УДК 517.9

О РЕШЕНИИ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА*

С. М. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 02.06.2014 г.

Аннотация. Матричные уравнения Ляпунова используются в теории устойчивости движения, а также при решении дифференциальных уравнений Риккати. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучена, то решение неоднородного уравнения Ляпунова достаточно громоздко. Ранее были предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения неоднородного уравнения Ляпунова на основе псевдообращения оператора L, соответствующего однородной части уравнения Ляпунова. Нами предложена формула построения частного решения неоднородного уравнения Ляпунова с использованием базиса образа оператора L^*, сопряженного оператору L.

Ключевые слова: матричные уравнения Ляпунова, матричное уравнение Риккати, псевдообращение оператора.

THE SOLUTION OF THE LYAPUNOV MATRIX EQUATION

S. M. Chuiko

Abstract. Lyapunov matrix equations widely used in the theory of stability of motion, as well as the solution of differential Riccati equations. If the structure of the general solution of the homogeneous part of the Lyapunov equation is well studied, the solution of the inhomogeneous Lyapunov equation is quite cumbersome. Earlier proposed solvability conditions, as well as a scheme for constructing a particular solution of the inhomogeneous equation Lyapunov based pseudoinverse of operator L, corresponding to the homogeneous part of the Lyapunov equation. We have proposed a formula for constructing a particular solution of the nonhomogeneous Lyapunov equation using the basis of the image of L^*, the conjugate operator L.

Keywords: Lyapunov matrix equation, Riccati matrix equation, pseudoinverse operator.

ВВЕДЕНИЕ

Исследуем задачу о построении решения $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матричного уравнения [1], [2], [3], [4], [5]

$$QC = CR + B \ . \qquad (1)$$

Здесь $Q,\ R,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — данные $(n\times n)-$ матрицы. Как известно, общее решение уравнения (1) является суммой

$$C = \Phi[Q, R] + \Psi[B]$$

общего решения $\Phi[Q, R]$ однородного уравнения

$$QC = CR \qquad (2)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381)

и произвольного частного решения $\Psi[B]$ уравнения (1). Для построения общего решения $\Phi[Q,R]$ однородной части (2) матричного уравнения (1) приведем матрицы Q и R неособенными ($\det S_Q \neq 0$) и ($\det S_R \neq 0$) преобразованиями подобия к нормальным жордановым формам:

$$Q = S_Q \cdot J_Q \cdot S_Q^{-1},\ R = S_R \cdot J_R \cdot S_R^{-1}.$$

Задача о построении общего решения $\Phi[Q,R]$ однородного уравнения (2) заменой переменной $\widetilde{C} = S_Q^{-1} \cdot C \cdot S_R$ приводится к уравнению [1] $J_Q\widetilde{C} = \widetilde{C}J_R$. Обозначим элементарные делители матрицы Q :

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\ \ldots\ (\lambda-\lambda_u)^{p_u},\ \lambda_1+\lambda_2+\ \ldots\ +\lambda_u = n,$$

а также элементарные делители матрицы R :

$$(\lambda-\mu_1)^{q_1},\ (\lambda-\mu_2)^{q_2},\ \ldots\ (\lambda-\mu_v)^{q_v},\ \mu_1+\mu_2+\ \ldots\ +\mu_v = n.$$

В дальнейшем будем говорить, что матрица $\Theta_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{p_\alpha \times q_\beta}$ имеет правильную верхнюю треугольную форму, если при $p_\alpha < q_\beta : \Theta_{\alpha\beta} = (O\ T_{p_\alpha})$ и при $p_\alpha > q_\beta$:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{q_\beta} \\ O \end{pmatrix};$$

здесь $T_{p_\alpha} \in \mathbb{R}^{p_\alpha \times p_\alpha}$ — матрица вида

$$T_{p_\alpha} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \ldots & \theta_{p_\alpha-1} \\ 0 & \theta_1 & \ldots & \theta_{p_\alpha-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \theta_1 \end{pmatrix},$$

$\theta_1, \theta_2,\ \ldots\ \theta_{p_\alpha-1} \in \mathbb{R}$ — произвольные константы, а также

$$T_{q_\beta} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \ldots & \theta_{q_\beta-1} \\ 0 & \theta_1 & \ldots & \theta_{q_\beta-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \theta_1 \end{pmatrix},$$

$\theta_1, \theta_2,\ \ldots\ \theta_{q_\beta-1} \in \mathbb{R}$ — произвольные константы. Нормальные жордановы формы J_Q и J_R, а следовательно, и неизвестная матрица

$$\widetilde{C} = \left(\widetilde{C}_{\alpha\beta}\right),\ \alpha = 1,2,\ \ldots\ u,\ \beta = 1,2,\ \ldots\ v$$

имеют квазидиагональный вид, при этом $\widetilde{C}_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta}$ при $\alpha = \beta$ и $\widetilde{C}_{\alpha\beta} = O$ при $\alpha \neq \beta$. Таким образом, [1], [5]

$$C = S_Q \cdot \left(\widetilde{C}_{\alpha\beta}\right) \cdot S_R^{-1}.$$

Обозначая $\Xi_i,\ i = 1,2,\ \ldots\ p$ частные решения однородного уравнения (2), приходим к следующему утверждению [5].

Лемма. *Общее решение однородного уравнения (2) представимо в виде*

$$\Phi[Q,R] = \sum_{i=1}^{p} \theta_i \Xi_i; \qquad (3)$$

здесь, $\theta_1, \theta_2,\ \ldots\ \theta_p \in \mathbb{R}$ — произвольные константы.

При условии $\sigma(Q)\cap\sigma(R)=\varnothing$ однородная часть (2) матричного уравнения (1) имеет ненулевые решения вида (3), при этом однородное матричное уравнение $Q^*C=CR^*$, сопряженное уравнению (2), имеет ненулевые решения вида

$$\Phi[Q^*,R^*]=S_{Q^*}\cdot\left(\check{C}_{\alpha\beta}\right)\cdot S_{R^*}^{-1}.$$

Задача о построении общего решения матричного уравнения (1) заменой переменной

$$\widetilde{C}=S_Q^{-1}\cdot C\cdot S_R$$

приводится к уравнению

$$J_Q\widetilde{C}=\widetilde{C}J_R+\mathcal{B}; \tag{4}$$

здесь

$$\mathcal{B}:=S_Q^{-1}\cdot B\cdot S_R\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Как известно [5], уравнение (4) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{L^*}\mathcal{B}=0. \tag{5}$$

Здесь P_{L^*} — ортопроектор оператора, сопряженного фредгольмовому оператору [5], [8] $LC:\ J_Q\widetilde{C}-\widetilde{C}J_R:\ \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$. По определению ортопроектор P_{L^*} удовлетворяет условиям [8] $L^*P_{L^*}=0,\ P_{L^*}^2=P_{L^*},\ P_{L^*}^*=P_{L^*}$. Предположим условие (5) выполненным, при этом уравнение (4) разрешимо. Обозначим $\Theta_i,\ i=1,2,\ \dots\ ,\ n^2$ базис области определения оператора L. В силу очевидного равенства $J_Q\widetilde{C}-\widetilde{C}J_R=\mathcal{B}$ частное решение $\Psi[\mathcal{B}]$ уравнения (4) следует искать в области определения оператора L, следовательно

$$\Psi[\mathcal{B}]=\sum_{i=1}^{n^2}c_i\Theta_i,\ c_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\ \dots\ n^2.$$

Поскольку часть векторов базиса области определения оператора L принадлежит нуль-пространству $N(L):=\ker L$ оператора L, постольку приходим к уравнению относительно $q:=n^2-\dim\ker L$ неизвестных $c_i\in\mathbb{R}:$

$$L\Psi[\mathcal{B}]:=J_Q\sum_{i=1}^{q}c_i\Theta_i-\sum_{i=1}^{q}c_i\Theta_i\ J_R=\mathcal{B}. \tag{6}$$

Здесь $\Theta_i,\ i=1,2,\ \dots\ q$ — матрицы из базиса области определения оператора L, для которых $L\Theta_i=0$. Для оператора L имеет место разложение [5], [8]

$$\mathbb{R}^{n\times n}=\mathbb{R}(L^*)\oplus\mathbb{N}(L),$$

следовательно, любой вектор $\Theta_i,\ i=1,2,\ \dots\ q$ из базиса области определения оператора L, для которого $L\Theta_i=0$ принадлежит образу $\mathbb{R}(L^*)$. Определим оператор

$$\mathcal{M}[\mathcal{B}]:\ \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n^2},$$

как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}]\in\mathbb{R}^{n^2}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$. Обозначим матрицу

$$\mathcal{M}L\Big[\Theta_1,\ \Theta_2\ \dots\ \Theta_q\Big]:=\Big[\ \mathcal{M}[L\Theta_1]\ \mathcal{M}[L\Theta_2]\ \dots\ \mathcal{M}[L\Theta_q]\ \Big]\in\mathbb{R}^{n^2\times q}.$$

В новых обозначениях уравнение (6) равносильно следующему

$$\mathcal{M}L\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ \ldots \ \Theta_q\Big]c = \mathcal{M}[\mathcal{B}], \ c \in \mathbb{R}^q. \tag{7}$$

При условии (5) уравнение (7), а следовательно, и уравнение (6), разрешимы по меньшей мере одним способом [8]

$$\check{c} := \mathcal{M}L^{+}\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ \ldots \ \Theta_q\Big]\mathcal{M}[\mathcal{B}].$$

Здесь $\mathcal{M}L^{+}\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ \ldots \ \Theta_q\Big]$ — псевдообратная по Муру – Пенроузу матрица [1], [8]. Итак, находим частное решение уравнения (4):

$$\Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{q} \check{c}_i \Theta_i, \ \check{c}_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ \ldots \ q,$$

при этом частное решение уравнения (1) имеет вид $\Psi[B] = S_Q \cdot \Psi[\mathcal{B}] \cdot S_R^{-1}$. Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения условия (5). При выполнении условия (5) общее решение уравнения (1) является суммой*

$$C = \Phi[Q, R] + \Psi[B]$$

общего решения

$$\Phi[Q, R] = S_Q \cdot \Phi[J_Q, J_R] \cdot S_R^{-1}$$

однородной части (2) матричного уравнения (1) и частного решения

$$\Psi[B] = S_Q \cdot \Psi[\mathcal{B}] \cdot S_R^{-1}, \ \mathcal{B} := S_Q^{-1} \cdot B \cdot S_R$$

уравнения (1). Здесь S_Q и S_R невырожденные матрицы, преобразующие матрицы Q и R к нормальным жордановым формам:

$$Q = S_Q \cdot J_Q \cdot S_Q^{-1}, \ R = S_R \cdot J_R \cdot S_R^{-1},$$

$$\Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{q} \check{c}_i \Theta_i, \ \check{c} := \mathcal{M}L^{+}\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ \ldots \ \Theta_q\Big]\mathcal{M}[\mathcal{B}],$$

$\{\Theta_i\}_{i=1}^{q}$ *— базис образа $\mathbb{R}(L^*)$ фредгольмового оператора L^*, сопряженного оператору $L:$*

$$L^*C: \ J_Q^*C - CJ_R^*: \ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Предложенная формула частного решения $\Psi[B]$ уравнения (1) существенно отличается от конструкции частного решения в виде псевдообратного оператора L^{+}, использованного в статье [5].

Пример 1. *Неднородное матричное уравнение*

$$QC = CR + B \tag{8}$$

разрешимо при

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Приведем матрицу Q неособенным

$$S_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ S_{Q^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

преобразованием подобия к нормальной жордановой форме

$$J_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично приведем матрицу R неособенным

$$S_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ S_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

преобразованием подобия к нормальной жордановой форме

$$J_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\Phi[J_Q, J_R] = \Phi[J_Q^*, J_R^*] = \Pi \ c_1, \ c_1 \in \mathbb{R}^1;$$

здесь

$$\Pi := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

условие (5) выполнено:

$$P_{L^*}\mathcal{B} = \Pi\mathcal{B}^*\Pi = 0.$$

Базис образа $\mathbb{R}(L^*)$ оператора L^* составляют матрицы

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \Theta_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\mathcal{M}[\mathcal{B}] = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

следовательно

$$\check{c}^* = \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \ \Psi[\mathcal{B}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (8) является суммой

$$C = \Phi[Q, R] + \Psi[B],$$

где

$$\Phi[Q, R] = S_Q \cdot \Phi[J_Q, J_R] \cdot S_R^{-1},\ \Psi[B] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При условии $\sigma(Q) \cap \sigma(R) = \varnothing$ однородная часть (2) матричного уравнения (1) имеет только нулевое решение. В этом случае частное решение $\Psi[\mathcal{B}]$ уравнения (4) следует искать, как линейную комбинацию матриц из образа $\mathbb{R}(L^*) = \mathbb{R}^{n\times n},\ \dim \mathbb{R}(L^*) = n^2$ оператора L, следовательно

$$\Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{n^2} c_i \Theta_i,\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2,\ \ldots\ n^2.$$

Здесь

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},\ \ldots\ ,\ \Xi_{n^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим матрицу

$$\mathcal{M}L\Big[\Theta_1, \Theta_2\ \ldots\ \Theta_{n^2}\Big] := \Big[\ \mathcal{M}[L\Theta_1]\ \mathcal{M}[L\Theta_2]\ \ldots\ \mathcal{M}[L\Theta_{n^2}]\ \Big] \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}.$$

Уравнение (7), а следовательно, и уравнение (6), разрешимы по меньшей мере одним способом [8]

$$\check{c} := \mathcal{M}L^+\Big[\Theta_1, \Theta_2\ \ldots\ \Theta_{n^2}\Big]\mathcal{M}[\mathcal{B}].$$

Итак, в случае $\sigma(Q) \cap \sigma(R) = \varnothing$, находим частное решение уравнения (4):

$$\Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{n^2} \check{c}_i \Theta_i,\ \check{c}_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2,\ \ldots\ n^2,$$

при этом частное решение уравнения (1) имеет вид $\Psi[B] = S_Q \cdot \Psi[\mathcal{B}] \cdot S_R^{-1}$. Таким образом доказано следующее утверждение.

Следствие. *В случае $\sigma(Q) \cap \sigma(R) = \varnothing$ уравнение (1) однозначно разрешимо при любой неоднородности $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, при этом решение имеет вид*

$$C = \Psi[B] = S_Q \cdot \Psi[\mathcal{B}] \cdot S_R^{-1},\ \mathcal{B} := S_Q^{-1} \cdot B \cdot S_R.$$

уравнения (1). Здесь S_Q и S_R невырожденные матрицы, преобразующие матрицы Q и R к нормальным жордановым формам:

$$Q = S_Q \cdot J_Q \cdot S_Q^{-1},\ R = S_R \cdot J_R \cdot S_R^{-1},\ \Psi[\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{q} \check{c}_i \Theta_i,\ \check{c} := \mathcal{M}L^+\Big[\Theta_1, \Theta_2\ \ldots\ \Theta_{n^2}\Big]\mathcal{M}[\mathcal{B}],$$

$\{\Theta_i\}_{i=1}^{n^2}$ *— базис образа $\mathbb{R}(L^*)$ фредгольмового оператора L^* :*

$$L^*C :\ J_Q^* C - C J_R^* :\ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Пример 2. *Неоднородное матричное уравнение (1) однозначно разрешимо при*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу Q неособенным

$$S_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ S_{Q^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

преобразованием подобия к нормальной жордановой форме

$$J_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично приведем матрицу R_9 неособенным

$$S_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

преобразованием подобия к нормальной жордановой форме

$$J_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\sigma(Q) \cap \sigma(R_9) = \varnothing,$$

постольку уравнение (1) однозначно разрешимо. Положим

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots \ , \ \Xi_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\mathcal{M}L\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ \dots \ \Theta_{n^2}\Big] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$\mathcal{M}^*[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (6), а следовательно, и уравнение (7), однозначно разрешимы

$$\check{c} := \mathcal{M}L^{+}\Big[\Theta_1, \Theta_2 \ \dots \ \Theta_{n^2}\Big]\mathcal{M}[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\Psi[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \ \Psi[B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная формула частного решения $\Psi[B]$ уравнения (1) конструктивна и может быть использована в теории устойчивости движения [3], а также при решении матричных дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [6], [7]. В заключение считаю своим долгом высказать благодарность рецензенту за ценные и глубокие замечания по поводу рукописи данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

2. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

3. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М.: Наука, 1978. — 280 с.

4. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 534 с.

5. Boichuk A.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type / A.A. Boichuk, S.A. Krivosheya // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — Т. 50, № 8. — P. 1162–1169.

6. Boichuk A.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation / A.A. Boichuk, S.A. Krivosheya // Differential Equations. — 2001. — Т. 37, № 4. — P. 464–471.

7. Захар-Иткин М.Х. Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований / М.Х. Захар-Иткин // Успехи мат. наук. — 1973. — Т. XXVIII, № 3. — С. 83–120.

8. Бойчук А.А. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи / А.А. Бойчук, В.Ф. Журавлев, А.М. Самойленко. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.

9. Орлов В.Н. Об одном точном критерии существования подвижной особой точки решений скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати / В.Н. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 209–213.

10. Чуйко С.М. Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения / С.М. Чуйко // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32), № 1–2. — С. 101–107.

11. Орлов В.П. Об одной априорной оценке решений неоднородной начально-краевой задачи динамики вязко-упругой среды / В.Н. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 171–178.

12. Chuiko, S.M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action / S.M. Chuiko // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 197, No. 1. — P. 138–150.

13. Чуканов С.Н. Декомпозиция векторного поля динамической системы на основе построения оператора гомотопии / С.Н. Чуканов, Д.В. Ульянов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 189-195.

REFERENCES

1. Gantmacher F.R. Theory of matrices. [Gantmaxer F.R. Teoriya matric]. Moscow: Nauka, 1988, 552 p.

2. Bellman R.E. Introduction to matrix analysis. [Bellman R. Vvedenie v teoriyu matric]. Moscow: Nauka, 1969, 367 p.

3. Lancaster P. Theory of matrices. [Lankaster P. Teoriya matric]. Moscow: Nauka, 1978, 280 p.

4. Daletskii Yu.L., Krein M.G. Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space. [Daleckij Yu.L., Krejn M.G. Ustojchivost' reshenij differencial'nyx uravnenij v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1970, 534 p.

5. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. Ukrainian Mathematical Journal, vol. 50, no. 8, pp. 1162–1169.

6. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations. Differential Equations, 2001, vol. 37, no. 4, pp. 464–471.

7. Zakhar-Itkin M.X. Matrix differential Riccati equation and a semigroup of linear-fractional transformation. [Zaxar-Itkin M.X. Matrichnoe differencial'noe uravnenie Rikkati i polugruppa drobno-linejnyx preobrazovanij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1973, vol. 28, no. 3, pp. 83–120.

8. Boichuk, A.A., Zhuravlev V.F., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. [Bojchuk A.A., Zhuravlev V.F., Samojlenko A.M. Obobshhenno-obratnye operatory i neterovy kraevye zadachi]. Kiev, 1995, 318 p.

9. Orlov V.N. About the Existence of One Exact Criteria of Movable Special Point of Riccati'S Solutions of Scalar and Matrix of Differential Equations. [Orlov V.N. Ob odnom tochnom kriterii sushhestvovaniya podvizhnoj osoboj tochki reshenij skalyarnogo i matrichnogo differencial'nyx uravnenij Rikkati]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 1, pp. 209–213.

10. Chuiko S.M. Green operator Noetherian linear boundary value problem for the matrix differential equation. [Chujko S.M. Operator Grina linejnoj neterovoj kraevoj zadachi dlya matrichnogo differencial'nogo uravneniya]. *Dinamicheskie sistemy — Dynamical Systems*, 2014, vol. 4 (32), no. 1–2, pp. 101–107.

11. Orlov V.N. An Apriory Estimate of Solutions to Nonhomogeneous Initial-Boundary Value Problem. [Orlov V.P. Ob odnoj apriornoj ocenke reshenij neodnorodnoj nachal'no-kraevoj zadachi dinamiki vyazko-uprugoj sredy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 171–178.

12. Chuiko S.M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action. Journal of Mathematical Sciences, 2014, vol. 197, no. 1, pp. 138–150.

13. Chukanov S.N., Ulyanov D.V. Decomposition of the Vector Field of Dynamical System by Constructing a Homotopy Operator. [Chukanov S.N., Ul'yanov D.V. Dekompoziciya vektornogo polya dinamicheskoj sistemy na osnove postroeniya operatora gomotopii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 189-195.

Чуйко С.М., доктор физ.-мат наук, профессор, Зав. кафедрой математики, Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина
E-mail: chujko-slav@inbox.ru

Chuiko S.M., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head. Department of Mathematics, Donbass State Pedagogical University, Slavyansk, Ukraine
E-mail: chujko-slav@inbox.ru