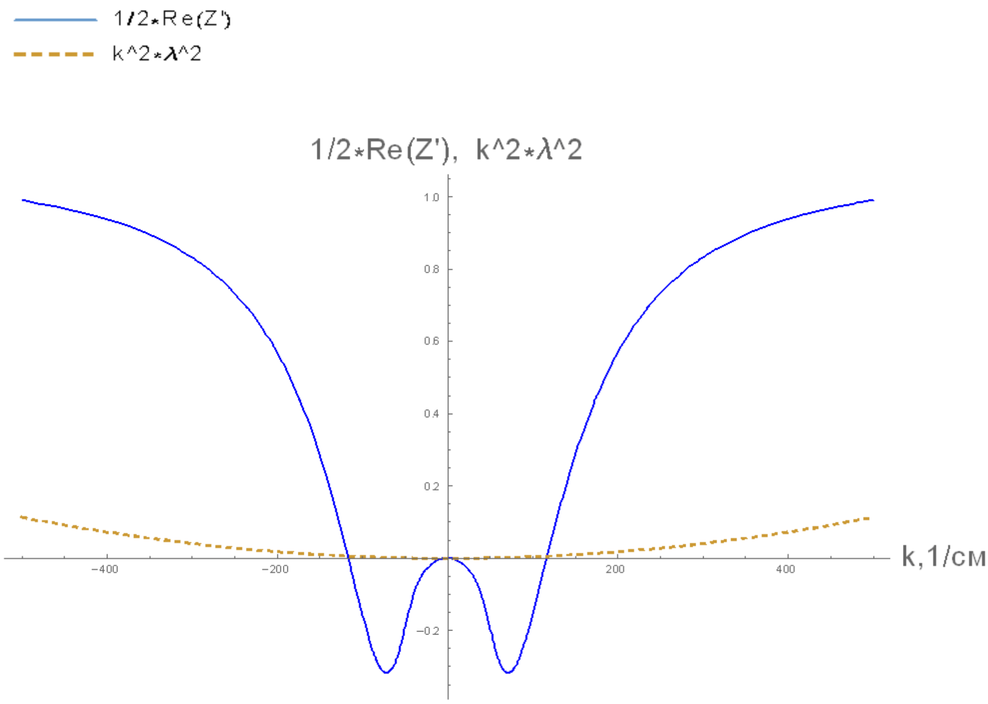


Рис. 2. *График действительной и мнимой частей функции Z' при постоянной мнимой части* $\omega'' = -1{,}97 \times 10^8 c^{-1}$, $v_t = 6.74 \times 10^6 \frac{см}{c}$, $k\lambda_D = 0.3$



а)



б)

Рис. 3. *Графики действительной части функций* $\frac{1}{2}Z'$ *и* $k^2\lambda_n^2$ *при* $\omega'' = -1{,}97 \times 10^8 c^{-1}$, $v_t = 6.74 \times 10^6 \frac{см}{c}$, *в зависимости от* k, *а) при* $\omega' = 10^8 c^{-1}$, *б) при* $\omega' = 10^{10} c^{-1}$.

Если рассматривать только небольшие затухания, то после обхода полюса получим из выражения (1) следующее соотношение:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k}\left[P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\widehat{f_0(v)}}{\partial v}\frac{dv}{v-\omega/k} + i\pi\frac{\partial\widehat{f_0(v)}}{\partial v}\bigg|_{v=\frac{\omega}{k}}\right]. \quad (4)$$

Если невозмущённая функция распределения $\widehat{f_0(v)}$ максвелловская, то для декремента затухания получим формулу:

$$\gamma = 0{,}22\sqrt{\pi}\left(\frac{\omega_p}{kv_t}\right)^3\exp\left[-\frac{1}{k^2\lambda_D^2}\right], \quad (5)$$

где $v_t^2 = \frac{2\theta}{m}$. Выражение (2) является более общим, т.к. оно справедливо для любых конечных ω'', а выражение (4) получается в пределе малости затухания. Математически затухание является следствием соответствующего анализа интеграла функции комплексной переменной, т.е. обхода полюса подынтегрального выражения снизу, даже если полюс лежит в нижней полуплоскости [2]. Как видно из формулы (4) диссипация возникает от электронов, скорости которых в направлении распространения электрической волны совпадают с фазовой скоростью волны, т.е. это резонансный процесс. По отношению к этим электронам поле стационарно и поэтому оно может производить над электронами работу, не обращающуюся в нуль при усреднении по времени. Если больше электронов со скоростями, меньшим фазовой, то будет затухание волны, в противном случае получится неустойчивость. Очевидно, что в случае максвелловского распределения преобладают частицы с меньшими скоростями, отсюда и затухание.

Таблица 1. *Значения декремента затухания γ, вычисленные по формулам (2) и (4) при различных значениях волнового числа k.*

k, см$^{-1}$	γ по формуле (2), 10^8с$^{-1}$	γ по формуле (4), 10^8с$^{-1}$
9,07	2,64487	2,50572
9,08	2,64488	2,59860
9,09	2,64490	2,69459
9,1	2,64491	2,79376

ДИСПЕРСИОНННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ЗВЁЗДНЫХ СИСТЕМ

Метод кинетического уравнения применим для описания любых систем, достаточно разреженных и состоящих из большого количества частиц. Примером такой системы может быть так же галактика либо звёздное скопление. Причём частицы, из которых состоят эти системы - это звёзды. Столкновения практически отсутствуют, поэтому это бесстолкновительные системы. Компоненты системы взаимодействуют гравитационно, т.е. потенциал взаимодействия удовлетворяет уравнению Пуассона. Полностью по аналогии с плазмой можно получить дисперсионное соотношение для звёздного скопления [3]. Оно будет иметь вид:

$$1 = -\frac{4\pi Gmn_0}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\widehat{f_0(v_x)}}{\partial v_x}\frac{dv_x}{v_x-\omega/k}, \quad (6)$$

где G — гравитационная постоянная, m — масса средней звезды в скоплении, n_0 — концентрация звёзд в скоплении. Знак минус обусловлен тем, что в отличие от плазмы, в которой взаимодействие электронов носит характер отталкивания, в звёздных системах компоненты (звёзды) испытывают притяжение. Аналогом квадрата плазменной частоты для гравитационных систем выступает выражение $4\pi G m n_0 = \omega_g^2$. Исходя из схожести соотношений (1) и (5) можно предположить, что в случае со звёздами должна быть неустойчивость волн, т.к. дисперсионное соотношение отличается знаком от такового для плазмы. Данная неустойчивость называется неустойчивостью Джинса. Она является одним из механизмов возникновения спиральных волн плотности в спиральных галактиках. Более подробно о формировании спиральных волн плотности в [7].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено дисперсионное уравнение, анализ которого позволяет найти декремент затухания при произвольном значении мнимой части ω''. Метод Ландау справедлив только для бесконечно малого затухания. Учёт конечной величины мнимой части частоты является важным при анализе затухания волн. Получены зависимости действительной и мнимой частей функции Z'(ζ) при разных значениях параметров, характеризующих плазму. Для анализа неустойчивости Джинса в динамике звёздных систем используется аналогия с затуханием Ландау в плазме. Дисперсионное уравнение с точностью до знака совпадает с таковым плазме. Условия затухания Ландау фактически приводят к неустойчивости Джинса в динамике гравитирующих систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чен, Ф. Введение в физику плазмы / Ф. Чен. — М.: Мир, 1987. — 398 с.

2. Лифшиц, Е. М. Физическая кинетика: учеб. пособие для вузов в 10 т. Т. X / Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 536 с.

3. Саслау, У. Гравитационная физика звёздных и галактических систем / У. Саслау. — М.: Мир, 1989. — 544 с.

4. Ландау, Л. Д. Электродинамика сплошных сред: учеб. пособие для вузов в 10 т. Т. VIII / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М.: Наука, 1982. — 621 с.

5. Современные представления о природе спиральной структуры галактик / Ю. Н. Ефремов, В. И. Корчагин, Л. С. Марочник, А. А. Сучков // УФН. — 1989. — Т. 157, вып. 4. — С. 599–627.

6. Эккер, Г. Теория полностью ионизованной плазмы / Г. Эккер. — М.: Мир, 1974. — 432 с.

7. Griv, E. Density wave formation in differentially rotating disk galaxies: Hydrodynamic simulation of the linear regime / E. Griv, Hsiang-Hsu Wang // New Astronomy. — 2014. — V. 30. — P. 8–27.

REFERENCES

1. Chen F. Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. [Chen F. Vvedenie v fiziku plazmy]. Moscow: Mir, 1987, 398 p.

2. Lifshic E. M., Pitaevski L. P. Physical Kinetics. [Lifshic E. M., Pitaevski L. P. Fizicheskaya kinetika: ucheb. posobie dlya vuzov v 10 T, T. X]. Moscow: FIZMATLIT, 2002, 536 p.

3. Gravitational Physics of stellar and galactic systems. [Saslau U. Gravitacionnaya fizika zvezdnix I galakticheskikh system]. Moscow, 1989, 544 p.

4. Landau L., Lifshic E. M., Pitaevski L. P. The electrodynamics of continuous media. [Landau L., Lifshic E. M., Pitaevski L. P. Elektrodinamika sploshnix sred: ucheb. posobie dlya vuzov v 10 t, T VII]. Moscow: Nauka, 1982, 621 p.

5. Efremov Y. N., Korchagin V. I., Marochnik L. S., Suchkov A. A. Modern ideas about the nature of spiral structure of galaxies. [Efremov Y. N., Korchagin V. I., Marochnik L. S., Suchkov A. A. Sovremennie predstavleniya o spiralnoy structure galactic]. *Uspexi fizicheskix nauk — Physics,*

Uspekhi, 1989, vol. 157, iss. 4, pp. 599–627.
6. Ecker G. Theory Of Fully Ionized Plasmas. [E'kker G. Teoriya polnost'yu ionizovannoj plazmy]. Moscow: Mir, 1974, 432 p.
7. Griv E., Hsiang-Hsu Wang Density wave formation in differentially rotating disk galaxies: Hydrodynamic simulation of the linear regime. New Astronomy, 2014, vol. 30, pp. 8–27.

Казанчян Эдгар Ишханович, магистрант кафедры теоретической физики физического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: edgarghazanchyan@mail.ru

Kazanchyan E.I., master student of Department of Theoretical Physics of Physical faculty Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: edgarghazanchyan@mail.ru

Стадная Надежда Павловна, кандидат физико-математических наук, сотрудник кафедры общей физики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: St.hope11@gmail.com

Stadnaya N.P., Candidate of Physico-mathematical Sciences, assistant of the Department General Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: St.hope11@gmail.com

Клинских Александр Федотович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: klinskikh@phys.vsu.ru

Klinskikh A.F., Doctor of Physico-mathematical Sciences, Professor, Head of the Department General Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: klinskikh@phys.vsu.ru