УДК 517

# О СКОРОСТИ РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ РАЗНОПОРЯДКОВОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

**С. А. Шабров, Н. И. Головко**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 01.06.2014 г.

**Аннотация**. В работе получена скорость роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи, которая возникает при применении метода Фурье к математической модели, возникающей при описании малых свободных колебаний механической системы, состоящей из стержня, один конец которого защемлен, а к другому — прикреплена растянутая струна, другой конец которой закремлен; вся система находится во внешней среде с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости у решения. Анализ задачи опирается на поточечный подход, предложенный Ю.В. Покорным, и показавший свою эффективность при изучении не только линейных граничных задач второго порядка, но и нелинейных.

**Ключевые слова**: граничная задача, математическая модель, спектральная задача, собственное значение, скорость роста.

# ABOUT THE VELOCITY OF INCREASE OF EIGENVALUE OF A DIFFERENT ORDER SPECTRAL PROBLEM WITH DERIVATIVE ON THE MEASURE

**S. A. Shabrov, N. I. Golovko**

**Abstract**. In this paper was obtained the of growth's velocity of own sense of a spectral problem, which appears at description of small free oscillation of mechanical system. The system contains stick, one of its ends is squeezed, and to another one the stretched string was attached, the second end of stick is fasten. All the system is in an external environment with local peculiarities, which lead to losing the smoothness of solution. The analysis of the problem leans on point wise approach, which was suggested by Yu.V.Pokornyi. This method showed its productivity at studying not only linear boundary the second order problem, but also non-linear one.

**Keywords**: boundary problem, math model, spectral problem, eigenvalue, the velosity of growth.

Качественная теория с негладкими решениями начала бурно развиваться после выхода в 1999 году работы Ю. В. Покорного [1]. Так вышли монографии [2], [3], работы [4], [5], [6], [7] в которых досконально изучены линейные краевые задачи второго порядка с производными по мере. Поточечный подход, используемый в линейных задачах, показал свою эффективность и в нелинейных задачах [8], [9], и в задачах с разрывными решениями [10], [11], [12], и в граничных задачах четвертого порядка [13], [14], [15], а также в краевых задачах гиперболического типа [16], [17].

Эта эффективность объясняется достаточно просто: при использовании производных по мере уравнение становится поточечно заданным, то есть обыкновенным, что дает возможность применения качественных методов анализа решений, в отличие от теорий обобщенных функций. Так, при использовании теории распределений по Шварцу-Соболеву, проявляются трудно разрешимые проблемы. Во-первых, удается установить лишь слабую разрешимость уравнения, что для приложений мало пригодно, во-вторых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которую не удается решить до сих пор, и, в-третьих, уравнения в обощенных функциях — это равенство двух функционалов, определенных над пространством основных функций, и применение качественных методов анализа к таким уравнениям крайне затруднительно. Здесь можно вспомнить работу [18] Мышкиса, в которой для уравнений с обобщенными коэффициентами удалось установить аналог теорем Штурма о перемежаемости нулей.

Отметим также интересные работы [19]–[24].

## ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается вопрос о росте собственных значений следующей задачи:

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ u(0) = u'(0) = u(l) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Данная спектральная задача возникает при применении метода Фурье в математической модели, которая описывает малые собственные колебания системы, состоящей из стержня, один конец которого защемлен, а ко второму прикреплена растянутая струна, другой конец которой закреплен.

Коэффициент $p(x)$ характеризует материал, из которого изготовлен стержень; положителен на отрезке $[0,\xi)$, где $\xi$ — точка соединения стержня и струны. Продолжим его на оставшуюся часть отрезка нулем, полученную функцию мы также будем обозначать $p(x)$. Функция $r(x)$ — сила натяжения струны в точке $x$. Как и функцию $p(x)$, продолжим $r(x)$ на $[0,\xi)$ нулем, обозначив продолженную функцию через $r(x)$. Функция $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды, $F(x)$ — внешнюю силу, а $M(x)$ — масса участка $[0,x)$, $\sigma$ — мера, порождаемая функцией $\sigma(x)$, содержит все особенности системы — это точки, в которых имеются локализованные особенности. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$.

Решение задачи (1) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0,l]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, $\sigma$-абсолютно непрерывна на $[\xi,l]$; вторая производная $u''_{xx}$, определенная на $[0,\xi)$, имеет конечное изменение на $[0,\xi-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютна непрерывна на $[0,\xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ — $\sigma$-абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0,l]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0,l]$ функция и $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x)>0$, $\inf\limits_{x\in(\xi,l]} r(x)>0$.

Уравнение в (1) определено на специальном расширении $\overline{[0,l]}_\sigma$ отрезка $[0,l]$, в котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$.

Множество $\overline{[0,l]}_\sigma$ строится следующим образом. На $[0,l]$ вводим метрику $\rho(x,y)=|\sigma(x)-\sigma(y)|$. Если $S(\sigma)\neq 0$, то $([0,l],\rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0,l]}_\sigma$.

## ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ

Как показано в работе [25] задача

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = u'(0) = u(l) = 0, \end{cases}$$

является невырожденной (однородная задача имеет только тривиальное решение), поэтому она имеет единственное решение для любой $\sigma$–абсолютно непрерывной функции $F$.

Через $K(x,s)$ обозначим минималь следующего функционала

$$\Phi(u) = \int\limits_0^\xi \frac{pu''^2_{xx}}{2}dx + \int\limits_\xi^l \frac{ru'^2_x}{2}dx + \int\limits_0^l \frac{u^2}{2}dQ - \int\limits_0^l ud\theta(x-s), \tag{2}$$

где $\theta(x-s)$ — функция Хевисайда. Точно так же, как и в работе [25], показывается существование $K(x,s)$.

Тогда задача (1) эквивалента интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int\limits_0^l K(x,s)u(s)M'_\sigma(s)d\sigma, \tag{3}$$

или, вспоминая теорему о замене [4],

$$u(x) = \lambda \int\limits_0^l K(x,s)u(s)dM(s).$$

Интегральный оператор $(Au)(x) = \int\limits_0^l K(x,s)u(s)dM(s)$ действует в $C[0;l]$ и вполне непрерывен. Поэтому его спектр состоит из собственных значений, причем каждое из них имеет конечную кратность.

Отметим, что функция влияния не является симметричной: вообще говоря, $K(x,s) = K(s,x)$. В это же время задача является симметричной: для всяких $u, v \in E$ справедливо равенство $(Lu,v) = (u,Lv)$. Отсюда вытекает вещественность спектра.

Покажем, что у каждого собственного значения присоединенные элементы отсутствуют.

Предположим противное: у некоторого собственного значения $\lambda_k$ существует цепочка присоединенных ненулевых векторов. Тогда, первая (за собственной функцией, которую мы обозначим через $\varphi_k$) является решением граничной задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda_k M'_\sigma u + \varphi_k, \\ u(0) = u(l) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Умножим уравнение (4) на $\varphi_k$ и проинтегрируем по мере $\sigma$ вдоль всего отрезка $[0,l]$ :

$$\int\limits_0^l (pu''_{xx})''_{x\sigma}\varphi_k\,d\sigma - \int\limits_0^l (ru'_x)'_\sigma\varphi_k\,d\sigma + \int\limits_0^l uQ'_\sigma\varphi_k\,d\sigma = \lambda_k \int\limits_0^l uM'_\sigma\varphi_k\,d\sigma + \int\limits_0^l \varphi_k^2\,d\sigma. \tag{5}$$

Первый и второй интеграл равенства (5) проинтегрируем по частям (первый интеграл — четрыре раза, второй — два):

$$\int\limits_0^l (pu''_{xx})''_{x\sigma}\varphi_k d\sigma = (pu''_{xx})'_x\varphi_k\Big|_0^l - pu''_{xx}\varphi'_{kx}\Big|_0^l + p\varphi''_{kxx}u'\Big|_0^l - (p\varphi''_{kxx})'_u\Big|_0^l +$$

$$\int\limits_0^l (p\varphi''_{kxx})''_{x\sigma}ud\sigma = \int\limits_0^l (p\varphi''_{kxx})''_{x\sigma}ud\sigma \tag{6}$$

и

$$\int\limits_0^l (ru'_x)'_\sigma \varphi_k d\sigma = ru'_x\varphi_k\Big|_0^l - r\varphi_{kx}u\Big|_0^l + \int\limits_0^l (r\varphi'_{kx})'_\sigma u d\sigma = \int\limits_0^l (r\varphi'_{kx})'_\sigma u d\sigma \qquad (7)$$

Все подынтегральные слагаемые равны нулю, так как $p(l) = r(0) = 0$ и $\varphi_k(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют краевым условиям. С учетом равенств (6) и (7), соотношение (5) принимает вид:

$$\int\limits_0^l [(p\varphi'_{kx})''_{x\sigma}) - (r\varphi'_{kx})'_\sigma + Q'_\sigma\varphi_k] u d\sigma = \lambda_k \int\limits_0^l u M'_\sigma \varphi_k d\sigma + \int\limits_0^l \varphi_k^2 d\sigma \qquad (8)$$

Но $\varphi_k(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_k$, потому (8) принимает вид: $\int\limits_0^l \varphi_k^2 d\sigma = 0$, откуда следует, в силу непрерывности $\varphi_k(x)$, тождество $\varphi_k(x) \equiv 0$. Последнее противоречит нетривиальности $\varphi_k(x)$.

## ПОРЯДОК РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Собственные значения спектральной задачи (4) определяются как нули оператора Фредгольма, который в нашем случае определяется следующим образом (см, например, [26], [27])

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n, \qquad (9)$$

где

$$A_n = \int\limits_0^l \dots \int\limits_0^l \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & \dots & K(s_1,s_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(s_n,s_1) & \dots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} dM(s_1)\dots dM(s_n).$$

Точно так же, как и в [26], [27], доказывается сходимость ряда при всех $\lambda$. Однако, применить схему, использованную в [27], в нашем случае нельзя, так как $K(x,s)$ не имеет непрерывной производной по $x$, если $x > \xi$.

В то же время, разности $K(s_{i+1},s_i) - K(s_i,s_j)$ $(i = 1,2,\dots,n-1, j = 1,2,\dots,n)$ при некоторых $\kappa_{ij}$, заключенными между $\inf\limits_{x,s\in[0;l]} K'_x(x,s)$ и $\sup\limits_{x,s\in[0;l]} K'_x(x,s)$, можно записать в следующем виде $K(s_{i+1},s_i) - K(s_i,s_j) = \kappa_{ij}(s_{i+1} - s_i)$. Так как $K(x,s)$ — решение уравнения $Lu = \theta(x-s)$, то $K'_x(x,s)$ ограничена на всем квадрате $[0,l]\times[0,l]$. Поэтому, величины $\kappa_{i,j}$ ограничены в совокупности некоторой постоянной $C$.

Тогда, при $n \geqslant 2$ имеем

$$\begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \dots & K(s_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_{n-1},s_1) & K(s_{n-1},s_2) & \dots & K(s_{n-1},s_n) \\ K(s_n,s_1) & K(s_n,s_2) & \dots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \dots & K(s_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_{n-1},s_1) & K(s_{n-1},s_2) & \dots & K(s_{n-1},s_n) \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_n - s_{n-1}) = \dots =$$

$$= \begin{array}{cccc} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ \varkappa_{1,1} & \varkappa_{1,2} & \dots & \varkappa_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_{n-2,1} & \varkappa_{n-2,2} & \dots & \varkappa_{n-2,n} \\ \varkappa_{n-1,1} & \varkappa_{n-1,2} & \dots & \varkappa_{n-1,n} \end{array} \cdot (s_2-s_1)(s_3-s_2)\dots(s_n-s_{n-1}).$$

Применяя неравенство Адамара и оценку

$$|(s_2-s_1)(s_3-s_2)\dots(s_n-s_n-1)| \leqslant \left(\frac{l}{n-1}\right)^{n-1},$$

для $A_n$ (при $n \geqslant 2$) будем иметь

$$|A_n| \leqslant C^n \cdot n^{\frac{n}{2}}(M(l)-M(0))^n \left(\frac{l}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{l}(C(M(l)-M(0))l)^n \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{n-1}}.$$

Так как для любого фиксированного положительного $\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^{\varepsilon n}} = 0$, то при достаточно большом $n$ (зависящем от $\varepsilon$), справедливо неравенство

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{l}(C(M(l)-M(0))l)^n n^{-\frac{n}{2}+\varepsilon n}. \tag{10}$$

Доказанное неравенство, согласно общей теории целых функций [28], [29], показывает, что порядок роста функции $D(\lambda)$ не выше $\frac{2}{3} - \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$. Поэтому $D(\lambda)$ имеет порядок роста не выше 2/3, следовательно, для произвольности $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/3+\delta}} \tag{11}$$

сходится. Таким образом, доказана теорема.

**Теорема 1.** *Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции конечного на $[0,l]$ изменения, $Q(x)$ — не убывает на $[0,l]$ и $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in(\xi,l]} r(x) > 0$. Более того, пусть $\{\lambda_n\}$ — собственные значения задачи (1), причем каждое из них является простым. Тогда ряд* (11) *сходится при любом $\delta > 0$.*

Доказанная теорема позволяет получить достаточные условия применимости метода Фурье к разнопорядковой математической модели, описывающей малые свободные колебания системы, состоящей из стержня, один конец которого защемлен, а к другому — прикреплена растянутая струна, другой конец которой закремлен.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б. Зверева, С.А. Шабров. — М.: Физматлит, 2009. — 192 с.

4. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

5. Pokornyi, Yu.V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu.V. Pokornyi, S.A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — Vol. 119, № 6. — P. 769–787.

6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищенко, С.А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

7. Pokornyi Yu.V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — Vol. 60, iss. 1. — С.108–113.

8. Давыдова М.Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11. № 4. — С. 13–17.

9. Давыдова М.Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

10. Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / М.Б. Давыдова, Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.

11. Зверева М.Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория / М.Б. Зверева. — Саарбрюккен, 2012. — 112 с.

12. Покорный Ю.В. О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны / Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошных сред. Спецвыпуск. Ростов-на-Дону. — 2004. — С. 186–190.

13. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

14. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва, Меач Мон // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.

15. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

16. Баев А.Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

17. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

18. Мышкис А.Д. О решениях линейного однородного двумерного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенными коэффициентами / А.Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 615–619.

19. Щеглова Ю.Д. Об упругопластическом кручении полого цилиндрического стержня из неоднородного материала с поперечным сечением в виде кругового кольца / Ю.Д. Щеглова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 213–219.

20. Поляков Д.М. Спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка / Д.М. Поляков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 179–181.

21. Артемов М.А. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска / М.А. Артемов, А.П. Якубенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика,

математика. — 2014. — № 1. — С. 30–38.

22. Абдурагимов Г.Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка / Г.Э. Абдурагимов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 77–80.

23. Юлдашев Т.К. Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени / Т.К. Юлдашев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 277–295.

24. Юлдашев Т.К. Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка / Т.К. Юлдашев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 153–163.

25. Тимашова Е.В. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т.А. Иванникова, Е.В. Тимашова, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 2–1. — С. 3–8.

26. Гантмахер Ф.Р. Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн // М.: Гос. изд. тех–теор. лит–ры. — 1950. — 359 с.

27. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М.: Гос. изд. тех-теор. лит–ры. — 1957. — 267 с.

28. Титчмарш Е. Теория функций / Е. Титчмарш. — М.: Наука, 1980. — 464 с.

29. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М.: Гос. изд. тех-теор. лит–ры, 1956. — 632 с.

## REFERENCES

1. Pokornyi Yu. V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

3. Pokorny Yu. V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A.. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

4. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

5. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, Vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

8. Davydova M. B., Shabrov S. A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O chisle reshenij nelinejnoj

kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, Vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

9. Davydova M. B., Shabrov S. A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

10. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A., Davydova M.B. Stieltjes differential pulsed problems with discontinuous solutions. [Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A., Davydova M. B. Differencial Stilt'esa v impul'snyx zadachax s razryvnymi resheniyami]. *Doklady Akademii nauk — Reports of Academy of Sciences*, 2009, Vol. 428, no. 5, pp. 595–597.

11. Zvereva M.B. Differential equations with discontinuous solutions: qualitative theory. [Zvereva M.B. Differencial'nye uravneniya s razryvnymi resheniyami: kachestvennaya teoriya]. Saarbruecken, 2012, 112 p.

12. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. About problem of Sturm - Liouville for discontinuous strings. [Pokornyj Yu.V., M.B. Zvereva, S.A. Shabrov O zadache Shturma–Liuvillya dlya razryvnoj struny]. *Izvestiya VUZov. Severo-Kavkazskij region. Matematika i mexanika sploshnyx sred. Specvypusk. Rostov-na-Donu — Proceedings of the universities. North Caucasus region. Mathematics and mechanics of continuous media. Special Issue. Rostov-on-Don*, 2004, pp. 186–190.

13. Shabrov S. A. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features. [Shabrov S. A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimiosobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

14. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon The Function Of The Differential Impact Model Fourth Order. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon Funkciya vliyaniya differencial'noj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo instituta GPS MChS Rossii — Herald of the Voronezh Institute of Russian Ministry for Emergency Situations*, 2014, iss. 3 (12), pp. 65–73.

15. Shabrov S.A. A necessary condition for a minimum of a quadratic functional with Stieltjes integral. [Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma odnogo kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 52–55.

16. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon Uniqueness Of The Solution Mathematical Model Of Forced String Oscillation Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon O edinstvennosti resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, iss. 1, pp. 50–55.

17. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon About Unique Classical Solution Mathematical Model Of Forced Vibrations Rod System With Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

18. Myshkis A.D. On solutions of linear homogeneous two-dimensional second-order differential inequality with generalized coefficients. [Myshkis A.D. O resheniyax linejnogo odnorodnogo dvumernogo differencial'nogo neravenstva vtorogo poryadka s obobshhennymi koe'fficientami].

*Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 5, pp. 615— 619.

19. Shcheglova Yu.D. On the Elastoplastic Torsion of Hollow Cylindrical Inhomogeneous Rod with a Cross-Section in the Form of a Circular Ring. [Shheglova Yu.D. Ob uprugoplasticheskom kruchenii pologo cilindricheskogo sterzhnya iz neodnorodnogo materiala s poperechnym secheniem v vide krugovogo kol'ca]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 213–219.

20. Polyakov D.M. Spectral Properties of the Differential Operator of Fourth Order. [Polyakov D.M. Spektral'nye svojstva differencial'nogo operatora chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 179–181.

21. Artemov M.A., Yakubenko A.P. Rotating Disc Mechanical Behaviour Mathematical Modelling. [Artemov M.A., Yakubenko A.P. Matematicheskoe modelirovanie mexanicheskogo povedeniya vrashhayushhegosya diska]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 30–38.

22. Abduragimov G.E. About Existence and Uniqueness of Positive Solution of Boundary Value Problem of Sturm-Liouville Type for One Nonlinear Functional Differebtial Equation of the Second Order. [Abduragimov G.E'. O sushhestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya kraevoj zadachi tipa Shturma-Liuvillya dlya odnogo nelinejnogo funkcional'no-differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 77–80.

23. Yuldashev T.K. Mixed Value Problem for Nonlinear Equation with Pseudoparabolic Operator of Higher Power. [Yuldashev T.K. Smeshannaya zadacha dlya nelinejnogo uravneniya s psevdoparabolicheskim operatorom vysokoj stepeni]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 277–295.

24. Yuldashev T.K. On Inverse Problem for Nonlinear Integro-Differential Equations of the Higher Order. [Yuldashev T.K. Ob obratnoj zadache dlya nelinejnyx integro-differencial'nyx uravnenij vysshego poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 153–163.

25. Ivannikova T.A., Timashova E.V, Shabrov S.A. On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval. [Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa i nulevym koe'fficientom pri starshej proizvodnoj na chasti intervala]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, no. 2–1, pp. 3–8.

26. Gantmakher F. R., Krein M. G. Oscillating matrices and kernels and small oscillations of mechanical systems. [Gantmaxer F.R., Krejn M.G. Oscilyacionnye matricy i yadra i malye kolebaniya mexanicheskix sistem]. Moscow, 1950, 359 p.

27. Lovitt W.V. Linear integral equations. [Lovitt U.V. Linejnye integral'nye uravneniya]. Moscow, 1957, 267 p.

28. Titchmarsh E.Theory of functions. [Titchmarsh E. Teoriya funkcij]. Moscow: Nauka, 1980, 464 p.

29. Levin B. Ya. The distribution of roots of entire functions. [Levin B. Ya. Raspredelenie kornej celyx funkcij]. Moscow, 1956, 632 p.

*Шабров Сергей Александрович, доцент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, г. Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru*

*Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru*

*Головко Надежда Игоревна,, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru*
*Тел.: Golovko Nadezhda Igorevna*

*, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru*
*Tel.: Golovko Nadezhda Igorevna*